

HY380 – Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

2η Σειρά ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: 12/03/2025 στο elearn
Υπεύθυνος βοηθός για τη 2η Σειρά: Σταύρος Τζορμπατζάκης,
csdp1397@csd.uoc.gr, H stzorba@csd.uoc.gr

Άσκηση 1:

Χρησιμοποιήστε την μέθοδο master για να δώσετε σφιχτά ασυμπτωτικά όρια για τις παρακάτω περιπτώσεις:

- a. $T(n) = 4T(n/2) + n$.
- b. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$.
- c. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$.

Άσκηση 2:

Η σχέση $T(n) = 7T(n/2) + n^2$ περιγράφει τον χρόνο που χρειάζεται για να τρέξει ένας αλγόριθμος A. Ένας ανταγωνιστικός αλγόριθμος A' τρέχει σε χρόνο $T'(n) = aT'(n/4) + n^2$. Ποια είναι η μεγαλύτερη ακέραια τιμή που μπορεί να πάρει το a ώστε ο αλγόριθμος A' να είναι ασυμπτωτικά γρηγορότερος από τον αλγόριθμο A;

Άσκηση 3:

Δώστε ασυμπτωτικά πάνω και κάτω όρια για το $T(n)$ για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις. Υποθέστε ότι το $T(n)$ είναι συνεχές για $n \leq 2$. Κάντε τα όρια σας όσο πιο σφιχτά γίνετε και δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- a. $T(n) = 2T(n/2) + n^3$
- b. $T(n) = T(9n/10) + n$
- c. $T(n) = 16T(n/4) + n^2$
- d. $T(n) = 7T(n/3) + n^2$
- e. $T(n) = 7T(n/2) + n^2$
- f. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$
- g. $T(n) = T(n-1) + n$

Άσκηση 4:

Δώστε ένα (μικρό) παράδειγμα που δείχνει ότι η εκδοχή του άπληστου knapsack αλγορίθμου που επιλέγει ένα στοιχείο με το χαμηλότερο βάρος δεν συνεπάγεται αναγκαστικά μια βέλτιστη λύση.

Άσκηση 5:

Επινοήστε μια διαδικασία διαίρει και βασίλευε για τον υπολογισμό του K μεγαλύτερου στοιχείου σε μια σειρά ακεραίων. Αναλύστε την ασυμπτωτική πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου σας.

(Συμβουλή : Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία κατανομής)

Άσκηση 6:

Στο πρόβλημα του Knapsack Υπάρχουν δύο εκδοχές του προβλήματος. Ποιες είναι αυτές?

Γράψτε τις διαφορές τους και με τι τύπο προγραμματισμού επιλύονται.

Άσκηση 7:

Τρέξτε τον αλγόριθμο του knapsack στα ακόλουθα στοιχεία:

$n = 4$ (# of elements)

$W = 5$ (max weight)

Elements (weight, benefit):

(2,3), (3,4), (4,5), (5,6)

Άσκηση 8:

Το διακριτό πρόβλημα του Knapsack ορίζεται ως εξής.

Ένας κλέφτης ληστεύει ένα κατάστημα που έχει n στοιχεία.

Το στοιχείο i αξίζει v_i δολάρια και ζυγίζει w_i κιλά, όπου v_i και w_i είναι ακέραιοι αριθμοί. Θέλει να πάρει όσο πιο πολύτιμο φορτίο μπορεί, αλλά θα μπορεί να μεταφέρει το πολύ W κιλά στο σάκο του, για κάποιον ακέραιο W . Ποια στοιχεία θα πρέπει να πάρει;

Στο κλασματικό πρόβλημα του Knapsack, το βήμα είναι το ίδιο, αλλά ο κλέφτης μπορεί να πάρει κλασματικά τα ποσά των στοιχείων, αντί να χρειάζεται να λάβει ολόκληρες μονάδες ενός στοιχείου.

(α) Ποιο από τα δύο προβλήματα που παρουσιάζουν την βέλτιστη ιδιότητα - υποδομή;

Εν συντομία την υποστηρίζουν γιατί ή γιατί όχι .

(β) Ποιο από τα δύο προβλήματα που παρουσιάζουν την ιδιότητα της άπληστης επιλογής; Εν συντομία την υποστηρίζουν γιατί ή γιατί όχι.

Άσκηση 9:

Δώστε ένα $O(n \lg K)$ -Time αλγόριθμο για τη συγχώνευση k ταξινομημένων λιστών σε μία ταξινομημένη λίστα, όπου n είναι ο συνολικός αριθμός των στοιχείων σε όλες τις λίστες εισόδου. (Υπόδειξη : Χρησιμοποιήστε ένα λεπτό σωρό για k -way συγχώνευση.)

Άσκηση 10:

Γενικεύστε τον αλγόριθμο του Huffman για κωδικοποιημένες λέξεις σε τριαδικό σύστημα (δηλαδή κωδικοποιημένες λέξεις χρησιμοποιώντας τα σύμβολα 0, 1 και 2), και να αποδείξετε ότι αποδίδει βέλτιστα τριαδικούς κωδικούς.