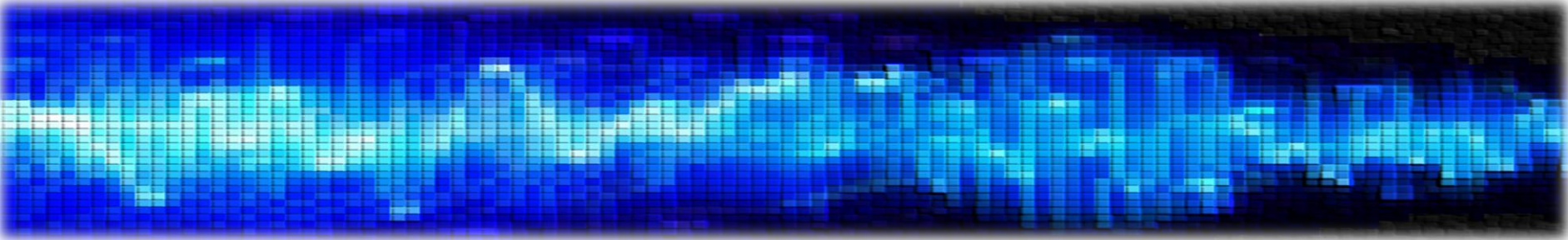


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 3^Η

- 
- Συστήματα διακριτού χρόνου
 - Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

- Μια εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

περιγράφει εν γένει μια σχέση εισόδου εξόδου, δηλ. ένα σύστημα!

- Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση, ένα σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου όσο και της εξόδου
- Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

- Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1], y[-2]$
- Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

- Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος
- Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση
- Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
 - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
 - Ένα σύστημα που **δε** βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?
- Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
 - Της απόκρισης **μηδενικής εισόδου** $y_{zi}[n]$ (zero input response)
 - Της απόκρισης **μηδενικής κατάστασης** $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Η απόκριση **μηδενικής εισόδου** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο των αρχικών συνθηκών
 - Επομένως: αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν
- Η απόκριση **μηδενικής κατάστασης** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
 - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Επιστρέφοντας στην αρχική απλή εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n - 1] + y[n - 2]$$

αν θέσουμε $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ τότε η έξοδος δίνεται ως

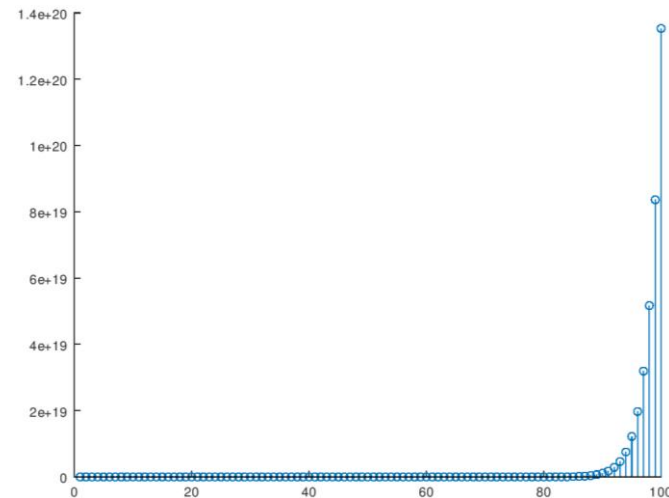
$$y[0] = y[-1] + y[-2] = 0 + 1 = 1$$

$$y[1] = y[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1$$

$$y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 1 = 2$$

$$y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 2 = 3$$

... ..



- Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω σύστημα η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$y[n] = y_{zi}[n]$$

- Η απουσία εισόδου βλέπετε ότι δεν εμποδίζει το σύστημα να παράγει τιμές εξόδου (οι οποίες μάλιστα μεγαλώνουν εκθετικά)!
- Οι μη μηδενικές αρχικές συνθήκες προκαλούν αυτήν τη συμπεριφορά παραγωγής εξόδου άνευ εισόδου 😊

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

- Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. $x[n] = 0 \forall n$, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{zi}[n-k] = 0$$

- Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ομογενής**
- Μπορεί ναδειχθεί ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n, \quad \gamma, c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

- Αντικαθιστώντας παραπάνω

$$\sum_{k=0}^N a_k c\gamma^{n-k} = 0 \Leftrightarrow c\gamma^n \sum_{k=0}^N a_k \gamma^{-k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^N a_k \gamma^{-k} = 0$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

- Δηλ. πρέπει

$$\sum_{k=0}^N a_k \gamma^{-k} = 0$$

- Αναλύοντας

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1} \gamma^{-N+1} + \dots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0$$

$$\gamma^{-N} (a_N + a_{N-1} \gamma + \dots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N) = 0$$

- Το πολυώνυμο στην παρένθεση ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το θέσουμε ίσο με το μηδέν θα έχουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος

- Παραγοντοποιώντας

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \dots (\gamma - \gamma_N) = 0$$

με $\gamma_i, = 1, \dots, N$ τις **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος

- Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την ομογενή!

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Αυτά τα γ αντιστοιχούν στις εξόδους

$$c_1\gamma_1^n, \quad c_2\gamma_2^n, \quad c_3\gamma_3^n, \quad \dots, \quad c_N\gamma_N^n, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, N$$

- Μπορεί ναδειχθεί ότι λύση της ομογενούς αποτελεί και το άθροισμα των παραπάνω

$$c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + c_3\gamma_3^n + \dots + c_N\gamma_N^n, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, N$$

- Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i^n, \quad n \geq 0$$

- Και τα c_i ?

- Προφανώς τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες!

- Άρα χρειαζόμαστε κάθε φορά (α) τις χαρακτηριστικές ρίζες, και (β) τις αρχικές συνθήκες!

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0, y[-1] = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \\ \sum_{k=0}^N a_k \gamma^{N-k} = 0 \end{array} \right.$$

Έχουμε για $x[n] = 0$,

$$y_{zi}[n] + 5y_{zi}[n-1] + 6y_{zi}[n-2] = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι :

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0$

με ρίζες $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = -3$

Οότε

$$\begin{aligned} y_{zi}[n] &= C_1 \gamma_1^n + C_2 \gamma_2^n \\ &= C_1 \cdot (-2)^n + C_2 (-3)^n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Παράδειγμα:

Από τις αρχικές συνθήκες:

$$y_{zi}[-2] = 0 \Leftrightarrow c_1(-2)^{-2} + c_2(-3)^{-2} = 0$$

$$y_{zi}[-1] = 1 \Leftrightarrow c_1(-2)^{-1} + c_2(-3)^{-1} = 1$$

Λύνοντας το σύστημα, παίρνουμε $c_1 = 4$, $c_2 = 9$.

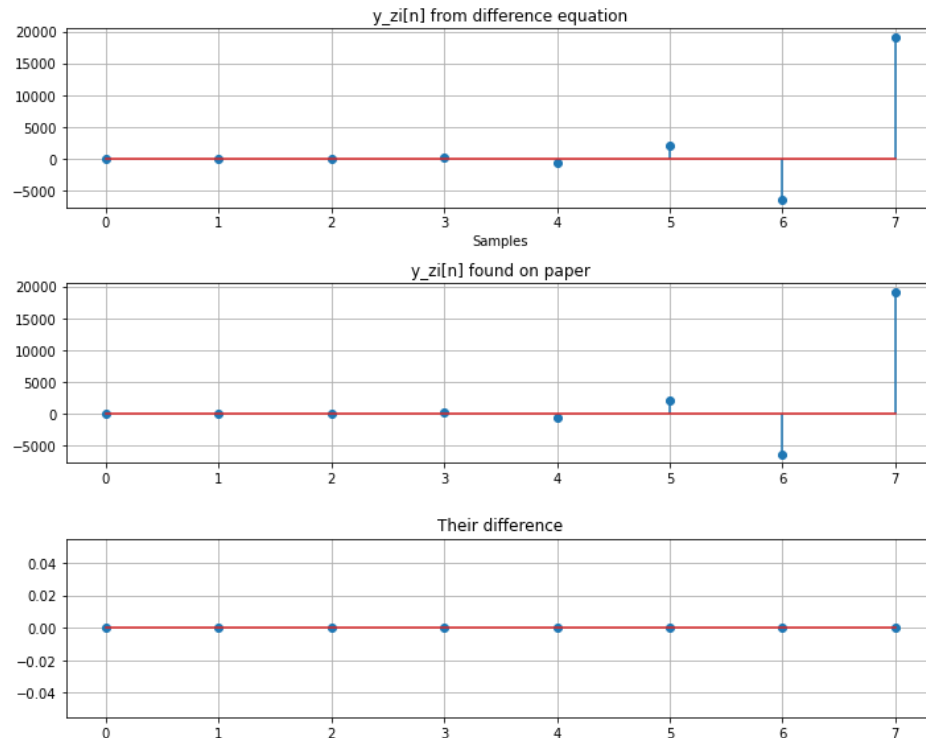
Άρα

$$\begin{aligned} y_{zi}[n] &= 4(-2)^n + 9(-3)^n, \quad n \geq 0 \\ &= [4(-2)^n + 9(-3)^n] u[n]. \end{aligned}$$

• Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

• Python:

2 από αυτά θα «καταναλωθούν» στις αρχικές συνθήκες, άρα θα παράξω 8 δείγματα



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πόσα δείγματα?
N = 10

# Αρχικοποίηση
y = np.zeros((N))

# Αρχικές συνθήκες
y[0] = 0
y[1] = 1

# Μετρώ θεωρώντας το n = 2 ότι αντιστοιχεί στο n = 0 (αφού χρησιμοποιήσαμε
# τις δυο πρώτες θέσεις του πίνακα για τις αρχικές συνθήκες)
for n in range(2, N):
    y[n] = -5*y[n-1] - 6*y[n-2]

n = np.arange(0, N-2)
yzi = 4*(-2)**n - 9*(-3)**n

# Create a figure and three subplots
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10, 8))

# Plotting on each subplot
axs[0].stem(np.arange(2, N)-2, y[2:N]) # First subplot
axs[0].set_title('y_zi[n] from difference equation')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, yzi) # Second subplot
axs[1].set_title('y_zi[n] found on paper')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(y[2:N] - yzi) # Third subplot
axs[2].set_title('Their difference')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')

# Adjust layout to prevent overlap
plt.tight_layout()

# Display the plot
plt.show()
```

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1, y[-1] = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \\ \downarrow \\ \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = 0 \end{array} \right.$$

Θέτουμε $x[n] = 0$, οπότε

$$y_{zi}[n] + \frac{7}{12}y_{zi}[n-1] + \frac{1}{12}y_{zi}[n-2] = 0$$

Το χαρακτ. πολυώνυμο θα είναι:

$$z^2 + \frac{7}{12}z + \frac{1}{12}$$

και η εξίσωση είναι

$$z^2 + \frac{7}{12}z + \frac{1}{12} = 0$$

Οι ρίζες είναι

$$z_1 = -\frac{1}{3}, z_2 = -\frac{1}{4}.$$

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Παράδειγμα:

Η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι

$$y_{zi}[n] = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Από τις αρχικές συνθήκες

$$y_{zi}[-2] = 1 \Leftrightarrow c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + c_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = 1$$

$$y_{zi}[-1] = 0 \Leftrightarrow c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} + c_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} = 0$$

Λύνοντας το σύστημα: $c_1 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{1}{4}$

Άρα

$$\begin{aligned} y_{zi}[n] &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0 \\ &= \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right] u[n]. \end{aligned}$$

- Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας (πολλαπλότητας ≥ 2), μπορεί κανείς να δείξει ότι :

Αν

$$(\gamma - \gamma_1)^r (\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2}) \dots (\gamma - \gamma_N)$$

μια παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται

$$y_{zi}[n] = \underbrace{\sum_{i=1}^r c_i n^{i-1} \gamma_1^n}_{\text{Οφείλεται στην πολλαπλή ρίζα } \gamma_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^N c_i \gamma_i^n}_{\text{Οφείλεται στις υπόλοιπες ρίζες}}, \quad n \geq 0$$

Οφείλεται στην
πολλαπλή ρίζα γ_1

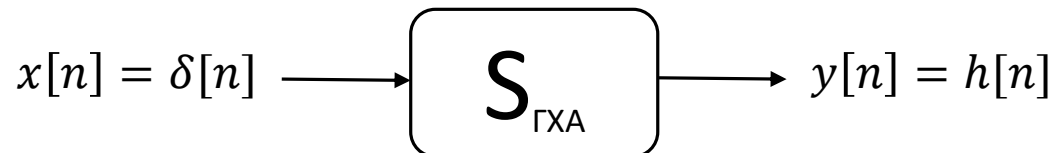
Οφείλεται στις
υπόλοιπες ρίζες

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**

- Στην απόκριση μηδενικής κατάστασης, οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την είσοδο και τα χαρακτηριστικά του συστήματος
- Αν η συνολική έξοδος $y[n]$ καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ)**
 - Αυτή η ιδιότητα θα αποβεί καθοριστική στην πορεία
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο
 - Ας φτάσουμε σε αυτό βήμα-βήμα
- Ποιο είναι το απλούστερο σήμα που μπορεί να παρουσιαστεί στην είσοδο ενός συστήματος?
 - Η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$

• Κρουστική Απόκριση $h[n]$

- Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ τότε η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **κρουστική απόκριση** (impulse response)
 - Έχει “νόημα”: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ένα σήμα που «ζει» μόνο σε μια χρονική στιγμή)
 - Η κρουστική απόκριση συμβολίζεται ως $h[n]$



- Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

- Ας δοκιμάσουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση για ένα απλό σύστημα
- Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την απόκριση μηδενικής εισόδου, και θα “θεωρήσουμε” ότι η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες για $n = 0$
- Θα λύσουμε την ομογενή εξίσωση για $n > 0$!!!! ☺

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

- Έστω το σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

Ας βρούμε την κρουστική του απόκριση

- Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n]$$

- Για $n = 0$,

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = \delta[0] \Leftrightarrow a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1$$

$$a_0 h[0] + a_1 \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow a_0 h[0] = 1 \Leftrightarrow h[0] = \frac{1}{a_0}$$

- Αυτή είναι η (ψευδο-)αρχική μας συνθήκη!
- Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της ομογενούς εξίσωσης για $n > 0$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

- Έστω το ομογενές σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = 0, \quad n > 0$$

- Ξέρουμε ότι

$$h[n] = c\gamma^n, \quad n \geq 0$$

- Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$a_0 \gamma + a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$$

- Οπότε

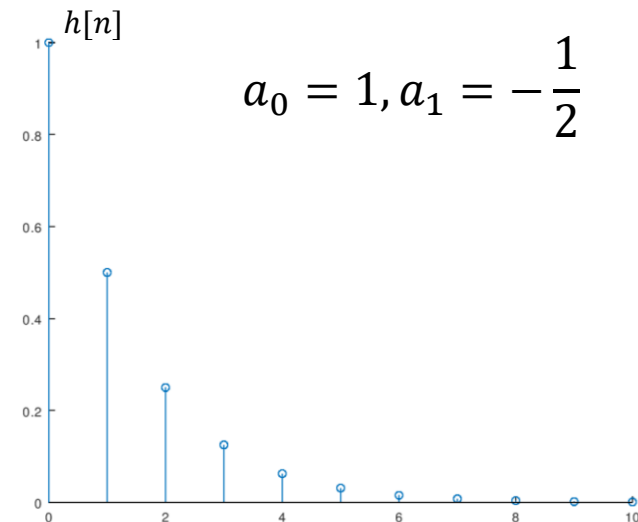
$$h[n] = c \left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^n, \quad n \geq 0$$

- Βρίσκουμε και τη σταθερά ως

$$h[0] = c \left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^0 = c = \frac{1}{a_0}$$

- Άρα

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^n, \quad n \geq 0$$



Συνεχίζεται... 😊

