

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 2^Η

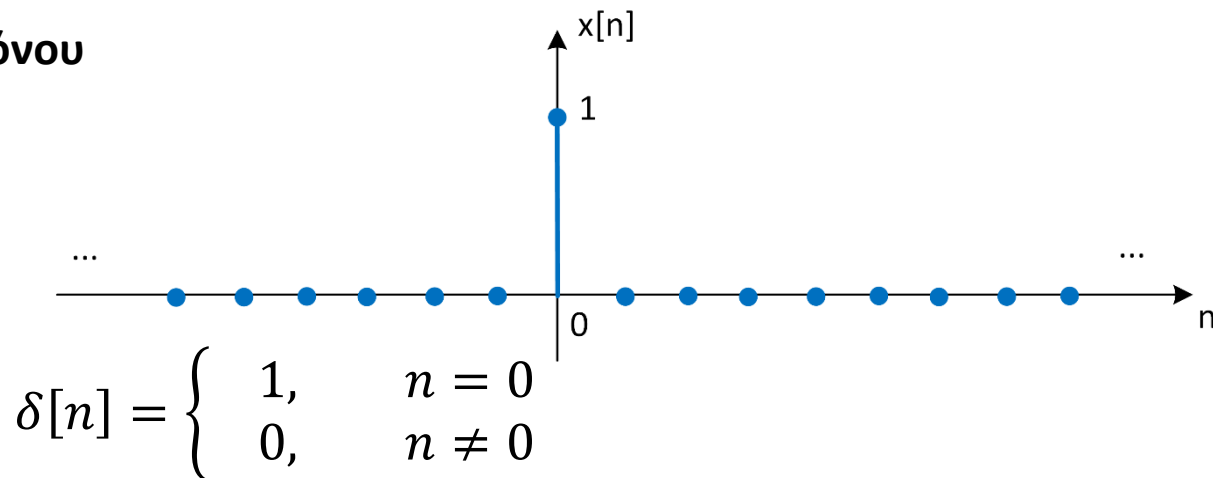
- Βασικά Σήματα, Συστήματα και Ιδιότητες

• Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.
- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

• Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου

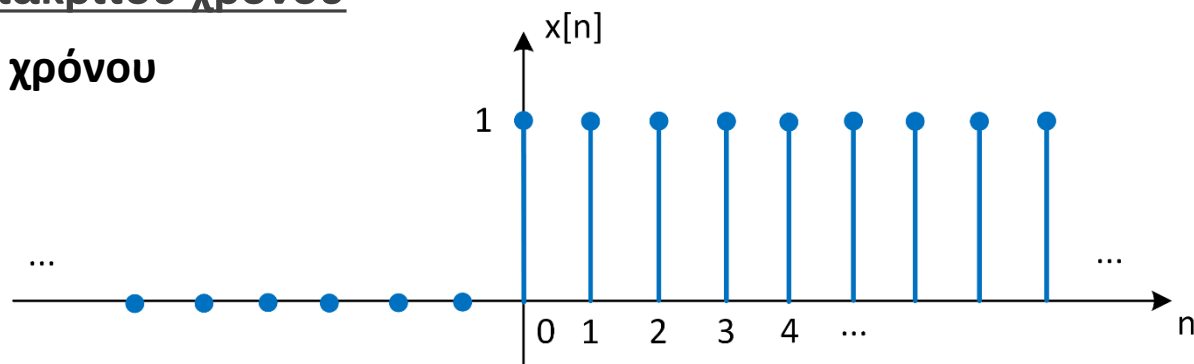
Ορισμός:



- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

- Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου
- Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου



Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

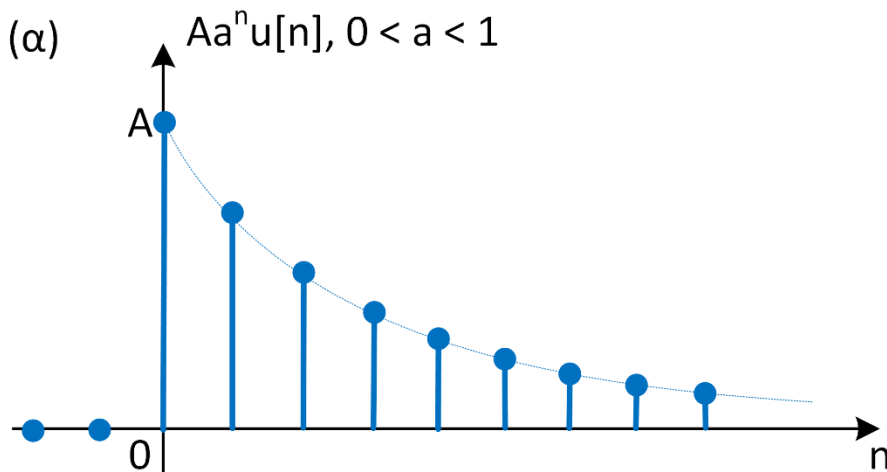
- Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου
- Εκθετική μιγαδική συνάρτηση διακριτού χρόνου

$$x[n] = a^n, \quad a \in \mathbb{C}$$

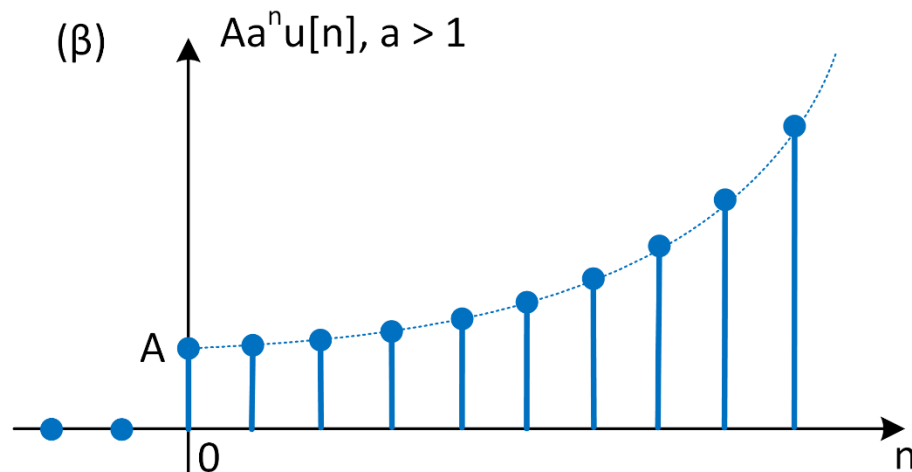
- Περισσότερο χρήσιμες είναι οι «εκδόσεις» γινομένου με τη βηματική συνάρτηση

$$x[n] = a^n u[n], \quad 0 < a < 1 \text{ ή } a > 1 \quad \leadsto e^{at} u(t)$$

(α) $Aa^n u[n], 0 < a < 1$

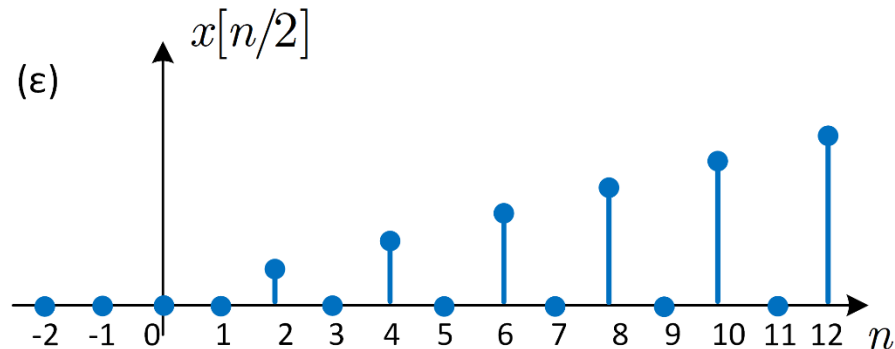
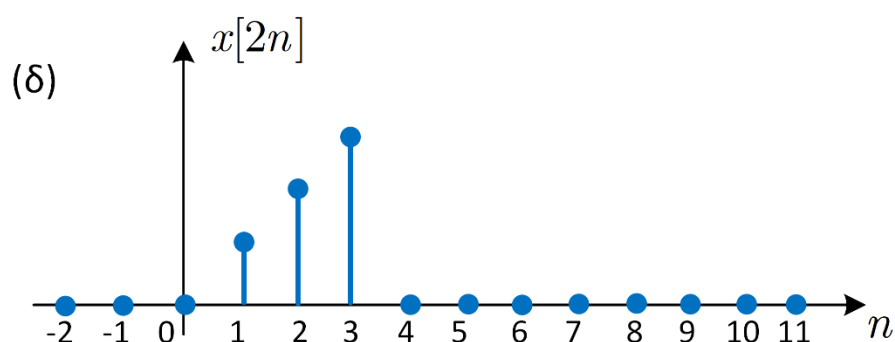
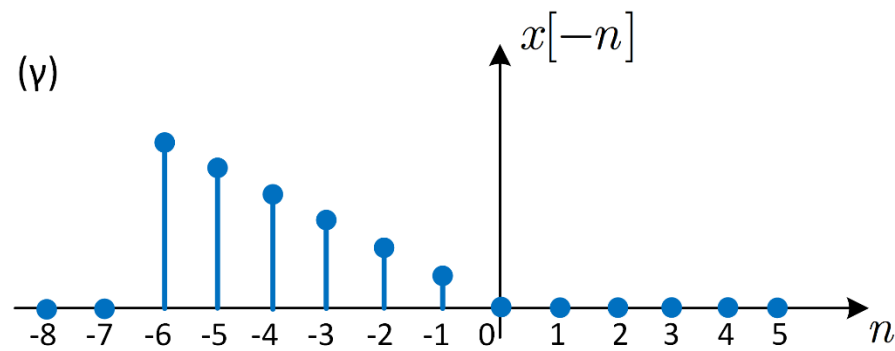
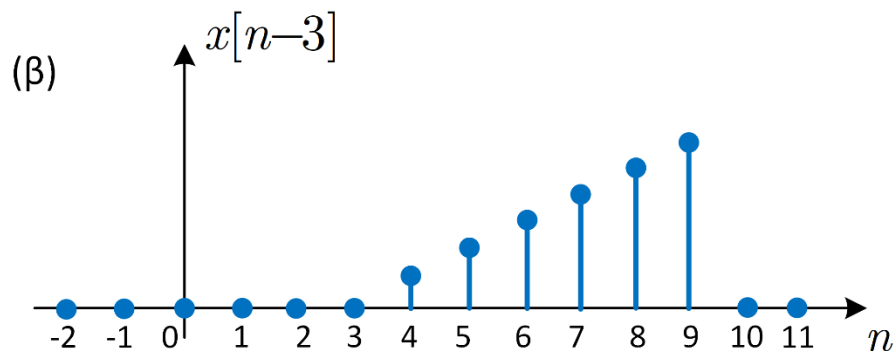
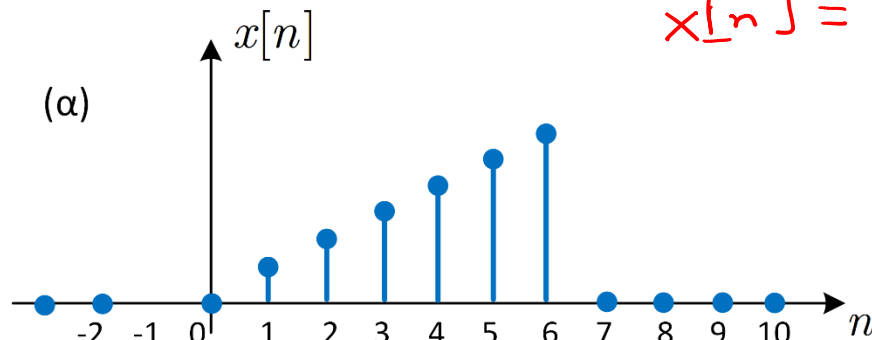


(β) $Aa^n u[n], a > 1$



• Μετασχηματισμοί σημάτων

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



• Μετασχηματισμοί σημάτων

$$(α) x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

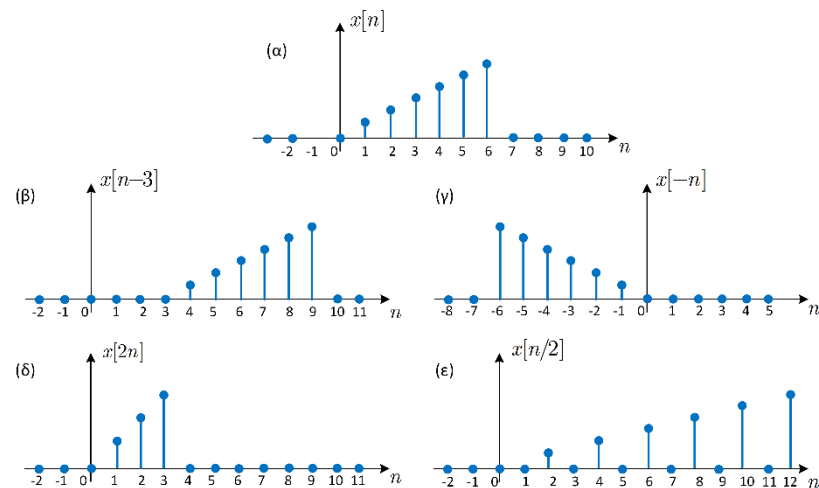
$$(β) x[n-3] = \begin{cases} n-3, & 0 \leq n-3 \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n-3, & 3 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$(γ) x[-n] = \begin{cases} -n, & 0 \leq -n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} -n, & -6 \leq n \leq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$(δ) x[2n] = \begin{cases} 2n, & 0 \leq 2n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 2n, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$(ε) x[n/2] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & 0 \leq \frac{n}{2} \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n=0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



- Ανάλυση σήματος

- Κάθε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k]$$

- Παρατηρήστε ότι κάθε συνάρτηση Δέλτα έχει πλάτος την αντίστοιχη τιμή του σήματος $x[n]$ τη χρονική στιγμή $n = k$
- Σκεφτείτε το ανάλογο του συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

- Παράδειγμα:

$$\textcircled{\circ} \text{ Γράψτε το σήμα } x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

με χρήση συναρτήσεων Δέλτα

$$x[n] = 1 \cdot \delta[n] - 2 \delta[n-1] + 3 \delta[n-2]$$

- Ενέργεια και Ισχύς σήματος

- Χρειαζόμαστε μια μετρική που να απεικονίζει το «μέγεθος» ενός σήματος
- Μια τέτοια είναι η **ενέργεια** ενός σήματος

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

- Σήματα για τα οποία $0 < E < +\infty$ ονομάζονται **σήματα ενέργειας**
 - Όλα τα σήματα στη φύση ή στο εργαστήριο είναι σήματα ενέργειας
- Κάποια ενδιαφέροντα σήματα (από θεωρητικής πλευράς) έχουν άπειρη ενέργεια
- Μια πιο κατάλληλη μετρική είναι η **ισχύς** ενός σήματος

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

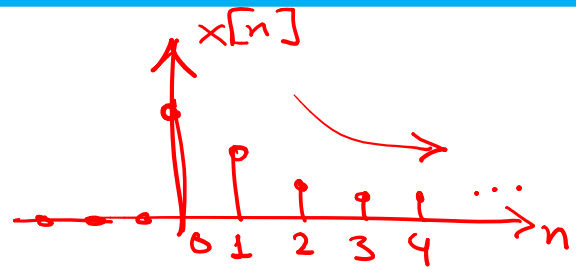
- Ένα σήμα είναι ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δυο!

- Ενέργεια και Ισχύς σήματος
- Hints:
- Σήμα με:
 - Πεπερασμένη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος $\rightarrow$ σήμα ενέργειας
 - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που φθίνει στο μηδέν όταν $n \rightarrow \pm\infty \rightarrow$ πιθανότατα σήμα ενέργειας
 - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που **δε** φθίνει στο μηδέν όταν $n \rightarrow \pm\infty \rightarrow$ σήμα ισχύος
 - **Περιοδικό** σήμα με πεπερασμένο πλάτος $\rightarrow$ σήμα ισχύος
- Από μαθηματικής σκοπιάς, μπορεί να υπάρχουν σήματα που να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες αλλά να μην είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος
 - Αλλά αυτά είναι μαθηματικές κατασκευές, δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν στο εργαστήριο, δεν υπάρχουν στη φύση, και δε μας ενδιαφέρουν από πρακτικής σκοπιάς

• Ενέργεια και Ισχύς σήματος

• Παραδείγματα:

○ Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$



Είναι

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \right|^2 |u[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u^2[n] \quad \left\{ \begin{array}{l} u^2[n] = u[n] \\ u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases} \end{array} \right. = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u[n]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

• Ενέργεια και Ισχύς σήματος

• Παραδείγματα:

- Υπολογίστε την ισχύ του σήματος $x[n] = u[n]$



Είναι

$$u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |u[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N u[n]$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} (N+1)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{N}(1 + \frac{1}{N})}{\cancel{N}(2 + \frac{1}{N})}$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 + 1/N}{2 + 1/N} = 1/2$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = c(N_2 - N_1 + 1)$$

- Τα σήματα φέρουν χρήσιμη πληροφορία που μπορεί να εξαχθεί μέσω των **συστημάτων**
- Ένα σύστημα δεν είναι τίποτε άλλο από μια οποιαδήποτε διαδικασία παράγει μια **έξοδο** όταν διεγερθεί από μια **είσοδο**
 - Το σύστημα διεγείρεται από ένα **σήμα εισόδου** και παράγει ως απόκριση ένα **σήμα εξόδου**
 - Το σύστημα μπορεί να υλοποιείται σε υλικό, λογισμικό, ή να υπάρχει στη φύση
- Η πιο γενική απεικόνιση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη



- Το σήμα εισόδου συμβολίζεται με $x[n]$
- Το σήμα εξόδου συμβολίζεται με $y[n]$

- Το σύστημα πραγματοποιεί μια λειτουργία επάνω στο σήμα εισόδου με σκοπό να εξάγει κάποια πληροφορία από αυτό
- Μια διαφορετική αναπαράσταση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

με $T\{\cdot\}$ να αναπαριστά έναν τελεστή (πράξη) που εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος $x[n]$ ώστε να παραχθεί η έξοδος $y[n]$

- Πιο συγκεκριμένα, ένα σύστημα αναπαριστά μια **σχέση εισόδου-εξόδου**
- Παραδείγματα συστημάτων:

$$y[n] = 2x[n]$$

$$y[n] = 3x^2[n - 1]$$

$$y[n] = y[n - 1] + x[n]$$

- Αργότερα, ένα σύστημα θα αναπαρίσταται μαθηματικά ως μια **εξίσωση διαφορών**

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n - l]$$

- Τα συστήματα διακρίνονται σε 5 (για τους σκοπούς μας) κατηγορίες:

1. Δυναμικά ή Στατικά
2. Γραμμικά ή μη γραμμικά
3. Χρονικά μεταβλητά ή αμετάβλητα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά
5. Ευσταθή και ασταθή

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε ότι ένα σύστημα με είσοδο $x[n]$ θα δίνει έξοδο $y[n]$

- **Δυναμικά ή Στατικά**
- Αλλιώς, ονομάζονται συστήματα **με μνήμη ή χωρίς μνήμη**
- **Δυναμικά** ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή n_0
- **Στατικά** ονομάζονται αυτά που δεν έχουν αυτήν την απαίτηση, δηλ. για τον υπολογισμό της εξόδου τη στιγμή n_0 απαιτείται η είσοδος την ίδια χρονική στιγμή και μόνο

- Παραδείγματα:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] + x[n-2] && \Delta \\
 y[n] &= x[n+1] - 2x[n-1] && \Delta \\
 y[n] &= \log |x[n]| && \Sigma \\
 y[n] &= x^2[n] && \Sigma
 \end{aligned}$$

- Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?

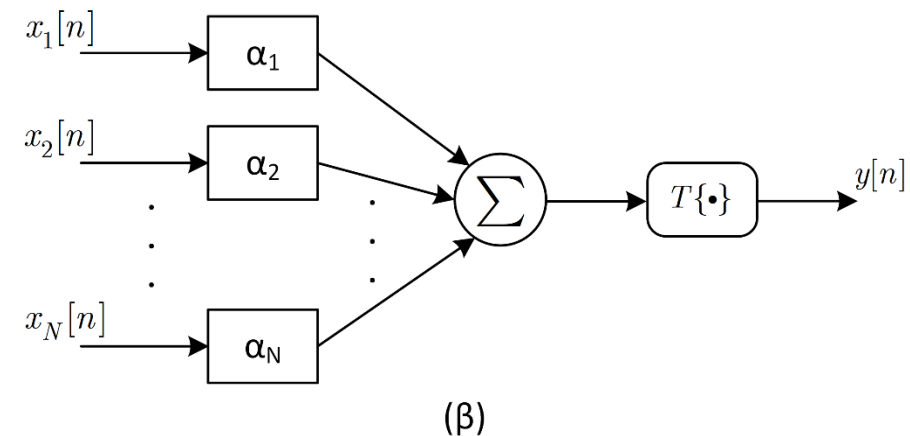
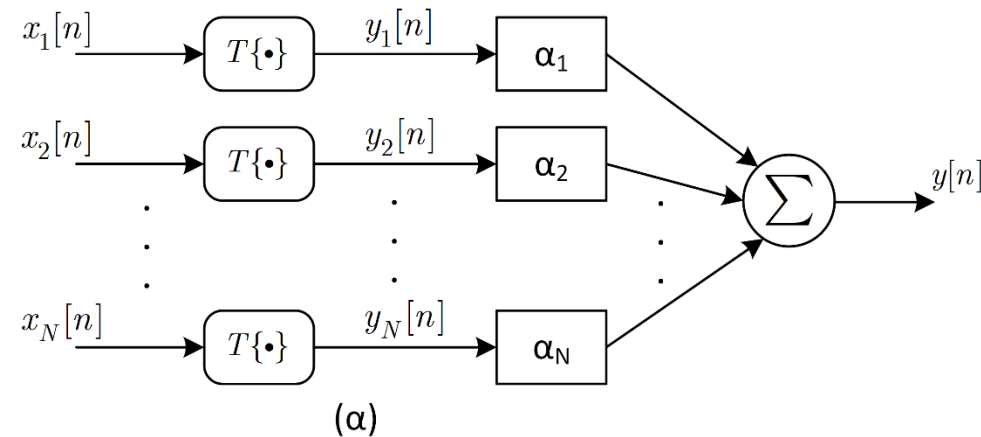
- Γραμμικά ή μη γραμμικά
- Γραμμικό λέγεται ένα σύστημα ικανοποιεί δυο ιδιότητες:
 - Την ιδιότητα της **ομογένειας**
 - Την ιδιότητα της **αθροιστικότητας**

• Γραμμικά ή μη γραμμικά

- **Ομογένεια:** αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $cx[n]$ τότε στην έξοδο θα εμφανίζεται το σήμα $cy[n]$
 - Π.χ. $y[n] = 2x[n - 1]$, $y[n] = x[n + 3] - x[n]$, $y[n] = 3x[-n] + 2x[n^2]$
 - Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n]$, $y[n] = \frac{1}{x[n]}$, $y[n] = \sqrt{|x[n]|}$
- **Αθροιστικότητα:** αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $x_1[n] + x_2[n]$ τότε στην έξοδο εμφανίζεται το σήμα $y_1[n] + y_2[n]$, με $y_1[n]$ και $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ αντίστοιχα.
 - Π.χ. $y[n] = 2x[n - 1] + x[n]$, $y[n] = nx[-n] - 5x[n + 1]$, $y[n] = 3x[-n - 1] + 2[n + 1]$
 - Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n]$, $y[n] = \frac{1}{x[n]}$, $y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

• Γραμμικά ή μη γραμμικά

- Για τους οπτικούς τύπους ☺ η γραμμικότητα ισχύει αν οι δυο παρακάτω διατάξεις πραγματοποιούν την ίδια έξοδο



- Με μαθηματικά (για δυο μόνο εισόδους), αν

$$\begin{aligned}
 T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} &= \\
 &= T\{ax_1[n]\} + T\{bx_2[n]\} \\
 &= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \\
 &= ay_1[n] + by_2[n]
 \end{aligned}$$

με $y_1[n], y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ αντίστοιχα, τότε το σύστημα είναι γραμμικό.

• Γραμμικά ή μη γραμμικά

• Παράδειγμα:

○ Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n]$$

είναι γραμμικό.

- Ομογένεια : αν $x[n] \longrightarrow y[n] = 2x[n-1] + x[n]$ ①
 αν $cx[n] \longrightarrow y'[n] = 2cx[n-1] + cx[n]$
 $= c(2x[n-1] + x[n]) \stackrel{①}{=} cy[n].$
 Άρα είναι ομογενές.

- Αδρυστικότητα : αν $x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = 2x_1[n-1] + x_1[n]$ ②
 αν $x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = 2x_2[n-1] + x_2[n]$ ③
 τότε αν $x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow y'[n] =$
 $= 2(x_1[n-1] + x_2[n-1]) + (x_1[n] + x_2[n])$
 $= (2x_1[n-1] + x_1[n]) + (2x_2[n-1] + x_2[n])$
 $\stackrel{(2,3)}{=} y_1[n] + y_2[n],$ άρα είναι αδρυστικό.

Άρα είναι
 γραμμικό!

• Γραμμικά ή μη γραμμικά

• Παράδειγμα:

○ Ελέγξτε αν το σύστημα

είναι γραμμικό.

$$y[n] = x^2[n]$$

Άρα είναι
μη-γραμμικό!

• Ομογένεια: $x[n] \longrightarrow y[n] = x^2[n]$

$$cx[n] \longrightarrow y'[n] = (cx[n])^2 = c^2 x^2[n]$$

$$\neq cy[n]$$

Δεν είναι ομογενές.

• Αθροιστικότητα: $x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = x_1^2[n]$

$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = x_2^2[n]$$

$$\begin{aligned} \text{αν } x_1[n] + x_2[n] &\longrightarrow y'[n] = (x_1[n] + x_2[n])^2 \\ &= x_1^2[n] + x_2^2[n] + \underline{\underline{2x_1[n]x_2[n]}} \end{aligned}$$

Άρα μη αθροιστικό.

$$\neq y_1[n] + y_2[n]$$

• Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Η χρονική (α)μεταβλητότητα έχει να κάνει με τη συμπεριφορά του συστήματος όταν η είσοδος καθυστερεί κατά κάποια δείγματα
- Έστω $x[n]$ η είσοδος σε ένα **χρονικά αμετάβλητο** (ΧΑ) σύστημα, και έστω $y[n]$ η έξοδος.
- Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0 δείγματα, δηλ.

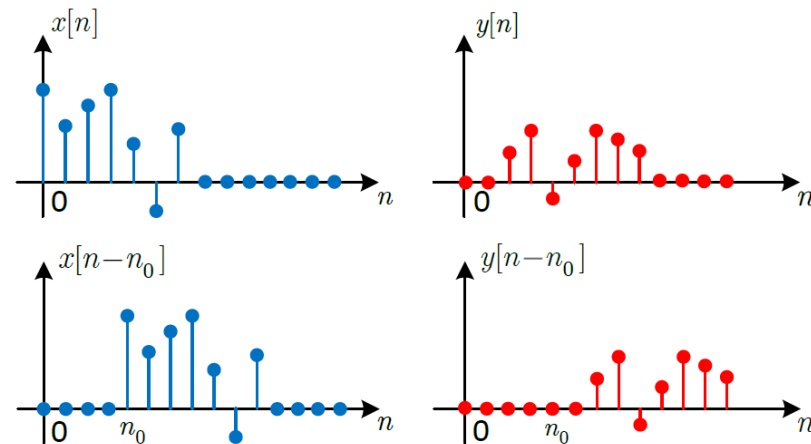
$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

τότε η έξοδος θα είναι

$$y_1[n] = y[n - n_0]$$

- Ένα σύστημα που δεν ικανοποιεί τα παραπάνω ονομάζεται **χρονικά μεταβλητό**. Ένα χρονικά μεταβλητό σύστημα αποκρίνεται διαφορετικά σε κάθε καθυστέρηση της εισόδου

- Η διαφορά μπορεί να έγκειται στην καθυστέρηση της εξόδου, στο πλάτος της, ακόμα και στη γραφική παράσταση του σήματος εξόδου!



- Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Για είσοδο $x[n] \xrightarrow{S} y[n] = x^2[n]$

$\xrightarrow{u} x[n-n_0] \xrightarrow{S} y'[n] = x^2[n-n_0] \quad \textcircled{1}$

Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0 δείγματα, παίρνουμε:

$$y[n-n_0] = x^2[n-n_0] \quad \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} = \textcircled{2}$, άρα το σύστημα είναι Χ.Α.

- Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = nx^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Για είσοδο $x[n] \xrightarrow{S} y[n] = nx^2[n]$

$\xrightarrow{S} x[n-n_0] \xrightarrow{S} y'[n] = nx^2[n-n_0] \quad (1)$

Για καθυστέρηση εφόδου κατά n_0 δείγματα, έχω $|\epsilon|$:

$$y[n-n_0] = (n-n_0)x^2[n-n_0] \quad (2)$$

$(1) \neq (2)$, άρα το σύστημα είναι Χ.Μ.

• Αιτιατά και μη αιτιατά

- Αιτιατό λέγεται ένα σύστημα που **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογίσει μια τιμή της εξόδου του
- Κάθε φυσικό σύστημα είναι αιτιατό
- Μη αιτιατά συστήματα είναι υλοποιήσιμα όταν η είσοδος βρίσκεται διαθέσιμη ολόκληρη από πριν
 - Καταγεγραμμένη σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο
- Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n - 2] \quad \text{A}$$

$$y[n] = x^2[n + 1] - 2 \sin(x[n - 1]) \quad \text{Μ.Α.}$$

$$y[n] = \log |x[n + 1]| \quad \text{Μ.Α.}$$

$$y[n] = \sqrt{x[n - 1]} \quad \text{A}$$

- Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?

- **Ευσταθή και ασταθή**

- Ένα σύστημα ονομάζεται **Φραγμένης-Εισόδου-Φραγμένης-Εξόδου (Bounded-Input-Bounded-Output – BIBO)** ευσταθές αν

$$|x[n]| \leq B_x, \quad B_x \in \mathbb{R}_+$$

συνεπάγεται ότι

$$|y[n]| \leq B_y, \quad B_y \in \mathbb{R}_+$$

- Η ευστάθεια ουσιαστικά απαιτεί για απολύτως φραγμένη είσοδο, η έξοδος να είναι επίσης απολύτως φραγμένη

- Ευσταθή και ασταθή

- Παράδειγμα:

○ Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y[n] = \frac{1}{x[n]}$$

$$y[n] = x^2[n-2]$$

είναι ευσταθή.

• αν $x[n_0] = 0$, τότε $y[n_0] \rightarrow +\infty$, δεν είναι απολύτως φραγμένο και άρα το σύστημα είναι ασταθές.

• αν $|x[n]| \leq B_x$, τότε $|y[n]| = |x^2[n-2]| = |x[n-2]|^2 \leq B_x^2$,
 άρα το σύστημα μας είναι ευσταθές.

Τέλος Διάλεξης

