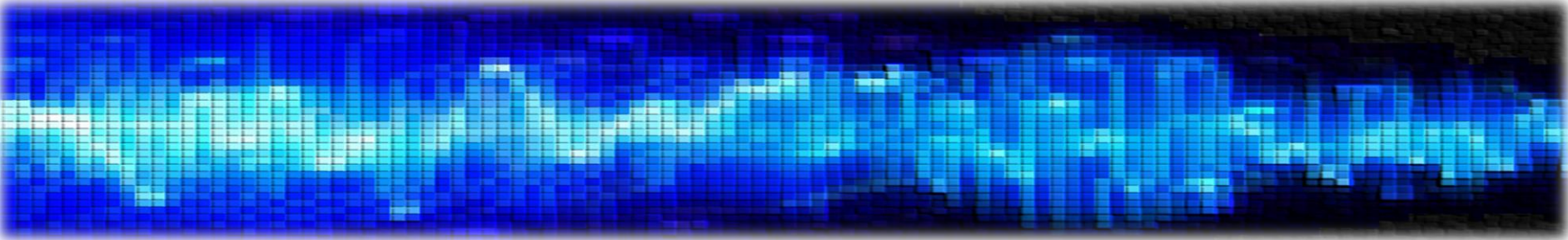


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 1<sup>Η</sup>

- 
- Δειγματοληψία (reminder)
  - Βασικά Σήματα και Ιδιότητες

- **Ως τώρα... (από ΗΥ215)**

- Σειρές Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Μετασχ. Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Μετασχ. Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- ΓΧΑ συστήματα:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

- **Θεώρημα *Shannon-Nyquist*:**

Ακριβής και τέλεια ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x(t)$  από τα δείγματά του – Προϋποθέσεις:

1. Το σήμα συνεχούς χρόνου να έχει μετασχηματισμό Fourier  $X(f)$  τέτοιο ώστε:

$$|X(f)| = 0, \quad |f| > f_{max}$$

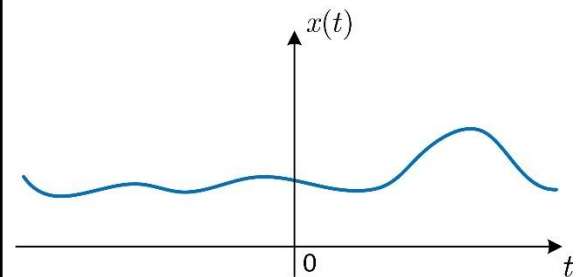
με  $f_{max}$  τη μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου

2. Η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  πρέπει να είναι (γνήσια) μεγαλύτερη από τη **διπλάσια** μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα  $f_{max}$

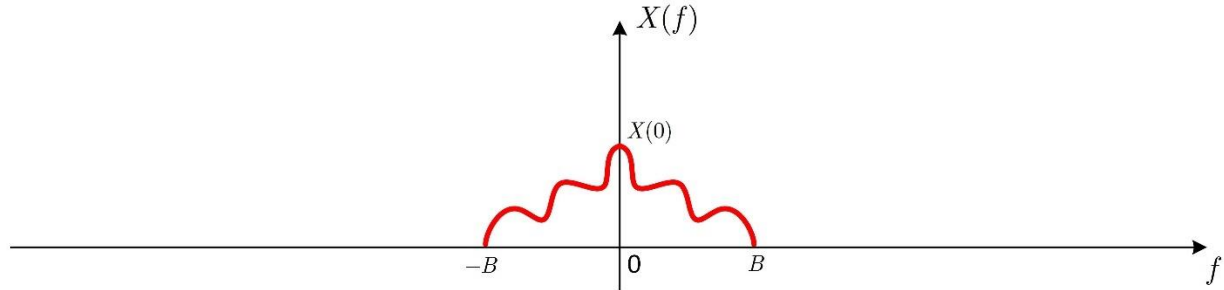
$$f_s > 2f_{max}$$

- Η συχνότητα  $f_{max}$  ονομάζεται **συχνότητα Nyquist** και η συχνότητα  $2f_{max}$  ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**
- Η δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου στο χρόνο δημιουργεί «αντίγραφα» του φάσματος  $X(f)$  ανά  $f_s$  Hz στο πεδίο της συχνότητας

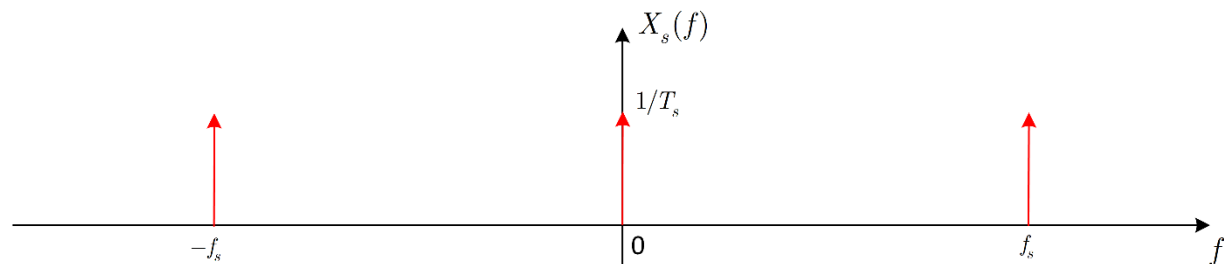
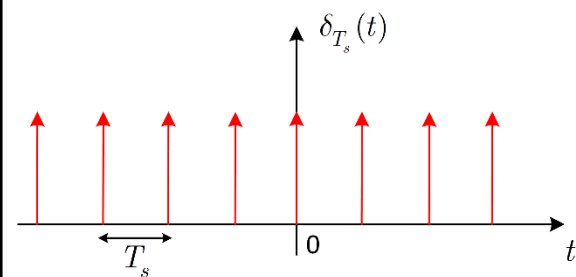
ΧΡΟΝΟΣ



ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

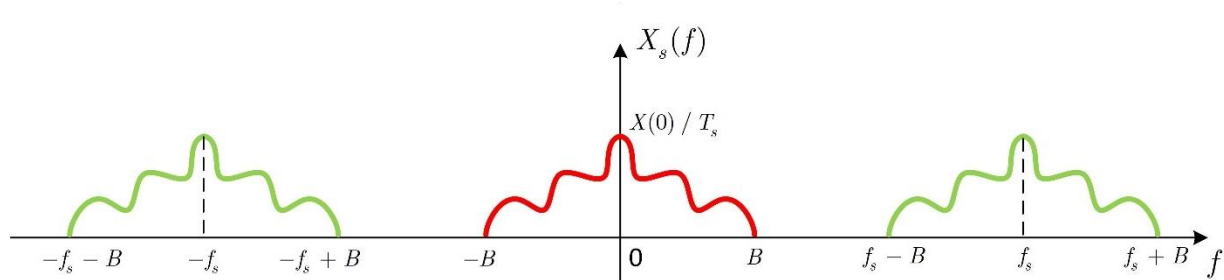
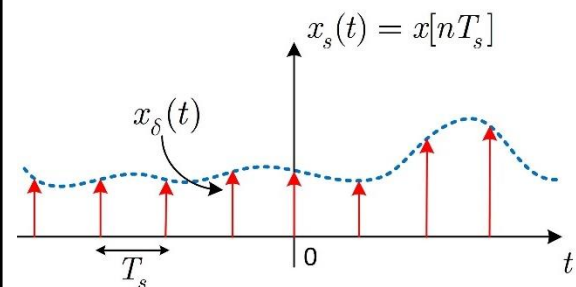


★ (Συνέλιξη)



||

||



- **Θεώρημα Shannon-Nyquist:**

Πώς γίνεται η ανακατασκευή;

1. Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα  $X_s(f)$  του δειγματοληπτημένου σήματος  $x(nT_s)$  με ένα τετραγωνικό παράθυρο – ή αλλιώς, χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H_{lp}(f) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

δηλ.

$$X_{rec}(f) = X_s(f)H_{lp}(f) = X(f)$$

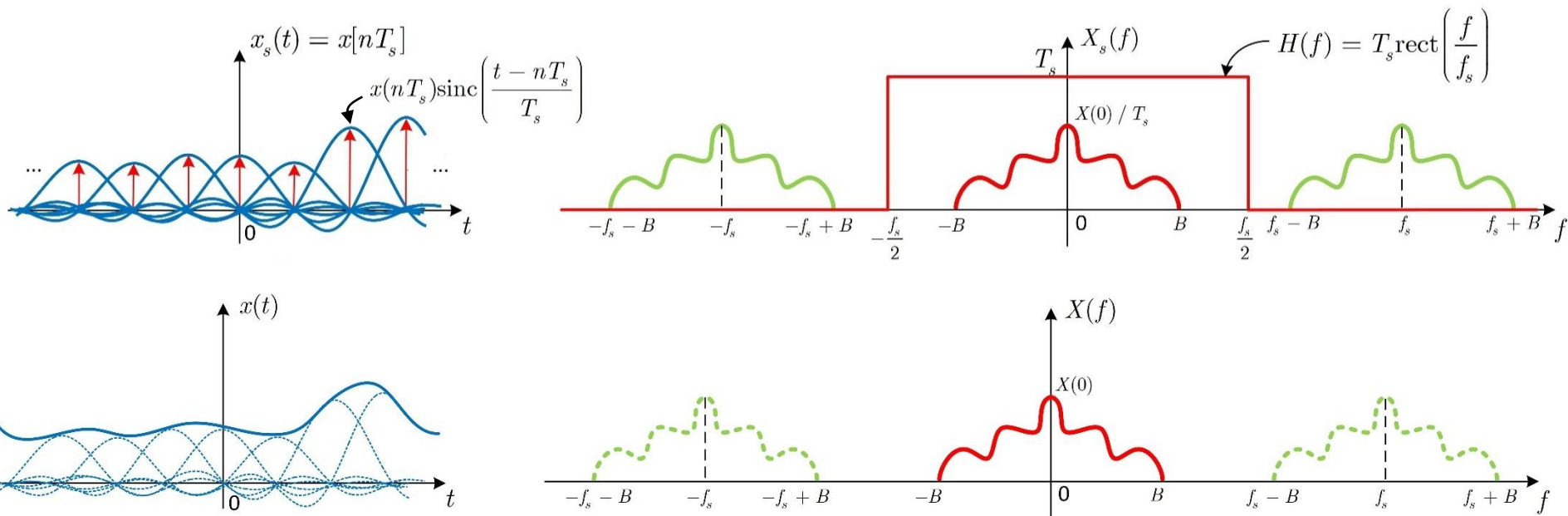
ώστε να απομονωθεί το «κεντρικό» φάσμα από τα «αντίγραφα» του

2. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με συνέλιξη στο χρόνο! Δηλ. πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος  $x(nT_s)$  του δειγματοληπτημένου σήματος με μετατοπισμένες συναρτήσεις  $\text{sinc}(\cdot)$  και άθροισμα όλων των τελευταίων

$$x(t) = x_s(t) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

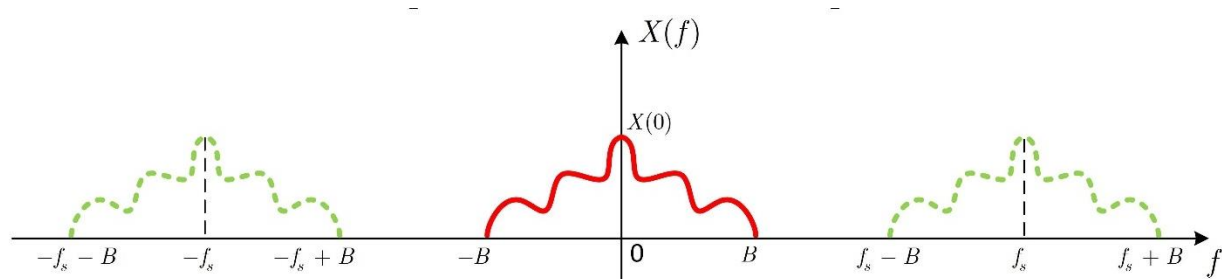
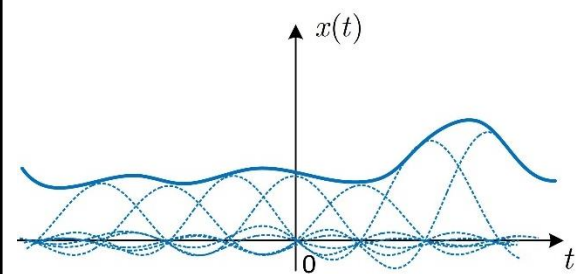
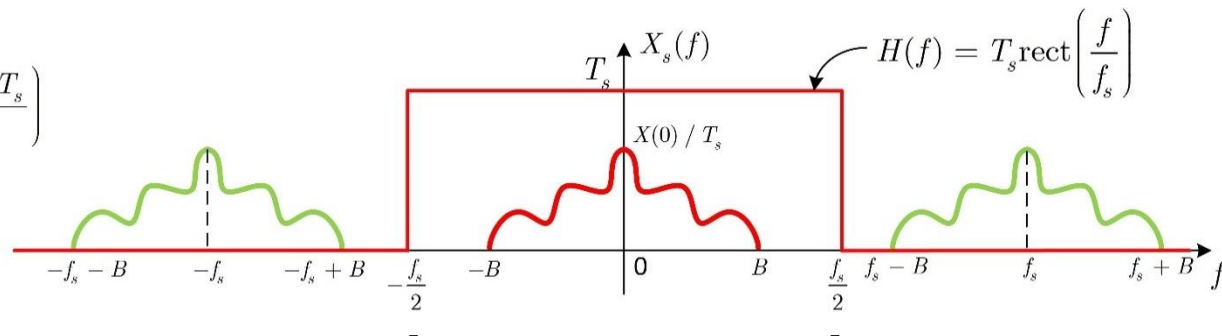
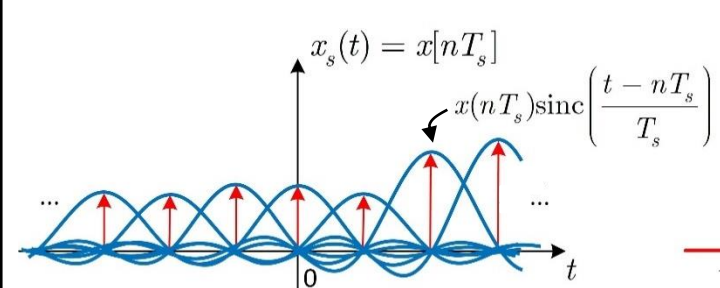
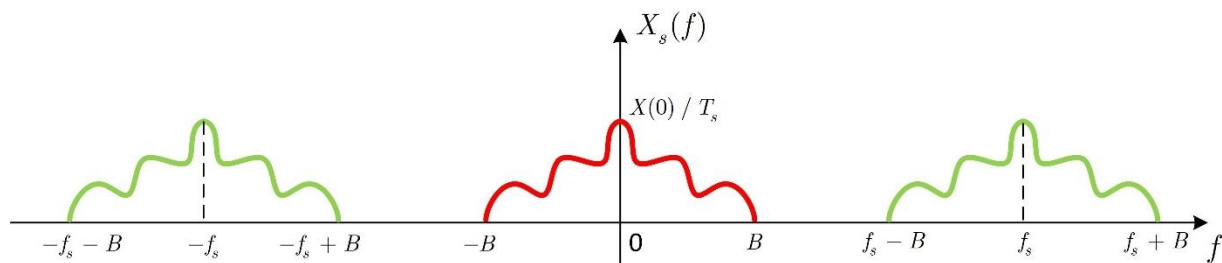
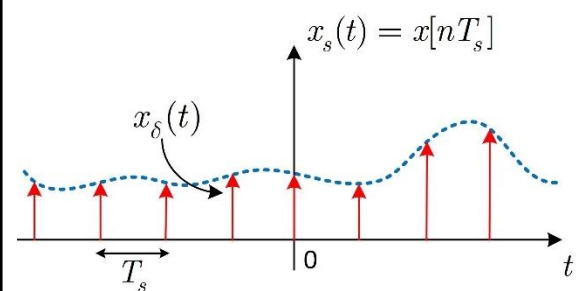
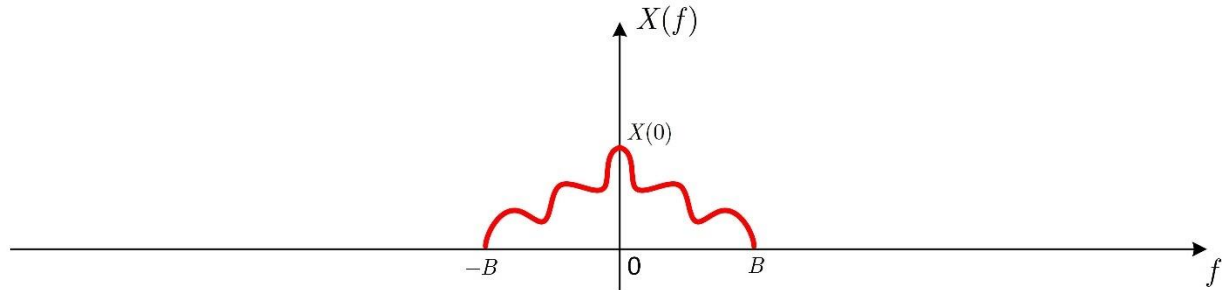
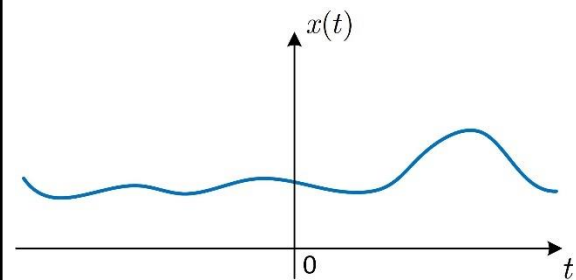
- Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 x_{rec}(t) &= x_s(t) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\
 &= \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)
 \end{aligned}$$



**ΧΡΟΝΟΣ**

**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**



## • Παράδειγμα:

- Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ . Δειγματοληπτήστε το με συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  και βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου  $x[n]$ .

$$\Theta \acute{\epsilon} \tau \omega \quad \left. \begin{aligned} t &:= nT_s, n \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{n}{f_s}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(nT_s) = A \cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{f_s}\right)$$

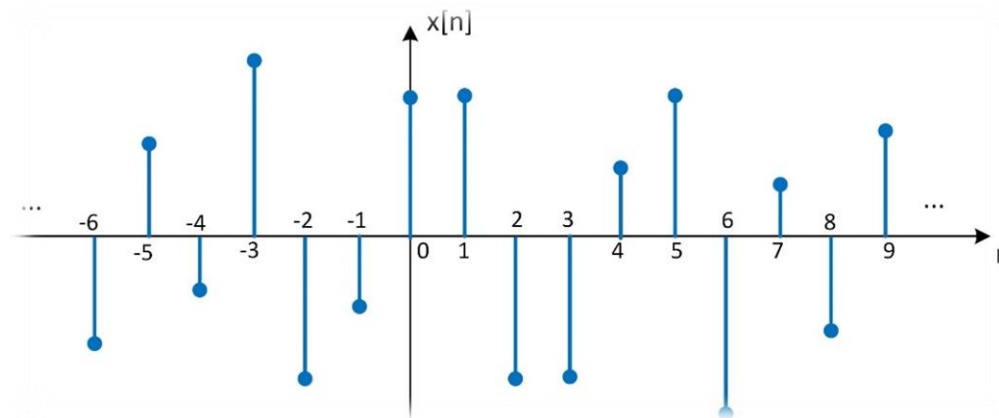
$$\left. \begin{aligned} &= A \cos\left(\frac{2\pi f_0}{f_s} n\right) \\ \omega_0 &= \frac{2\pi f_0}{f_s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x[n] = A \cos(\omega_0 n), n \in \mathbb{Z}$$

$$\Gamma_{\iota} \times \left. \begin{aligned} f_0 &= 100 \text{ Hz} \\ f_s &= 250 \text{ Hz} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2\pi 100}{250} \\ &= \frac{20\pi}{25} \\ &= \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

$$x[n] = A \cos\left(\frac{4\pi}{5} n\right).$$

Δεν προέρχονται **όλα** τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία κάποιων σημάτων συνεχούς χρόνου!

- Σήμα διακριτού χρόνου



- Εν γένει, μπορεί να είναι μιγαδικό

$$x[n] = a[n] + jb[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

$$= \text{Re}\{x[n]\} + j\text{Im}\{x[n]\}$$

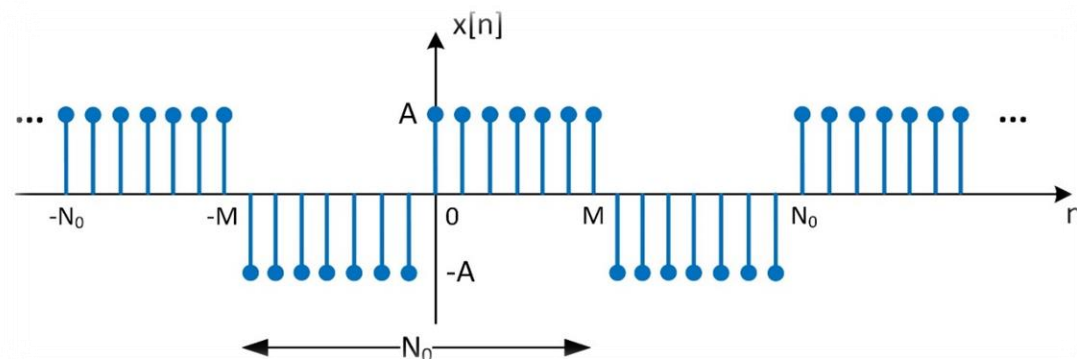
$$= |x[n]| e^{j\phi_x[n]}$$

- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης

$$|x[n]| = \sqrt{\text{Re}^2\{x[n]\} + \text{Im}^2\{x[n]\}}$$

$$\phi_x[n] = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{x[n]\}}{\text{Re}\{x[n]\}} \in (-\pi, \pi]$$

- Περιοδικά σήματα



- Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν υπάρχει θετικός *ακέραιος*  $N$  τέτοιος ώστε

$$x[n] = x[n + N]$$

- Ο μικρότερος αριθμός  $N$  που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται **περίοδος** του σήματος.
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν  $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$ , με περιόδους  $N_1, N_2$ , τότε η περίοδος του σήματος  $y[n]$  είναι

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

## • Ημίτονα

- Περιοδικότητα στο χρόνο
- Είναι κάθε ημίτονο περιοδικό; (στο συνεχή χρόνο, ήταν!)
- Έστω ότι υπάρχει περίοδος  $N$ , τότε θα ικανοποιεί τη σχέση

$$x[n] = x[n + N]$$

- Άρα

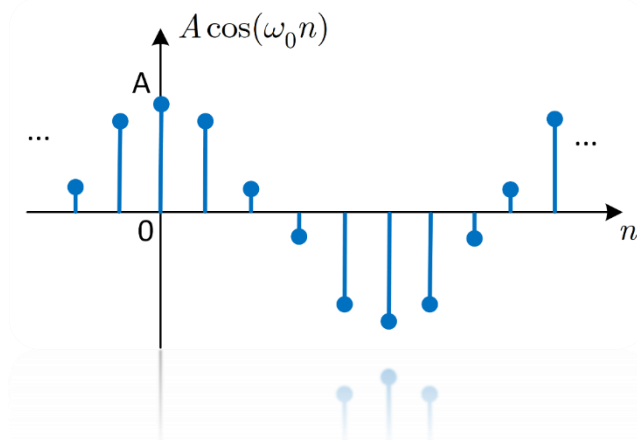
$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 n) &= A \cos(\omega_0 (n + N)) \\ A \cos(\omega_0 n) &= A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N) \end{aligned}$$

- Πρέπει να ισχύει

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

δηλ.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\omega_0}, \quad N, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi k)$$

Τριγωνομετρική

Θέλουμε το μικρότερο  $k$  που να δίνει ακέραιο  $N$ !

- Παραδείγματα:

$$\circ x[n] = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

$$N = \frac{2nk}{\omega_0} = \frac{2nk}{\frac{3n}{4}} = \frac{8nk}{3n} = \frac{8k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

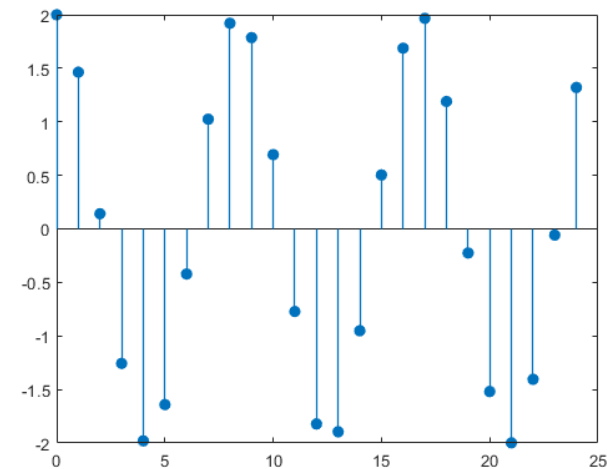
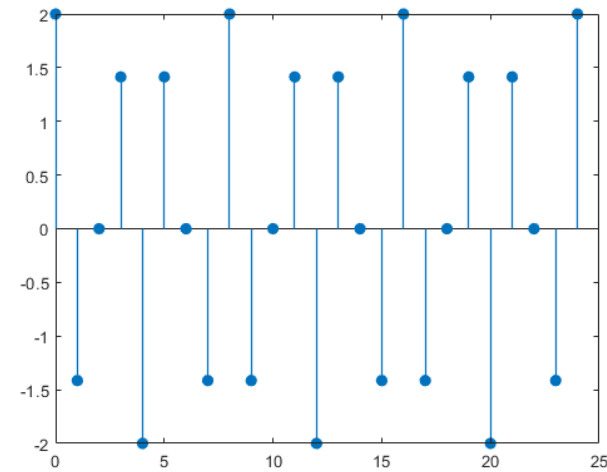
$$\Gamma_{1\alpha} \quad k=3, \quad N = \frac{8 \cdot 3}{3} = 8 \text{ degrees of freedom}$$

$$\circ x[n] = 2 \cos\left(\frac{3}{4}n\right)$$

$$N = \frac{2nk}{\omega_0} = \frac{2nk}{\frac{3}{4}} = \frac{8nk}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Der unäpxen  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow N \in \mathbb{Z}$ ,

Άρα το  $x[n]$  ΔΕΝ είναι ηερικό!



## • Ημίτονα

- Περιοδικότητα στη συχνότητα (!!)
- Υπενθύμιση: Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \operatorname{Im}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

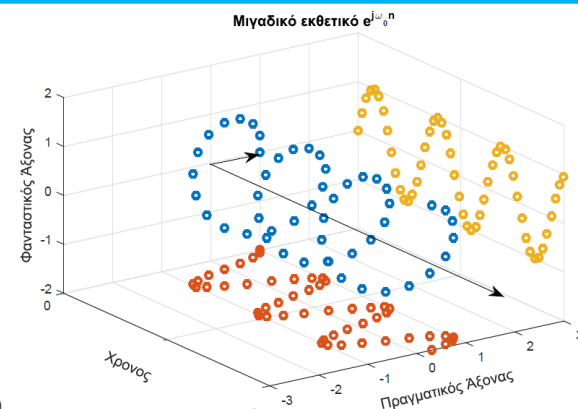
- Στο διακριτό χρόνο, δείτε τι συμβαίνει αν προσθέσουμε μια ποσότητα  $\varphi$  στη μεταβλητή  $\omega_0$

$$e^{j(\omega_0+\varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n}$$

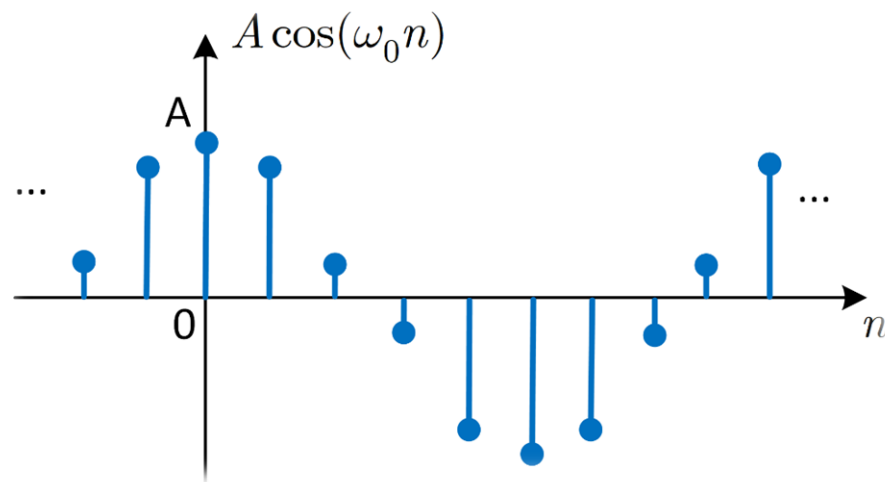
- Αν  $\varphi = 2\pi\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , τότε

$$e^{j(\omega_0+\varphi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi n} = e^{j2\pi\lambda n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \quad (!!!!!)$$

- Άρα τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικά στο χώρο της συχνότητας με περίοδο (στη συχνότητα) ίση με  $2\pi$ !!
  - Το ίδιο ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα (από τη σχέση του Euler)!



- Ημίτονα
- Σύνοψη:



**Περιοδικό?**

Εξαρτάται από το  $\omega_0$ !

**Περιοδικό?**

Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με  $2\pi$

- Η δειγματοληψία μας είχε «προειδοποιήσει»: ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός! Εδώ απλώς το επιβεβαιώσαμε με έμμεσο τρόπο. Θα το δούμε αρκετά αναλυτικά αργότερα, στο μετασχ. Fourier...

## • Ημίτονα

- Αυτή η ιδιότητα της περιοδικότητας στη συχνότητα έχει μερικές ενδιαφέρουσες αντι-διαισθητικές προεκτάσεις
- Θα περίμενε κανείς όσο αυξάνεται η συχνότητα ενός ημιτόνου, τόσο γρηγορότερα αυτό να αλλάζει/ταλαντώνεται
  - Αυτό γνωρίζουμε από το συνεχή χρόνο και από την καθημερινή εμπειρία μας

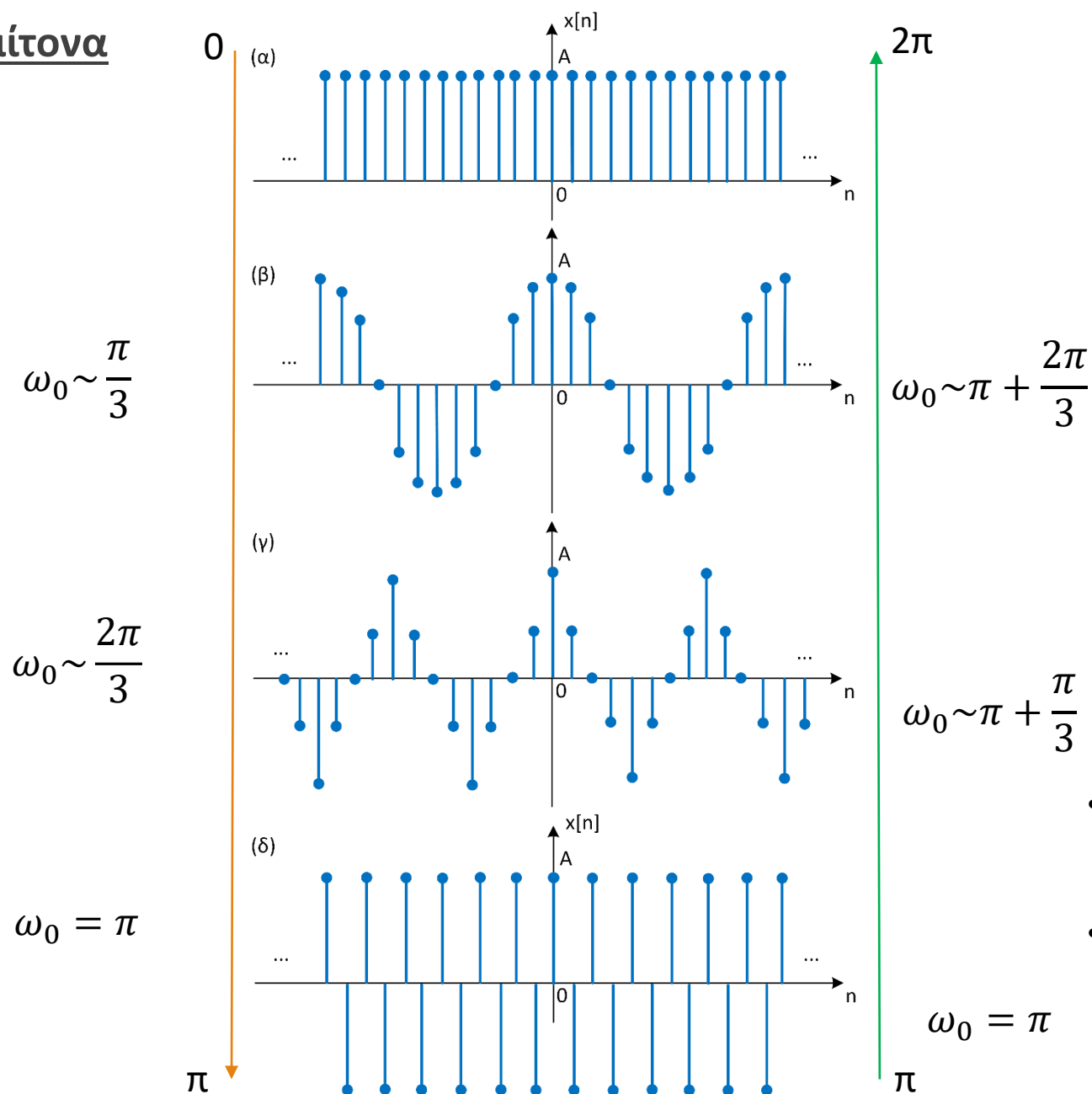
## • Όμως...

$$x_1[n] = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} x_2[n] &= 4 \cos\left(\frac{8\pi}{3}n\right) = 4 \cos\left(2\pi n + \frac{2\pi}{3}n\right) \\ &= 4 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3} (!!!) \end{aligned}$$

- Οι δυο διαφορετικές συχνότητες παράγουν το ίδιο σήμα!!!
  - Άρα εν τέλει είναι ίδιες!

# • Ημίτονα



$$x[n] = A \cos(\omega_0 n)$$

- Στο  $[0, \pi]$ , η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το  $\omega_0$
- Στο  $(\pi, 2\pi]$ , η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται όσο μεγαλώνει το  $\omega_0$ !!
- Συχνότητες γύρω από το  $\omega = 0 \rightarrow$  χαμηλές
- Συχνότητες γύρω από το  $\omega = \pi \rightarrow$  υψηλές

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

