

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Από τη στιγμή που οι κρουστικές αποκρίσεις είναι αιτιατά FIR, όλοι οι πόλοι βρίσκονται στο μηδέν. Έρα αν τα μηδενικά μιας από αυτές είναι εντός μοναδιαίου, τότε αυτή η κρουστική απόκριση αντιστοιχεί σε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης. Τα συστήματα ελάχιστης φάσης έχουν κρουστική απόκριση με την ενέργειά της συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της. Από τις υποψήφιες κρουστικές αποκρίσεις, η (f) και η (g) είναι αυτές με υψηλές τιμές στα, π.χ., δυο πρώτα τους δείγματα. Είναι

$$\sum_{n=0}^1 h_f^2[n] = 604.93 \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^1 h_g^2[n] = 568.81 \quad (2)$$

Οπότε η κρουστική απόκριση με όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου είναι η $h_f[n]$.

Άσκηση 2.

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται εύκολα ως

$$Y(z) = X(z) - 0.65z^{-1}X(z) + 0.1z^{-2}X(z) \iff H(z) = 1 - 0.65z^{-1} + 0.1z^{-2} \quad (3)$$

με μηδενικά στις θέσεις $z = \frac{2}{5}$, $z = \frac{1}{4}$, που είναι εντός μοναδιαίου κύκλου, άρα ναι, το σύστημα είναι ελάχιστης φάσης.

(β) Ο παρονομαστής του $A(z)$ είναι ίσος με $1 - 0.65z^{-1} + 0.1z^{-2}$, άρα το allpass σύστημα θα έχει τα μηδενικά σε συζυγείς αμοιβαίες θέσεις με τους πόλους. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (4)$$

άρα

$$A(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \frac{z^{-1} - \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}} = \frac{0.1 - 0.65z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.65z^{-1} + 0.1z^{-2}} \quad (5)$$

(γ) Η σειριακή μορφή είναι

$$G(z) = A(z)H(z) = \frac{0.1 - 0.65z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.65z^{-1} + 0.1z^{-2}}(1 - 0.65z^{-1} + 0.1z^{-2}) = 0.1 - 0.65z^{-1} + z^{-2} \quad (6)$$

αποτελεί ένα FIR φίλτρο, άρα εξ ορισμού ευσταθές. Η κρουστική του απόκριση δίνεται ως

$$g[n] = 0.1\delta[n] - 0.65\delta[n-1] + \delta[n-2] \quad (7)$$

και είναι αιτιατό. Τα μηδενικά του βρίσκονται τις θέσεις $z = \frac{5}{2}$ και $z = 4$, έξω από το μοναδιαίο κύκλο, οπότε δεν είναι ελάχιστης φάσης.

Άσκηση 3.

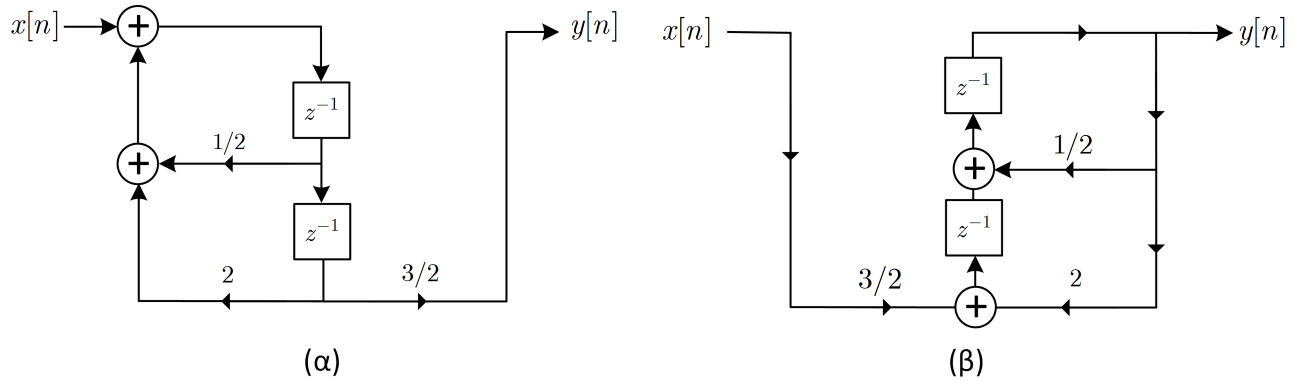
Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$2y[n] - y[n-2] - 4y[n-3] = 3x[n-2] \longleftrightarrow 2Y(z) - z^{-2}Y(z) - 4z^{-3}Y(z) = 3z^{-2}X(z) \quad (8)$$

και τότε

$$Y(z)(2 - z^{-2} - 4z^{-3}) = 3z^{-2}X(z) \iff H(z) = \frac{3z^{-2}}{2 - z^{-2} - 4z^{-3}} = \frac{\frac{3}{2}z^{-2}}{1 - (\frac{1}{2}z^{-2} + 2z^{-3})} \quad (9)$$

Δείτε το Σχήμα 1, όπου στο (α) φαίνεται η DFII και στο (β) η ανάστροφη μορφή.



Σχήμα 1: Σχήμα Ασκήσης 3.

Άσκηση 4.

Το FIR γραμμικής φάσης έχει 64 δείγματα, δηλ. $M = 63$. Οπότε θα έχουμε $N/2$ μοναδικούς συντελεστές του φίλτρου, οπότε θέλουμε $N/2 = 32$ πολλαπλασιασμούς, 32 αθροιστές (έναν για κάθε ζεύγος $x[n-k]$, $x[n-M+k]$ που έχουν τον ίδιο συντελεστή), κι άλλους 31 για να προσθέσουμε όλα αυτά τα αθροίσματα ζευγών. Τέλος, θέλουμε $M = 63$ καθυστερήσεις, αφού το φίλτρο μας έχει ως τελευταία καθυστέρηση την $x[n-M]$. Άρα συνολικά θέλουμε

32 πολλαπλασιαστές, 63 αθροιστές, και 63 καθυστερήσεις.

Θεωρήσαμε ότι στη γενικότερη των περιπτώσεων δεν υπάρχουν άλλοι μηδενικοί συντελεστές του φίλτρου στο $0 \leq n \leq 63$.

Άσκηση 5.

Η εξίσωση διαφορών γράφεται ως

$$y[n] = x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-2] + \frac{1}{4}x[n-4] + x[n-5] \quad (10)$$

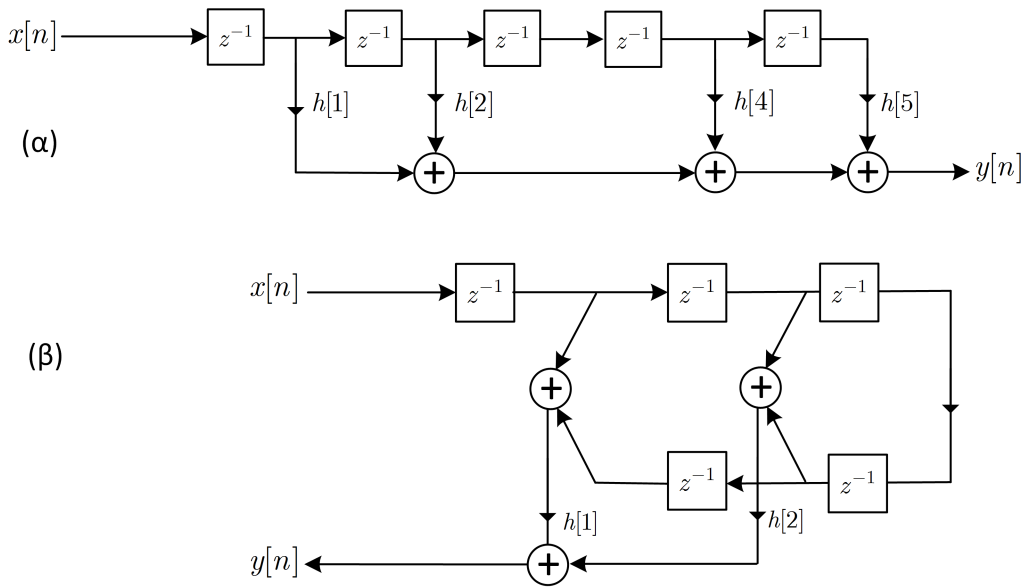
$$= h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + h[4]x[n-4] + h[5]x[n-5] \quad (11)$$

για την Direct Form υλοποίησή και ως

$$y[n] = (x[n-1] + x[n-5]) + \frac{1}{4}(x[n-2] + x[n-4]) \quad (12)$$

$$= h[1](x[n-1] + x[n-5]) + h[2](x[n-2] + x[n-4]) \quad (13)$$

για την οικονομικότερη υλοποίηση. Δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Σχήμα Ασκήσης 5.

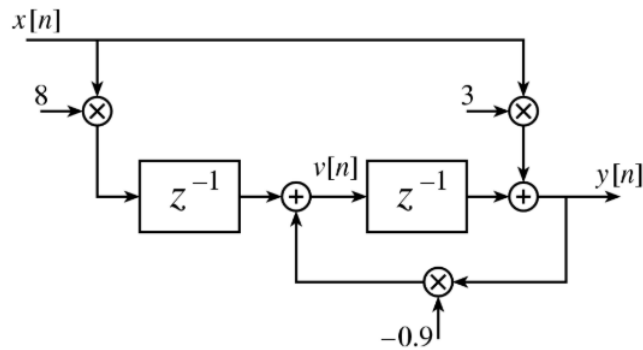
Άσκηση 6.

Το σχήμα 3 μας δίνει την ενδιάμεση μεταβλητή $v[n]$, οπότε

$$v[n] = 8x[n-1] - 0.9y[n] \quad (14)$$

$$y[n] = 3x[n] + v[n-1] \quad (15)$$

και στο χώρο του Z,



Σχήμα 3: Σχήμα Ασκήσης 6.

$$V(z) = 8z^{-1}X(z) - 0.9Y(z) \quad (16)$$

$$Y(z) = 3X(z) + z^{-1}V(z) \quad (17)$$

και με αντικατάσταση

$$Y(z) = 3X(z) + z^{-1}(8z^{-1}X(z) - 0.9Y(z)) \quad (18)$$

$$= 3X(z) + 8z^{-2}X(z) - 0.9z^{-1}Y(z) \quad (19)$$

$$(1 + 0.9z^{-1})Y(z) = (3 + 8z^{-2})X(z) \quad (20)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 + 8z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1}} \quad (21)$$