

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 19^Η

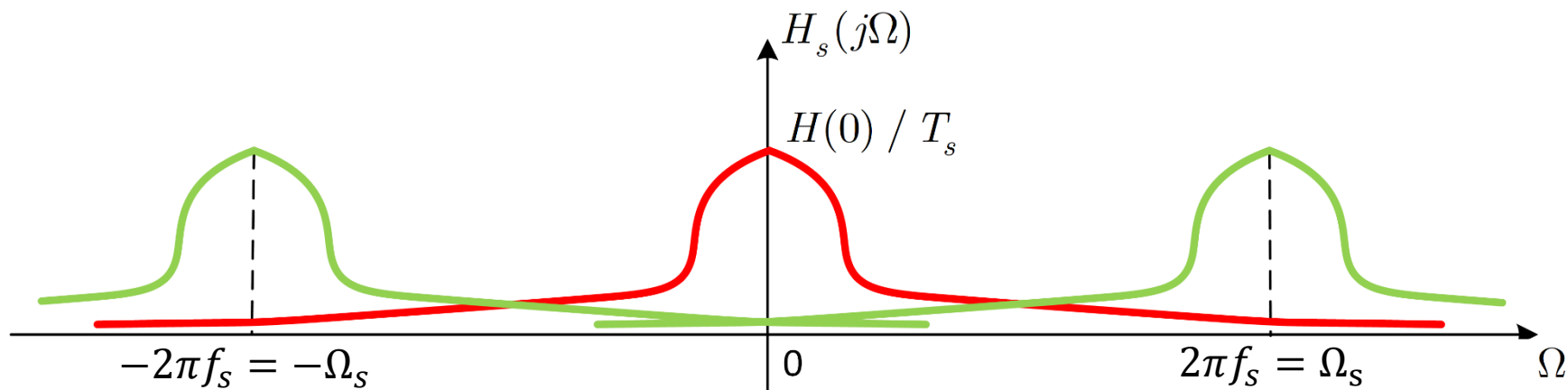
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Έχουμε ήδη δει μια μέθοδο σχεδίασης ψηφιακών-από-αναλογικά φίλτρα
 - Τη Μέθοδο Impulse Invariance
- Ποιο είναι το βασικό πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο?
- Ότι το αναλογικό φίλτρο **δεν** είναι band-limited
 - Δεν «ζει» μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων γύρω από το μηδέν
- Θυμηθείτε την ιδιότητα της κλιμάκωσης στο χρόνο για το μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου
 - «Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, τότε είναι άπειρης διάρκειας στη συχνότητα, και το αντίστροφο»
- Η ιδιότητα αυτή μας λέει ότι ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα στο συνεχή χρόνο (όπως είναι όλα τα σήματα «εκεί έξω» 😊) θα έχει άπειρου πλήθους μη μηδενικές συχνότητες, δηλ. ΔΕ θα είναι band-limited
- Άρα κατά τη δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης, θα υπάρχει πάντα το φαινόμενο του aliasing!
 - Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος ανά $k\Omega_s$ θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!



- Η τεχνική που θα συζητήσουμε στη συνέχεια αποφεύγει το πρόβλημα του aliasing χρησιμοποιώντας έναν αλγεβρικό μετασχηματισμό μεταξύ των μεταβλητών s και z
- Τι ακριβώς κάνει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προσπαθεί να «χωρέσει» τον άξονα $-\infty \leq \Omega \leq +\infty$ στον άξονα $-\pi \leq \omega \leq \pi$!
- Ως εκ τούτου, η αντιστοίχιση των μεταβλητών $\Omega \rightarrow \omega$ **δεν** είναι γραμμική, όπως ήταν στην προηγούμενη μέθοδο του Impulse Invariance ($\Omega = \frac{\omega}{T_d}$)
- Άρα η τεχνική αυτή, που ονομάζεται **Bilinear Transformation**, είναι κατάλληλη όταν αυτή η «αναδίπλωση» (warping) του άξονα «αναλογικής» συχνότητας είναι αποδεκτή

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται ως (δείτε το παράρτημα για λεπτομέρειες)

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

δηλ.

$$H(z) = H_c \left[\frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right]$$

- Κι εδώ έχουμε την παράμετρο T_d , όπως και στην προηγούμενη μέθοδο
- Κι εδώ όμως μπορούμε να δείξουμε ότι η παράμετρος αυτή δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση

- Θα την κρατήσουμε για λόγους πληρότητας

- Λύνοντας ως προς z :

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right)s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right) s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right) s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma T_d}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sigma T_d}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)^2}}$$

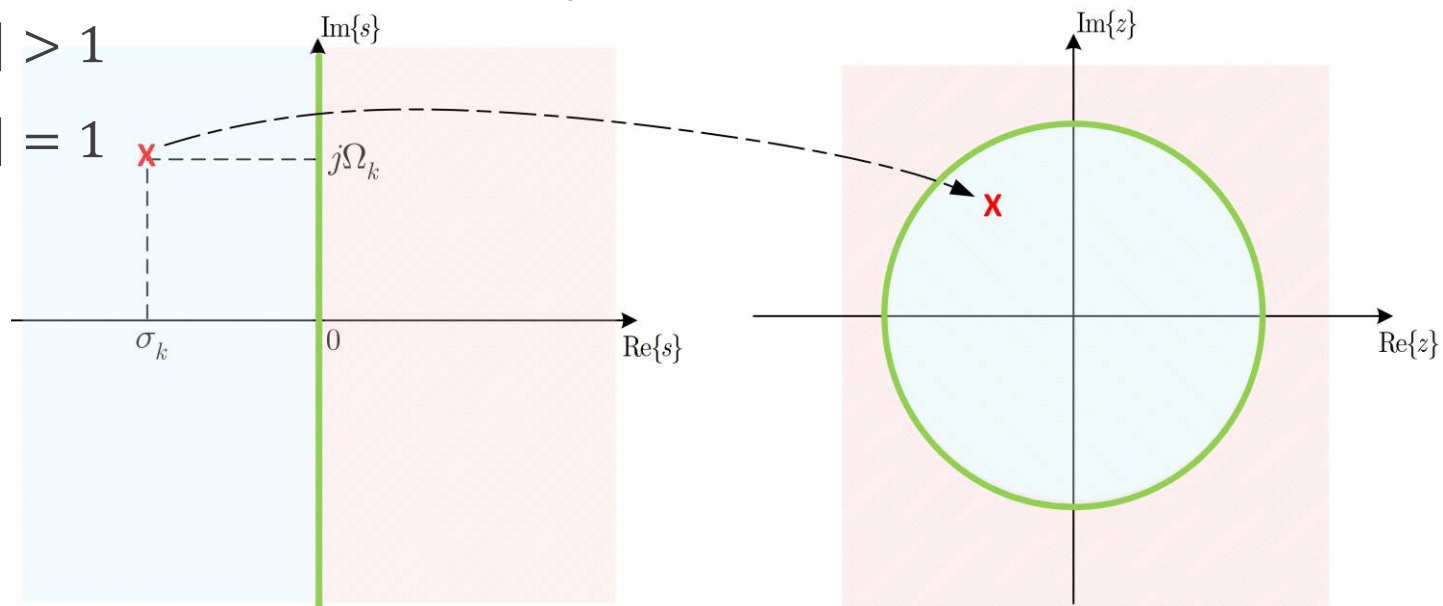
• Παρατηρήστε ότι:

Αν $\sigma < 0$, τότε $|z| < 1$

Αν $\sigma > 0$, τότε $|z| > 1$

Αν $\sigma = 0$, τότε $|z| = 1$

Ίδια «ιδέα» με την αντιστοίχιση της προηγούμενης μεθόδου, Impulse Invariance (όχι σαν αλγεβρική αντιστοίχιση όμως)



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε πως μπορούμε να συσχετίσουμε τις μεταβλητές Ω , ω

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \Rightarrow j\Omega = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = \frac{2j}{T_d} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

- Οπότε

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

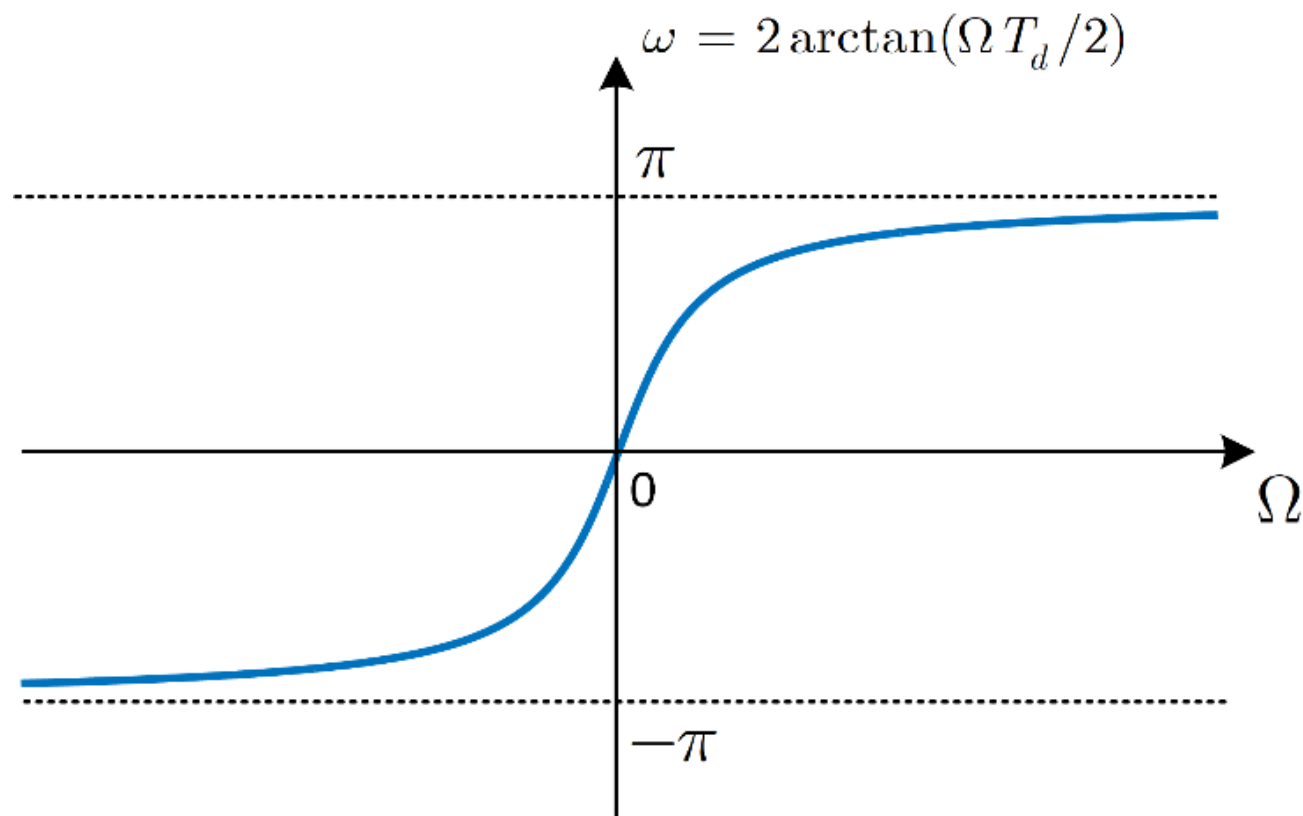
ή

$$\omega = 2 \arctan \left(\frac{\Omega T_d}{2} \right)$$

- Πώς μοιάζει αυτή η μη γραμμική αντιστοίχιση των δυο συχνοτήτων?
- Πώς αντιστοιχίζεται η «αναλογική» απόκριση πλάτους στην «ψηφιακή»?

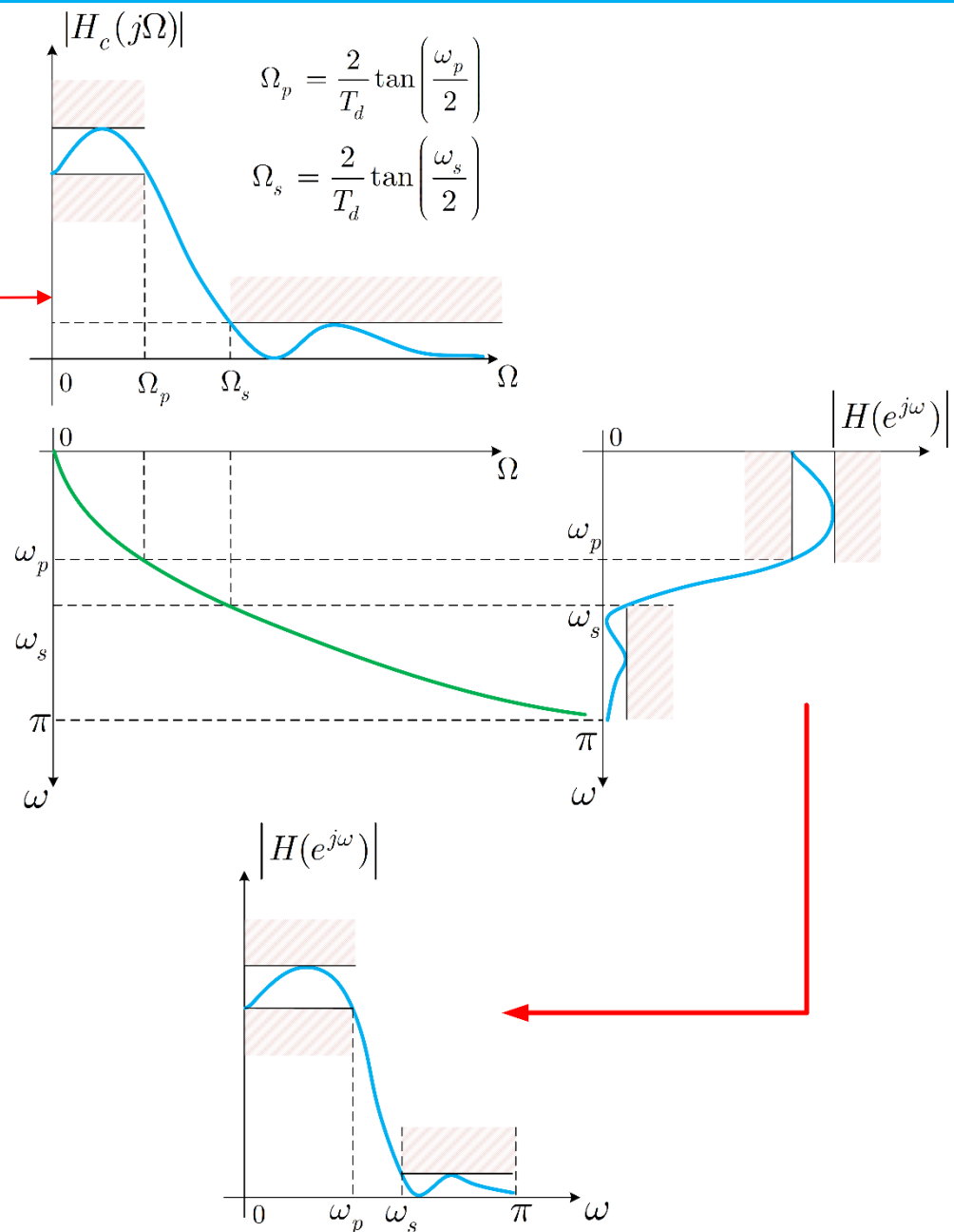
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$



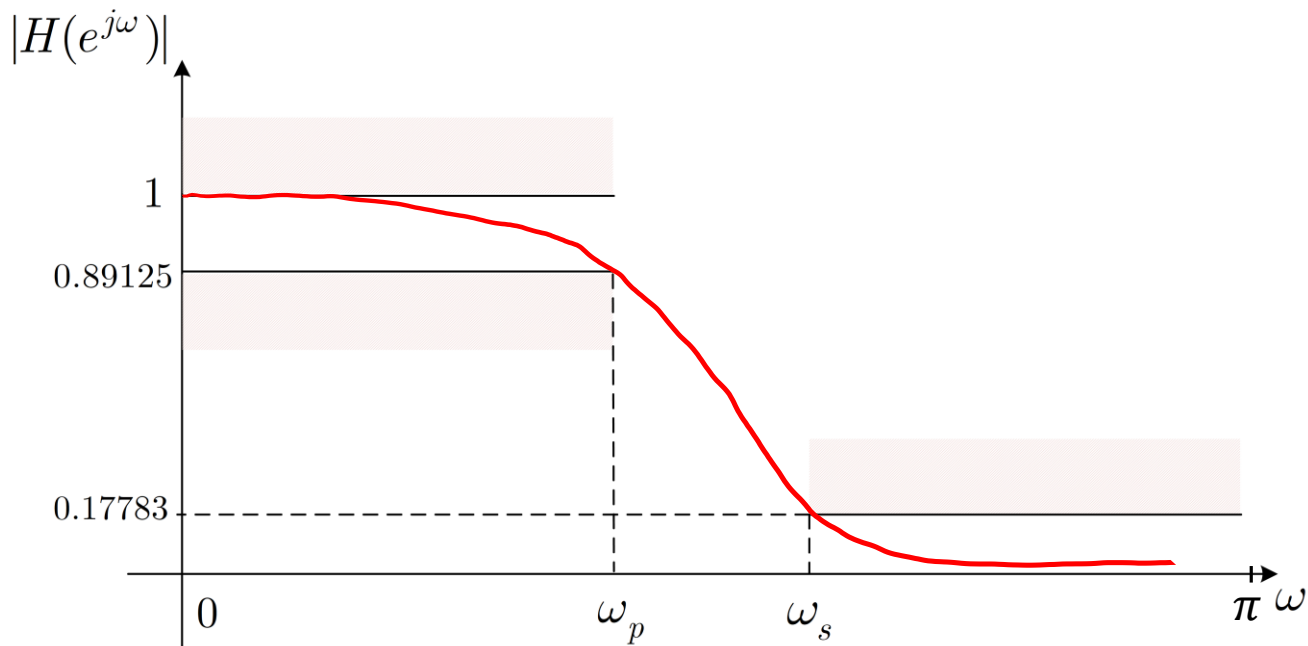
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

Προδιαγραφές ω_p, ω_s στο
διακριτό χρόνο
μετατρέπονται στο **συνεχή**
χρόνο



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε ένα παράδειγμα σχεδίασης (ίδιο με την προηγ. μέθοδο)



- Ας ζητήσουμε $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$ και ας θεωρήσουμε $T_d = 1$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Μετασχηματίζουμε τις προδιαγραφές μας από $\omega \rightarrow \Omega = 2 \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$:

$$0.89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 : 0 \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$0.17783 \geq |H(j\Omega)| : 2 \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

- Θέλουμε ξανά μια εξίσωση που να δέχεται τις προδιαγραφές μας!
 - Ας επιλέξουμε ξανά το φίλτρο Butterworth

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Εφαρμόζουμε προδιαγραφές:

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $N = 5.305 \rightarrow N = 6, \Omega_c = 0.766$

- Για να βρούμε ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα συνεχούς χρόνου, έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(j\Omega)H(-j\Omega) \Rightarrow |H(s)|^2 \Big|_{s=j\Omega} = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

- Οι πόλοι του συστήματος

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.766}\right)^{12}} = \frac{(j0.766)^{12}}{s^{12} + (j0.766)^{12}}$$

δίνονται ως

$$s_k = 0.766e^{j\frac{\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, \dots, 11$$

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους οι οποίοι μας δίνουν ένα ευσταθές, πραγματικό, και αιτιατό σύστημα $H(s)$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

• Επιλέγω τους πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο

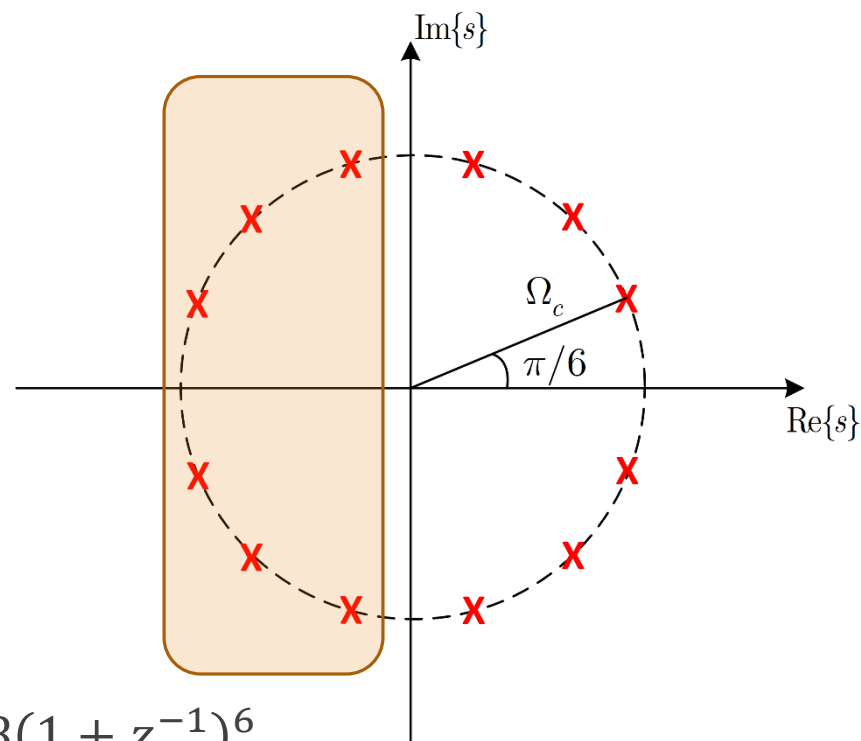
• Τότε το σύστημά μας θα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{0.766^6}{(s^2 + 0.39s + 0.58)(s^2 + 1.08s + 0.58)(s^2 + 1.48s + 0.58)}$$

• Ο Bilinear Transformation δίνει:

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow s = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

• Το σύστημά μας στο χώρο του μετασχ. Z θα είναι:



$$H(z) = \frac{0.000738(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.26z^{-1} + 0.72z^{-2})(1 - 1.01z^{-1} + 0.35z^{-2})(1 - 0.90z^{-1} + 0.21z^{-2})}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Υπάρχουν πολλές εξισώσεις (φίλτρα) στις οποίες μπορούμε να θέσουμε τις προδιαγραφές μας

• Chebyshev (I, II)

• Elliptic

• Butterworth

• Bessel

• Optimum "L"

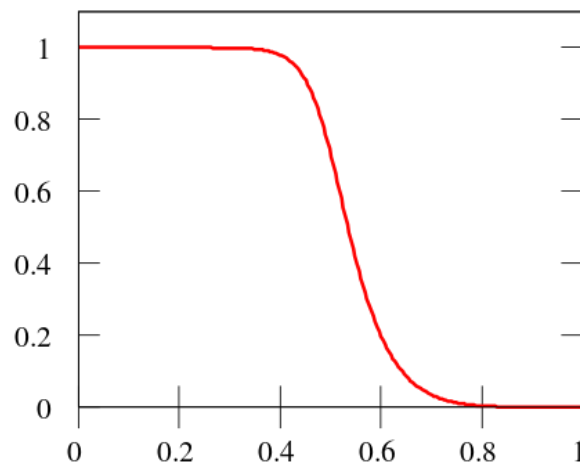
• Gaussian

• Hourglass

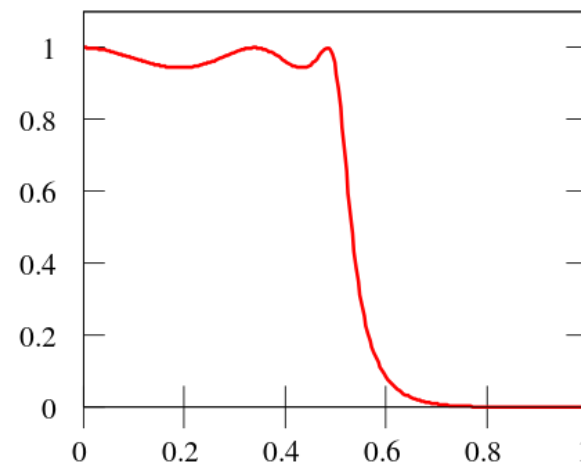
• Raised-cosine

• και πολλά άλλα! 😊

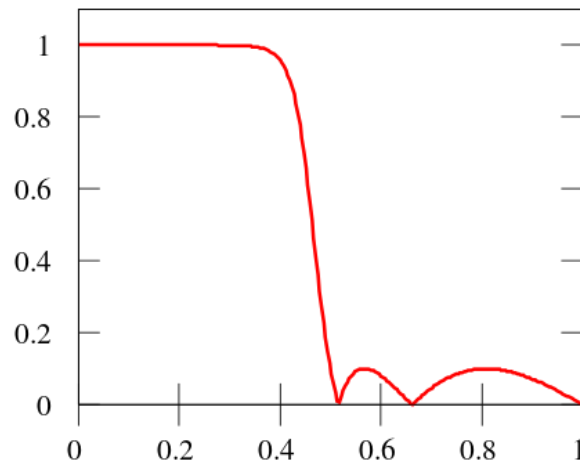
Butterworth



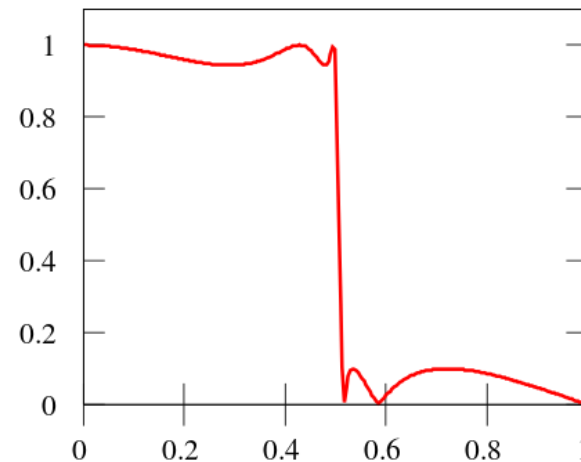
Chebyshev type 1



Chebyshev type 2



Elliptic



• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων - Σύνοψη

- Έχουμε δει ήδη δυο μεθόδους κατασκευής ψηφιακών φίλτρων IIR μέσω του πεδίου του συνεχούς χρόνου

- ... και του μετασχ. Laplace

• Μέθοδος Impulse Invariance

- a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς χρόνου

- Γραμμική αντιστοιχία συχνότητας Ω σε ω

- Η διαδικασία αυτή αντιστοιχίζει κάθε πόλο s_k στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο $e^{s_k T_d}$ στο χώρο του μετασχ. Z

• Μέθοδος Bilinear Transformation

- a.k.a «συμπίεση» του άξονα $0 \leq \Omega \leq +\infty$ στο $0 \leq \omega \leq \pi$!!

- Μη γραμμική αντιστοιχία της αναλογικής με την ψηφιακή συχνότητα

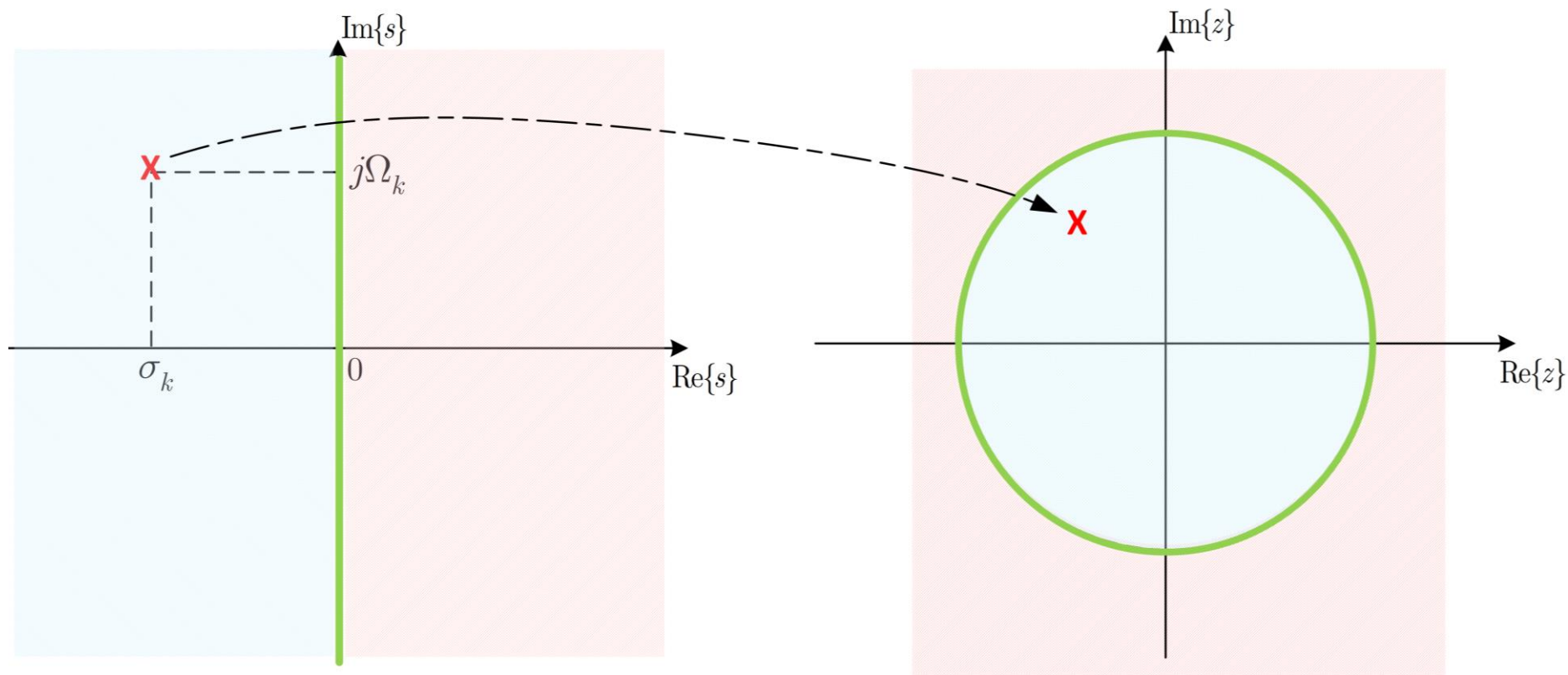
- Η διαδικασία αντιστοιχίζει κάθε πόλο s_k στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο

$$\frac{1 + \frac{T_d s_k}{2}}{1 - \frac{T_d s_k}{2}}$$

στο χώρο του μετασχ. Z

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Σύνοψη

- Και οι δυο μέθοδοι αντιστοιχίζουν πόλους από το μιγαδικό επίπεδο s στο μιγαδικό επίπεδο z



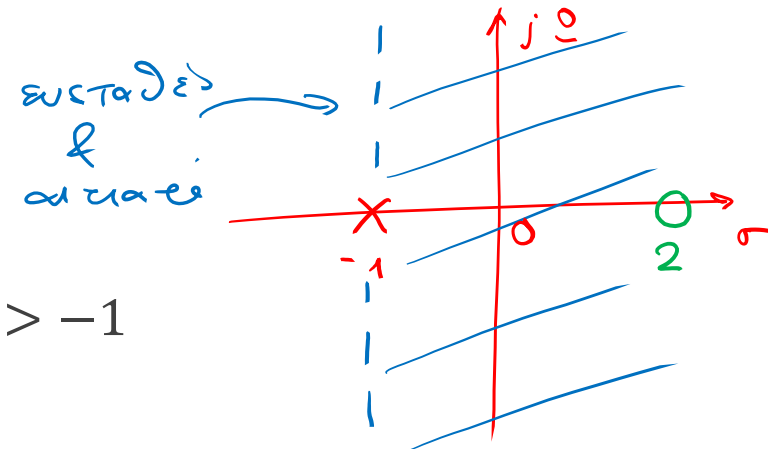
- Μήπως αντιστοιχίζονται με παρόμοιο τρόπο και τα μηδενικά?
- Γενικά, πως εφαρμόζονται οι μέθοδοι για ένα τυχαίο σύστημα στο χώρο του s ?

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα

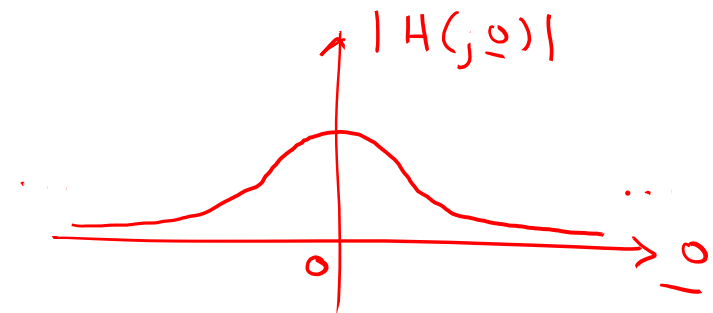
$$H(s) = \frac{s - 2}{s + 1}, \Re\{s\} > -1$$



Εφαρμόστε τις μεθόδους που μάθατε για να βρείτε το μετασχ. Z ενός φίλτρου διακριτού χρόνου που το υλοποιεί

• Μηδενικό : $s = 2$

• Πόλος : $s = -1$



1^η μέθοδος, Impulse Invariance :

$$s_k \rightarrow e^{s_k}$$

$$\frac{A}{s - s_k} \rightarrow \frac{A_k}{1 - e^{s_k} z^{-1}}$$

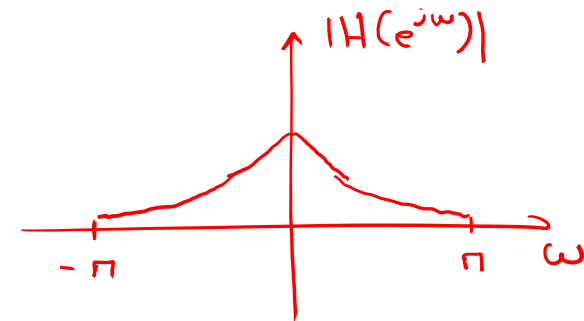
$$\begin{array}{r|l} s - 2 & s + 1 \\ - (s + 1) & 1 \\ \hline & -3 \end{array}$$

$$\text{Άρα } H(s) = 1 + \frac{-3}{s + 1}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{s-2}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$



$$H(s) = 1 - \frac{3}{s+1}$$

$$\frac{A}{s-s_k} \mapsto \frac{A}{1-e^{s_k}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z) = 1 - \frac{3}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

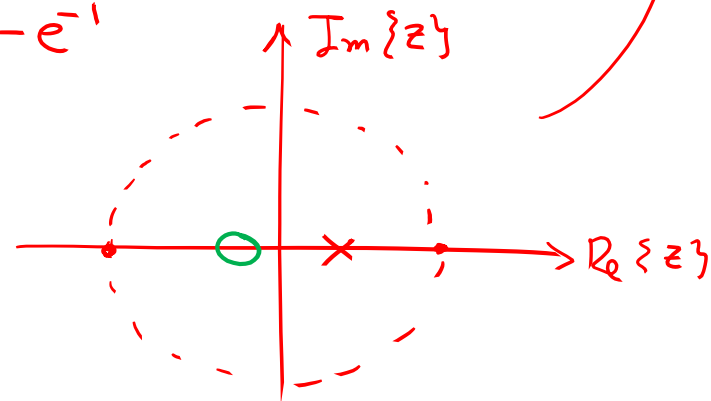
$$= \frac{1-e^{-1}z^{-1}-3}{1-e^{-1}z^{-1}} = \frac{-2-e^{-1}z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

$$= \frac{-2z-e^{-1}}{z-e^{-1}}$$

Μηδενικά: $-2z - e^{-1} = 0$

$$z = -\frac{1}{2e}$$

Πόλος: $z - e^{-1} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{e}$



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{s-2}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$

2^η μέθοδος, Bilinear Transformation:

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \xrightarrow{T_d=1} s = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \text{ με } H(s) = 1 - \frac{3}{s+1}$$

$$\begin{aligned} \text{δηλ. } H(z) &= 1 - \frac{3}{2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = 1 - \frac{3}{\frac{2-2z^{-1}+1+z^{-1}}{1+z^{-1}}} = 1 - \frac{3}{\frac{3-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= 1 - \frac{3+3z^{-1}}{3-z^{-1}} = \frac{3-z^{-1}}{3-z^{-1}} - \frac{3+3z^{-1}}{3-z^{-1}} = \frac{-4z^{-1}}{3-z^{-1}} \end{aligned}$$

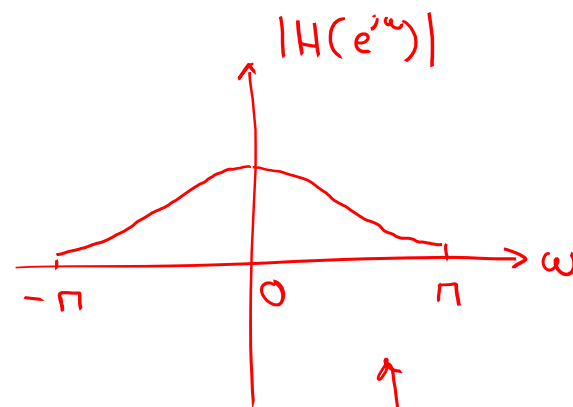
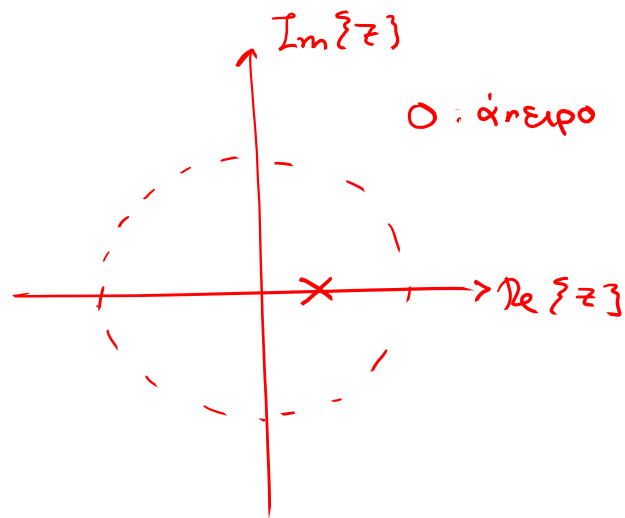
$$\text{άρα } H(z) = \frac{-4}{3z-1}, \text{ πόλοι: } 3z-1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{3}$$

μηδενικά: $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 0$, στο άπειρο

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{s - 2}{s + 1}, \Re\{s\} > -1$$

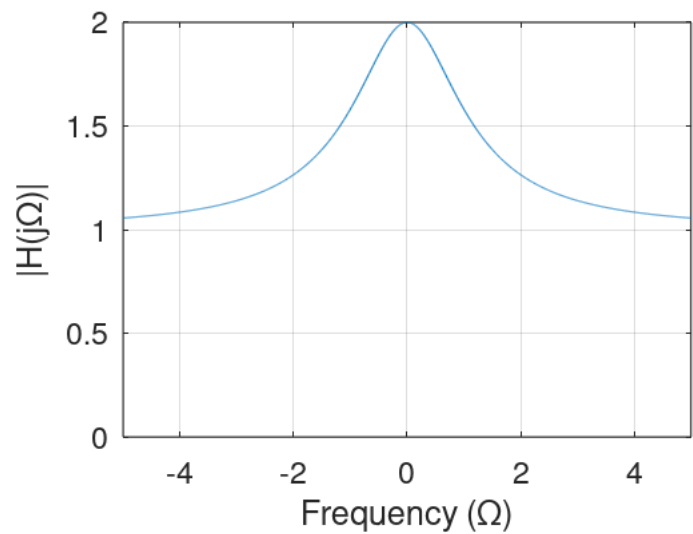


$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{-4e^{-j\omega}}{3 - e^{-j\omega}} \right|$$

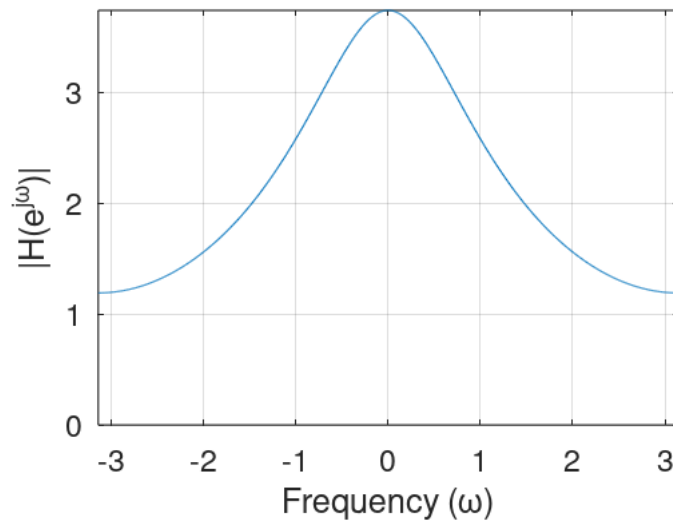
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Παράδειγμα:

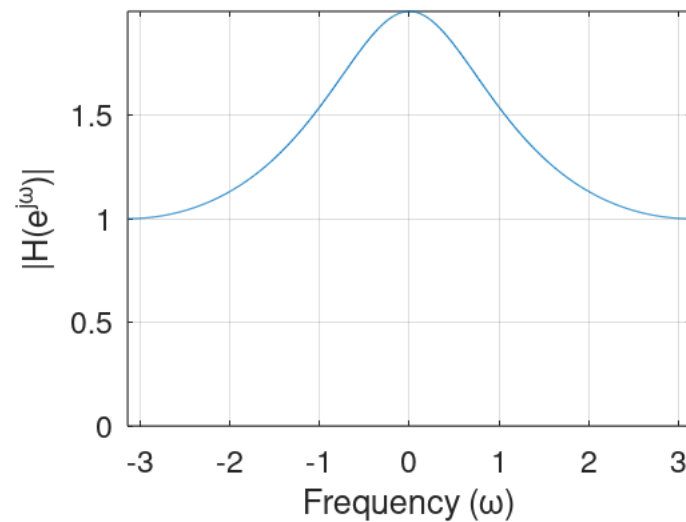
$$H(s) = \frac{s - 2}{s + 1}, \Re\{s\} > -1$$



II ↗

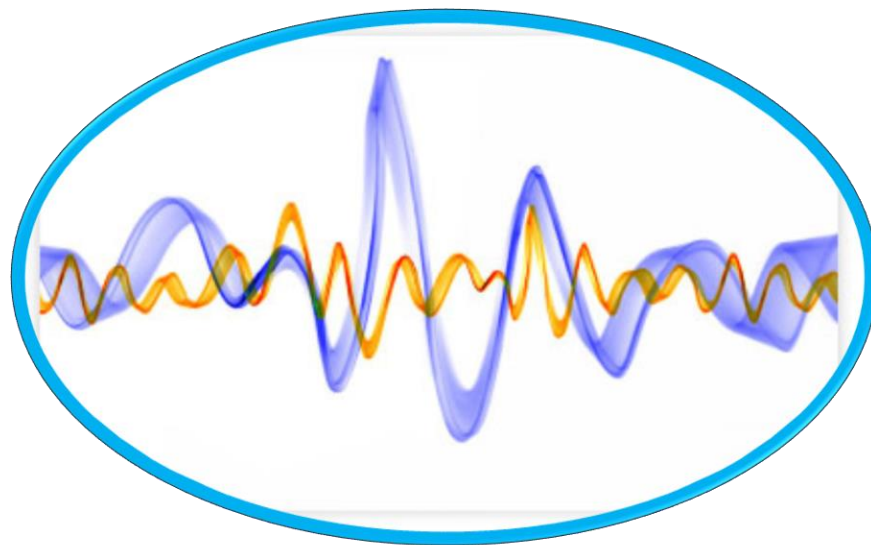


B.T. ↘



Παράρτημα

(σχετικά με την προέλευση του
bilinear transformation)



- **Κανόνας του Τραπεζίου**

- Έστω ο γνωστός μας ολοκληρωτής από το πεδίο του συνεχούς χρόνου

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

- Ο μετασχ. Laplace του θα είναι

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s}$$

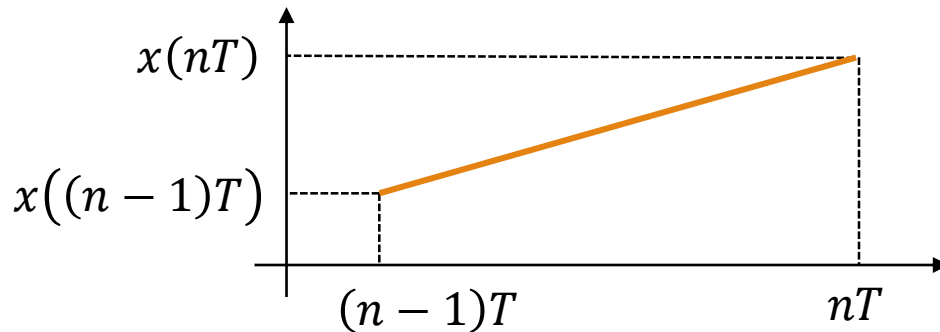
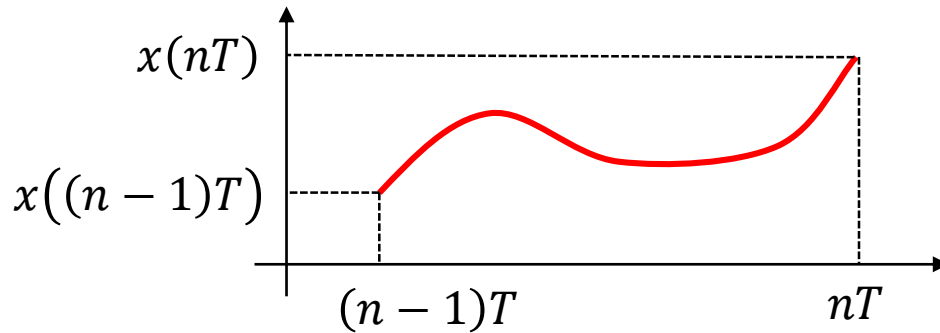
- Πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε το σύστημα αυτό με ένα σύστημα διακριτού χρόνου?
- Δειγματοληπτούμε τη σχέση εισόδου-εξόδου με περίοδο T

$$\begin{aligned} y(nT) &= \int_0^{nT} x(\tau) d\tau = \int_0^{(n-1)T} x(\tau) d\tau + \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau) d\tau \\ &= y((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

- Κανόνας του Τραπεζίου

$$y(nT) = y((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau) d\tau$$

- Πώς μπορούμε να διακριτοποιήσουμε το **δεύτερο** όρο?



Κανόνας τραπεζίου: προσεγγίζουμε το εμβαδό που περιγράφει το **ολοκλήρωμα** μέσω του εμβαδού τραπεζίου που δημιουργείται από την **ευθεία γραμμή**

$$\int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau) d\tau \approx \frac{T}{2} (x(nT) + x((n-1)T))$$

- **Κανόνας του Τραπεζίου**

- Άρα συνολικά

$$y(nT) = y((n-1)T) + \frac{T}{2}(x(nT) + x((n-1)T))$$

- Αφαιρώντας την ποσότητα T και γράφοντας όπως συνήθως κάνουμε, έχουμε

$$y[n] = y[n-1] + \frac{T}{2}(x[n] + x[n-1])$$

- Στο χώρο του μετασχ. Z , η παραπάνω σχέση γίνεται

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2}(X(z) + z^{-1}X(z))$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T}{2}X(z)(1 + z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

- Άρα αυτό είναι το σύστημα διακριτού χρόνου που προσεγγίζει τον ολοκληρωτή συνεχούς χρόνου!

- Κανόνας του Τραπεζίου

- Άρα συγκρίνοντας

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

παίρνουμε την αντιστοίχιση

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

ή αλλιώς

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

