

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 18^Η

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

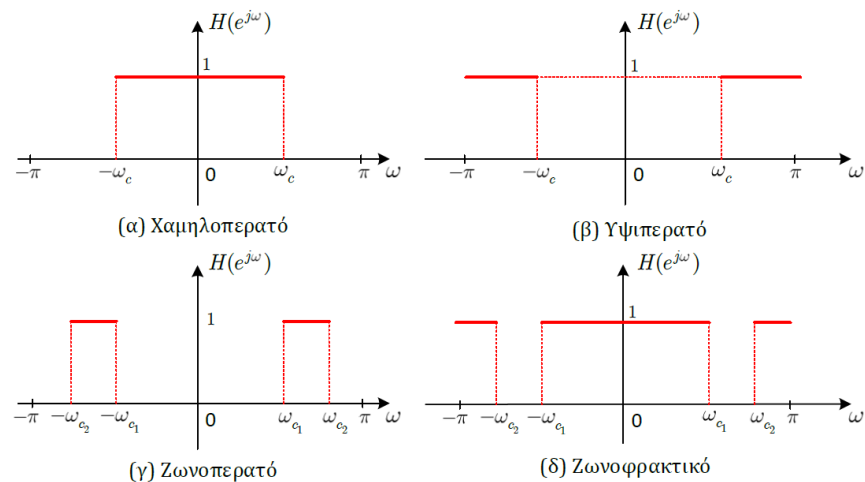
• Τα φίλτρα είναι μια πολύ σημαντική κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων

• Έχουμε ήδη δει τα περίφημα **ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**

- Περνούν συγκεκριμένες συχνότητες στην έξοδό τους
- Αποκόπτουν κάποιες άλλες

• Θα δώσουμε έμφαση στη σχεδίαση **αιτιατών** φίλτρων επιλογής συχνοτήτων (μη ιδανικών)

- Τα συμπεράσματα γενικεύονται και για μη αιτιατά φίλτρα



• Η σχεδίαση περιλαμβάνει τρία στάδια

1. Προδιαγραφές του συστήματος
2. Προσέγγιση προδιαγραφών από ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
3. Πραγματοποίηση του συστήματος σε υλικό ή λογισμικό

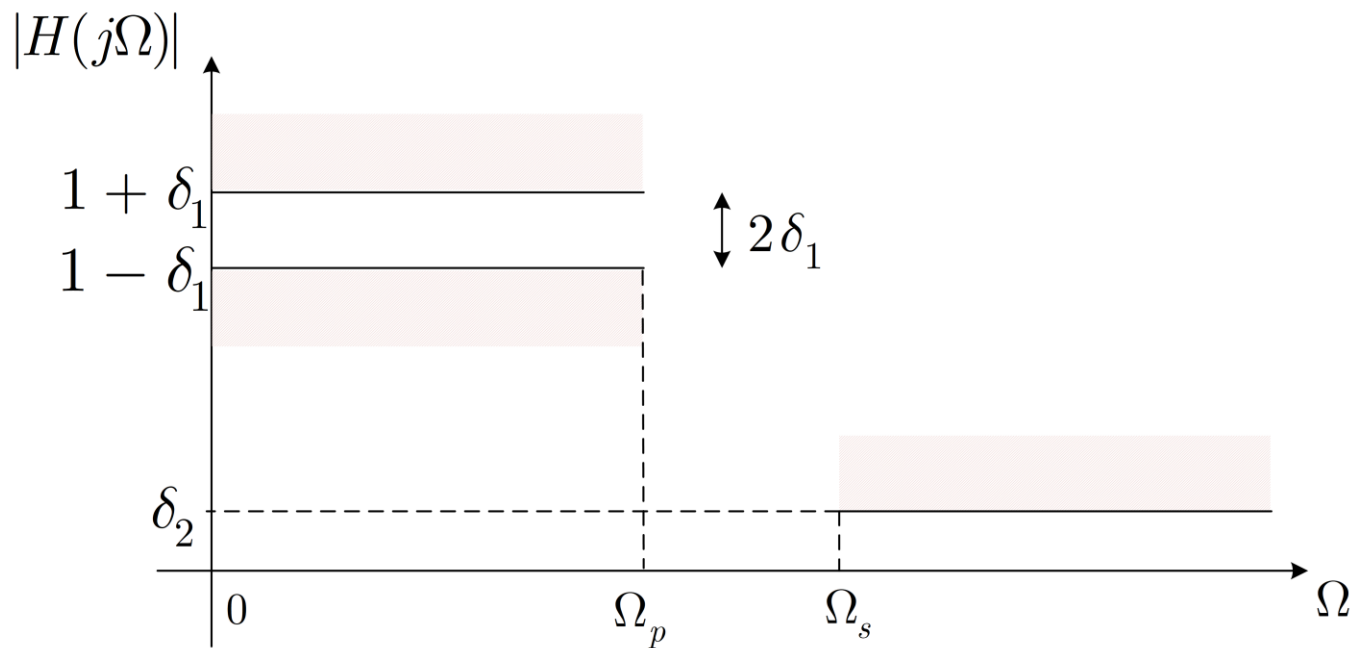
• Θα δώσουμε βάρος στο 1^ο και στο 2^ο βήμα

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Επειδή ο «αναλογικός» κόσμος προηγήθηκε αρκετά του «ψηφιακού» 😊 , υπάρχει συσσωρευμένη τεχνογνωσία για τη σχεδίαση αναλογικών φίλτρων...
 - ... με την έννοια ότι αφορούν συστήματα συνεχούς χρόνου
- Μια ιδέα είναι να εκμεταλλευτούμε την τεχνογνωσία αυτή και να προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε ένα αναλογικό φίλτρο σε «ψηφιακό» (διακριτού χρόνου)
- Ας δούμε λοιπόν πρώτα πως θα γινόταν αυτή η διαδικασία στο συνεχή χρόνο
 - Δηλ. πώς θα σχεδιάζαμε ένα φίλτρο στο συνεχή χρόνο
- Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας τις προδιαγραφές του στο χώρο της συχνότητας
- Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε μια γενική συνάρτηση στο χώρο της συχνότητας που τις ικανοποιεί
 - Θα λύσουμε κάποια συστήματα για να συγκεκριμενοποιήσουμε τη συνάρτηση αυτή
- Τέλος θα μετατρέψουμε το σύστημα στο χώρο του Laplace (! ∞)

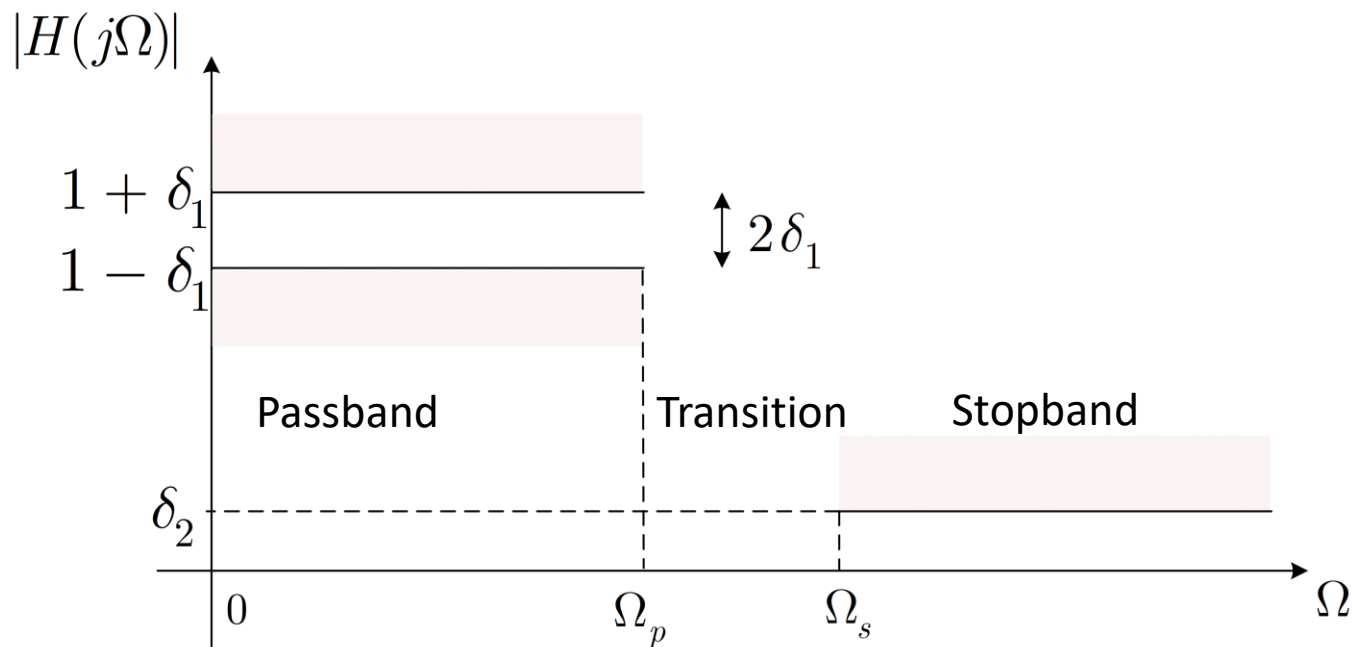
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο στο συνεχή χρόνο
- Θα συμβολίσουμε τη συχνότητα που αντιστοιχεί στο συνεχή χρόνο με $\Omega = 2\pi f$
- Ξεκινάμε με τις προδιαγραφές του φίλτρου



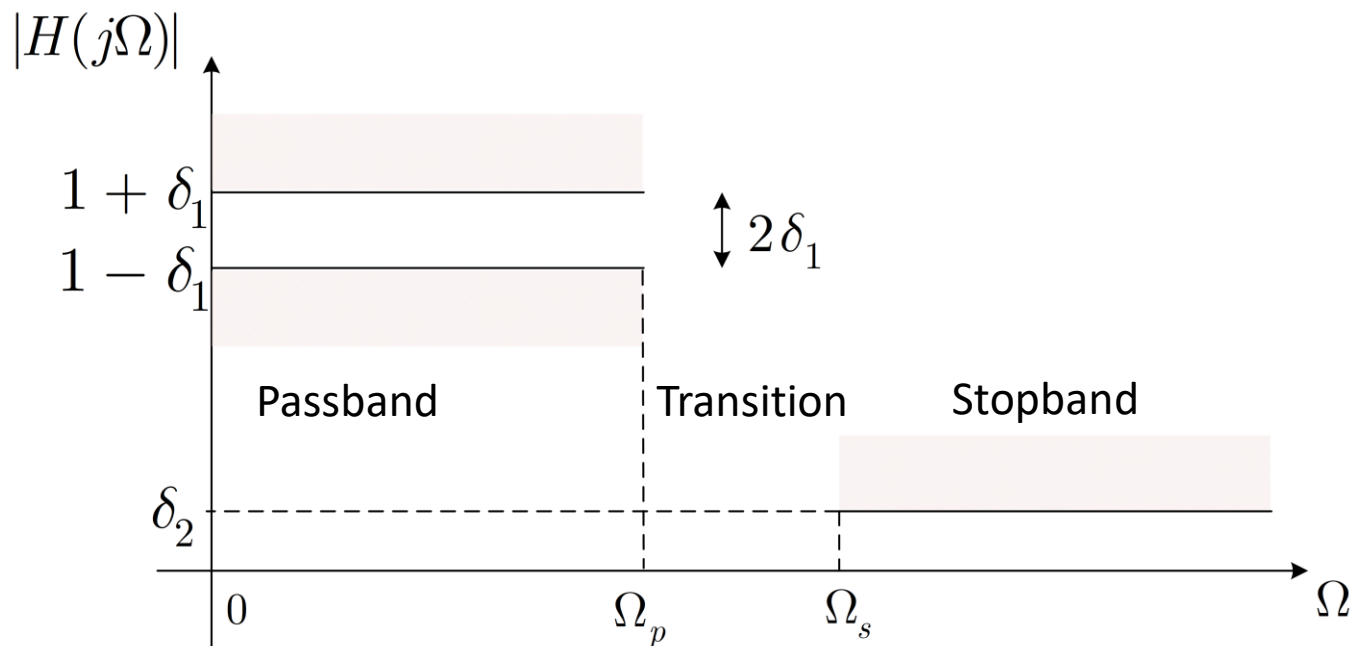
- Ω_p : pass-band cutoff frequency
- Ω_s : stop-band cutoff frequency

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



- Ω_p : pass-band cutoff frequency
- Ω_s : stop-band cutoff frequency
- Η ζώνη μεταξύ Ω_p και Ω_s ονομάζεται μεταβατική ζώνη (transition band)
- δ_1, δ_2 είναι κι αυτά προδιαγραφές του φίλτρου
- Παρατηρήστε ότι αφήνουμε «περιθώριο» δ_1 εκατέρωθεν της μονάδας γιατί δε γίνεται να κατασκευάσουμε ιδανικά φίλτρα (όμοια για το δ_2)

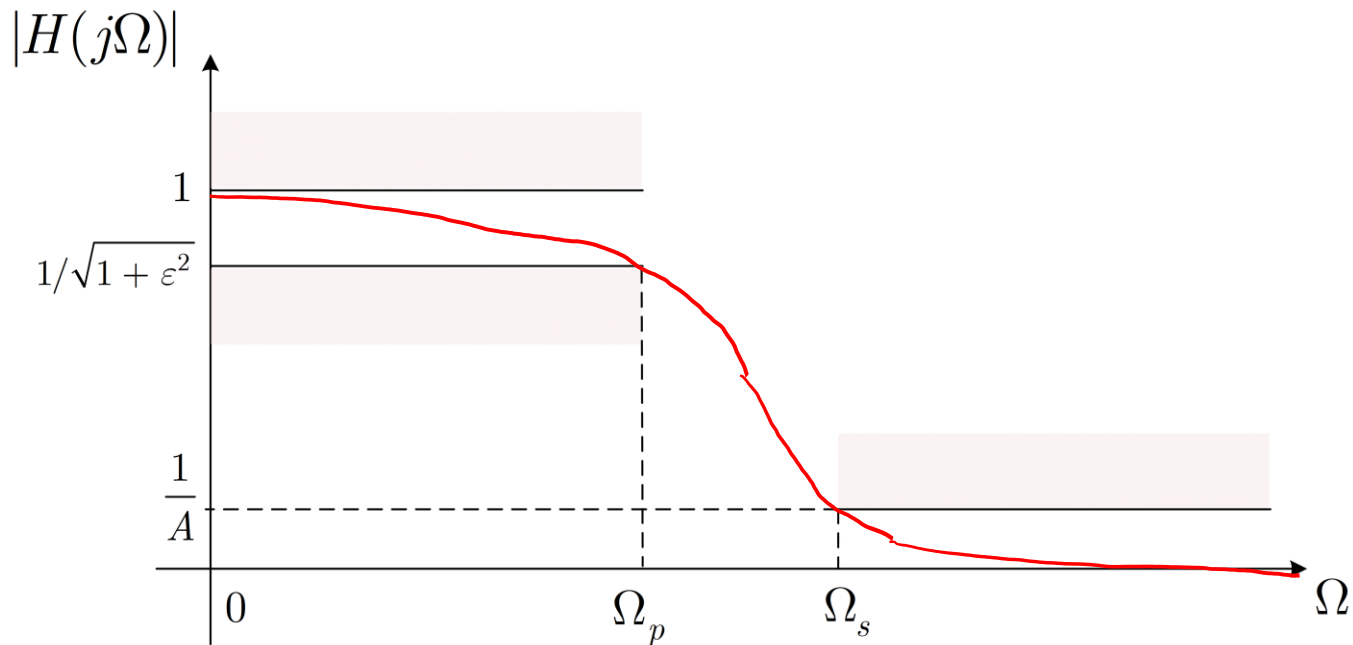
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



- Έστω ότι $\delta_1 = 0.01$, άρα $1 + \delta_1 = 1.01$ και $1 - \delta_1 = 0.99$
- Επίσης, έστω ότι $\delta_2 = 10^{-3}$
- Αυτές είναι οι προδιαγραφές μας, μαζί με επιλογή για τις Ω_p, Ω_s
- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε μια λίγο διαφορετική σημειογραφία για τις προδιαγραφές

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε μια λίγο διαφορετική μορφή προδιαγραφών



- Θέλουμε το φίλτρο μας να ξεκινά από τη μονάδα για $\Omega = 0$ και να πέφτει πολύ λίγο ως τη pass-band cutoff frequency
- Στη stop-band cutoff frequency, η απόκριση πλάτους θέλουμε να έχει (μικρή) τιμή $\frac{1}{A}$
- Μπορούμε να ψάξουμε για μια απόκριση πλάτους (συνάρτηση) που να είναι μονότονη
- Ζητάμε λοιπόν μια εξίσωση που να μπορεί να δεχθεί τις προδιαγραφές μας! 😊

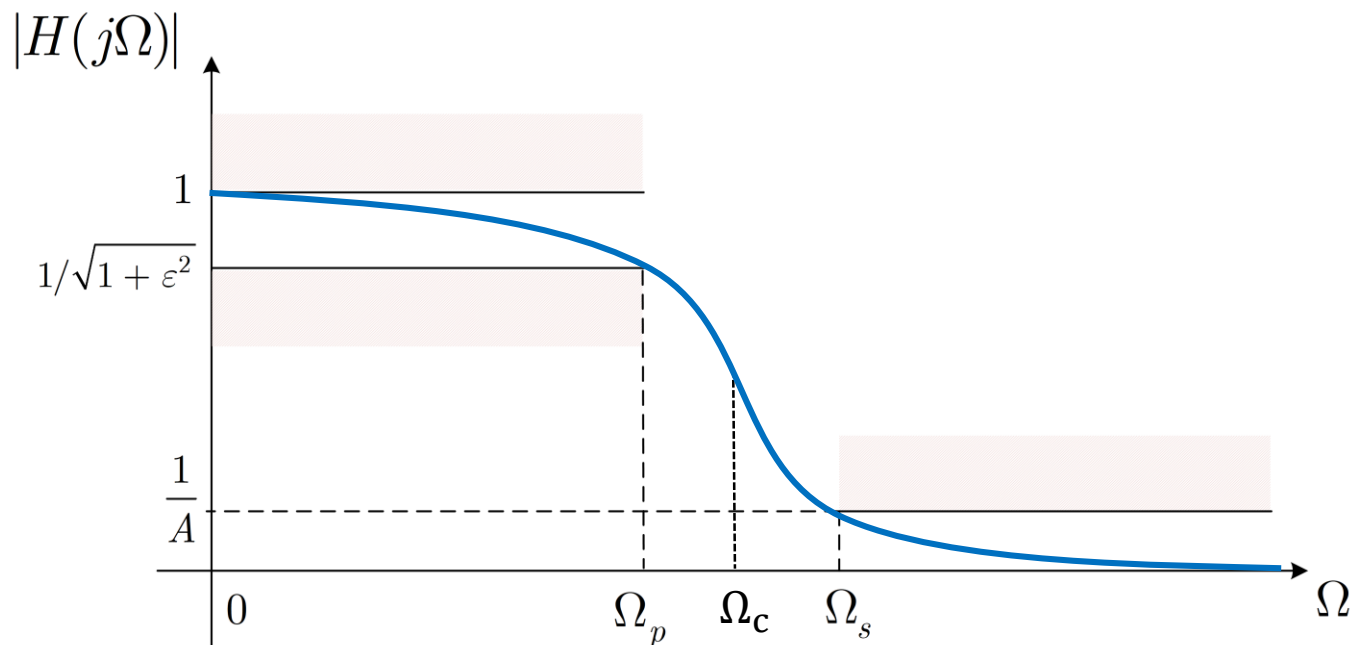
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Το περίφημο φίλτρο Butterworth είναι μονότονο και δίνεται από τη σχέση

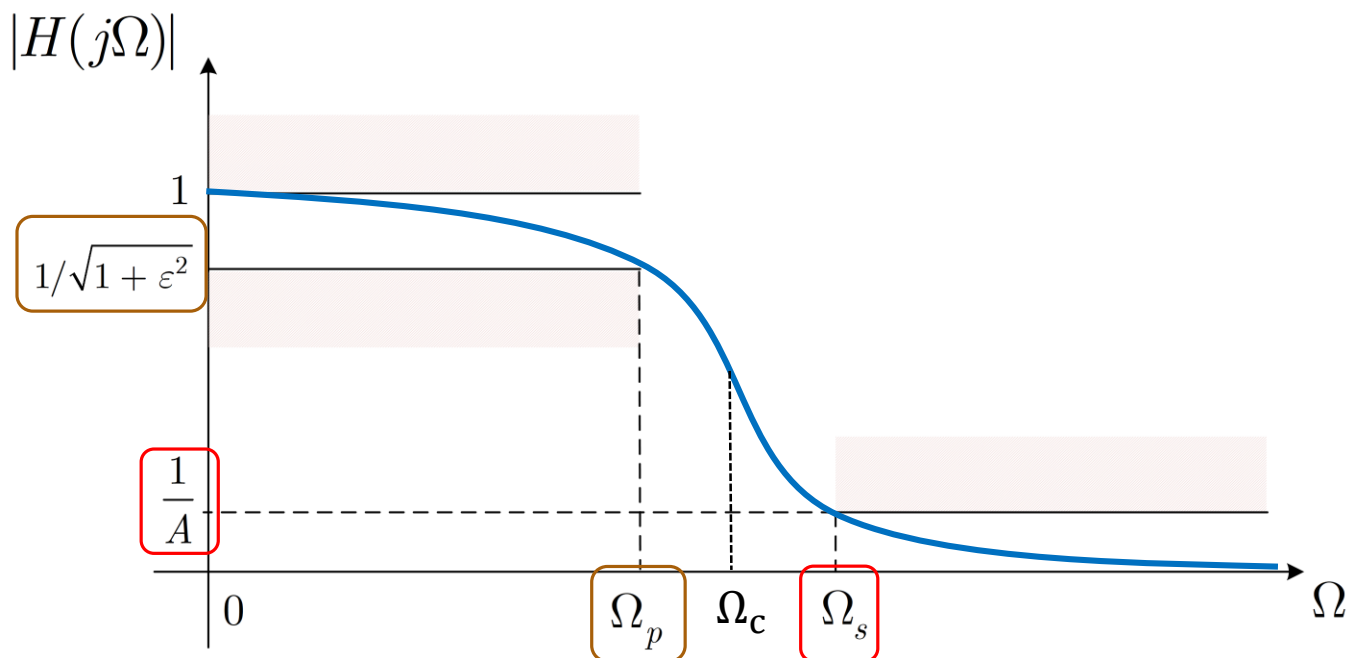
$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

με Ω_c τη συχνότητα αποκοπής του φίλτρου και N την τάξη του φίλτρου

- Ζητάμε τα Ω_c, N που να ικανοποιούν τις προδιαγραφές μας: $A, \varepsilon, \Omega_p, \Omega_s$



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



- Θέλουμε

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

- Έχουμε ένα 2x2 σύστημα ως προς N, Ω_c

- Λύνοντας ως προς N :

$$N = \frac{\log\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}{\log\left(\frac{\sqrt{A^2 - 1}}{\epsilon}\right)}$$

- Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απαραίτητα ακέραιος αριθμός!

- Επιλέγουμε το άνω ακέραιο μέρος (αν $N=5.36 \rightarrow N=6$)

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

- Για $N = 6$, βρίσκουμε το Ω_c και έχουμε την πλήρη μορφή του φίλτρου Butterworth που ικανοποιεί τις προδιαγραφές μας!
- Όμως το φίλτρο είναι της μορφής $|H(j\Omega)|^2$, εμείς θέλουμε τη συνάρτηση μεταφοράς
- Έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(j\Omega)H(-j\Omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

- Άρα

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Το σύστημα γράφεται ως

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}$$

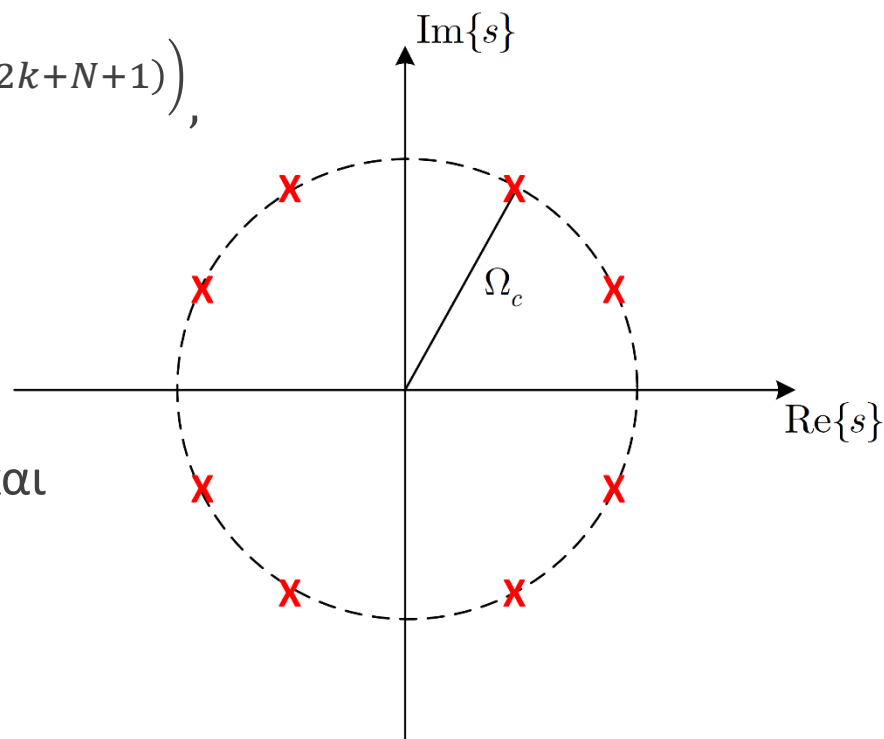
κι έχει μόνο πόλους στο μιγαδικό επίπεδο!

- Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις

$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)\right)},$$

με $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$

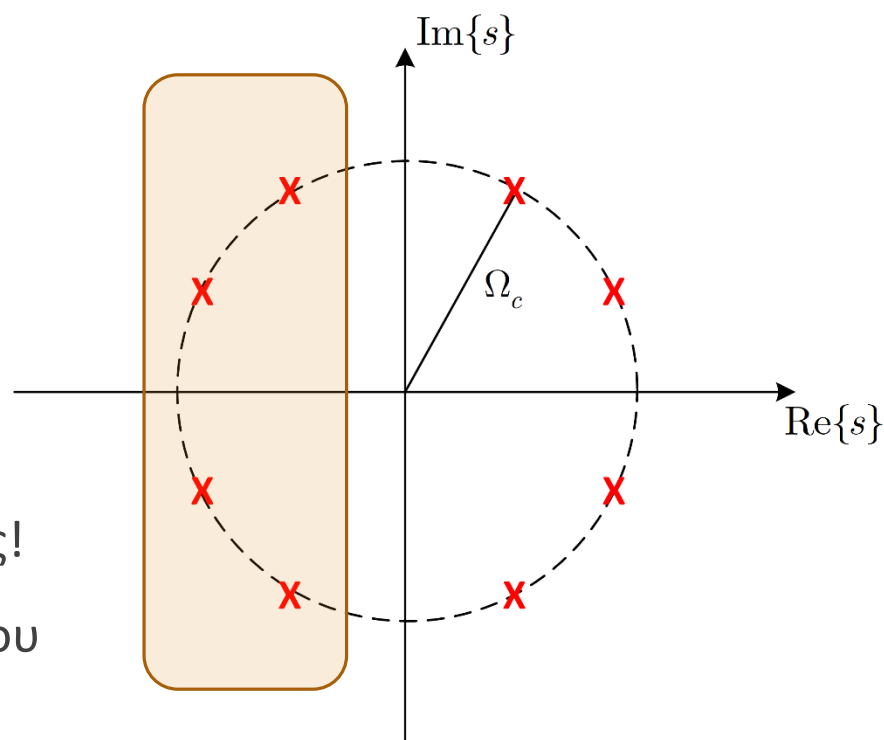
- Οι πόλοι βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας Ω_c !
- Οι μισοί από αυτούς θα ανήκουν στο $H(s)$ και οι άλλοι μισοί στο $H(-s)$



• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους που αντιστοιχούν στο $H(s)$
- Θέλουμε φυσικά ένα σύστημα που να είναι **πραγματικό, ευσταθές, και αιτιατό**
- Για να είναι τέτοιο, πρέπει οι (συζυγείς) πόλοι να βρίσκονται στο **αριστερό** ημιεπίπεδο (ώστε να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης)
- Έτσι, ξέρουμε τους πόλους και τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$!

$$H(s) = \Omega_c^N \prod_{\substack{k: \\ \text{Re}\{s_k\} < 0}} \frac{1}{(s - s_k)}$$



- Οπότε υπολογίσαμε το σύστημα συνεχούς χρόνου με βάση κάποιες προδιαγραφές
- Μα εμάς μας ενδιαφέρει ο διακριτός χρόνος!
- Μπορούμε να φέρουμε το $H(s)$ στο χώρο του μετασχ. Z??? 😊

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**

- Μπορούμε να φέρουμε το $H(s)$ στο χώρο του μετασχ. Z ???

- ΝΑΙ! 😊

- Και μάλιστα με δυο διαφορετικές μεθόδους

- Μέθοδος Impulse Invariance

- a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς χρόνου

- Μέθοδος Bilinear Transformation

- a.k.a «συμπίεση» του άξονα $0 \leq \Omega \leq +\infty$ στο $0 \leq \omega \leq \pi$!!

- Ας τις δούμε μια-μια...

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

• Έστω ότι έχουμε μια κρουστική απόκριση $h(t)$ η οποία περιγράφει ένα επιθυμητό σύστημα στο συνεχή χρόνο

• Αν τη δειγματοληπτήσουμε με περίοδο T_d τότε παίρνουμε ένα δειγματοληπτημένο σήμα

$$h_d(nT_d) = h(t) \Big|_{t=nT_d} \leftrightarrow H_d(j\Omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j(\Omega - k\Omega_d))$$

• Αυτή είναι μια έκφραση του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου με όρους μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου! 😊

• Ξέρουμε ότι κατά τη δειγματοληψία

$$\omega_d = 2\pi f_d T_d = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_d} = \frac{\Omega}{f_d} = \Omega T_d \Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

Το ίδιο ακριβώς!

• Άρα

$$h_d[n] = T_d h(nT_d) \leftrightarrow H_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} - k\frac{2\pi}{T_d}\right)\right)$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Βήμα 1: Ορίζουμε προδιαγραφές για το φίλτρο μας στον «ψηφιακό» χώρο

- Βήμα 2: Μετατρέπουμε τις προδιαγραφές στον «αναλογικό» χώρο συχνοτήτων

$$\Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

- Βήμα 3: Βρίσκουμε το σύστημα $H(s)$ που αντιστοιχεί στις προδιαγραφές μας: έστω ότι

$$\infty \quad \boxed{H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}} \leftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

- Βήμα 4: Δειγματοληπτούμε την κρουστική απόκριση $h(t)$:

$$h[n] = T_d h(nT_d) = T_d \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k n T_d} u(nT_d) = T_d \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]$$

- Βήμα 5: Εφαρμόζουμε μετασχ. Z στην κρουστική απόκριση $h[n]$:

$$\boxed{H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}}$$



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longrightarrow H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

- Παρατηρήστε ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση των πόλων στο χώρο του Laplace με το χώρο του Z
- Ξεκάθαρα, **κάθε πόλος s_k αντιστοιχεί σε έναν πόλο $e^{s_k T_d}$!!!**
- Είναι

$$z_k = e^{s_k T_d} = e^{(\sigma_k + j\Omega_k) T_d} = e^{\sigma_k T_d} e^{j\Omega_k T_d} = e^{\sigma_k T_d} e^{j\omega_k}$$

- Παρατηρήστε ότι:

Αν $\sigma_k > 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d} e^{j\omega_k}| = |e^{\sigma_k T_d}| |e^{j\omega_k}| = |e^{\sigma_k T_d}| > 1$

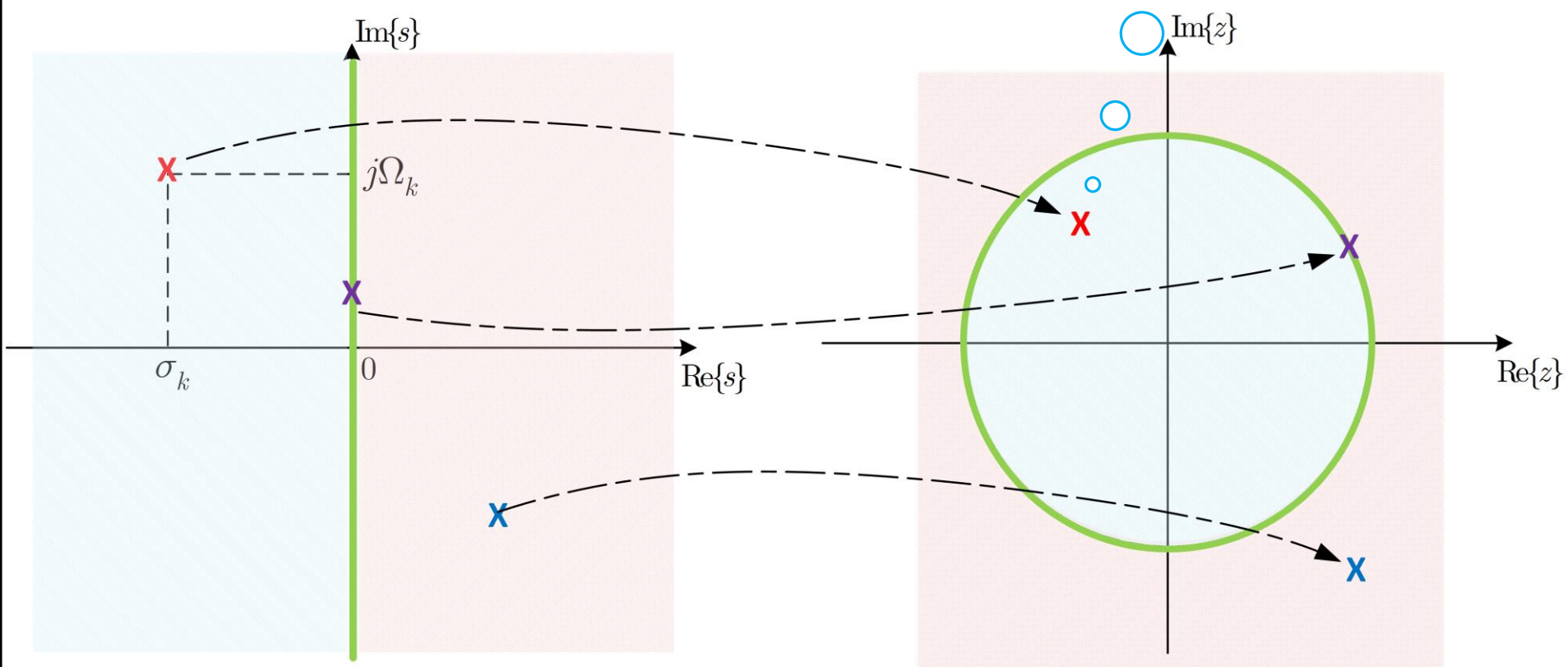
Αν $\sigma_k = 0$, τότε $|z_k| = \dots = |e^{\sigma_k T_d}| = 1$

Αν $\sigma_k < 0$, τότε $|z_k| = \dots = |e^{\sigma_k T_d}| < 1$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- ❑ Αν $\sigma_k > 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| > 1$
- ❑ Αν $\sigma_k = 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| = 1$
- ❑ Αν $\sigma_k < 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| < 1$

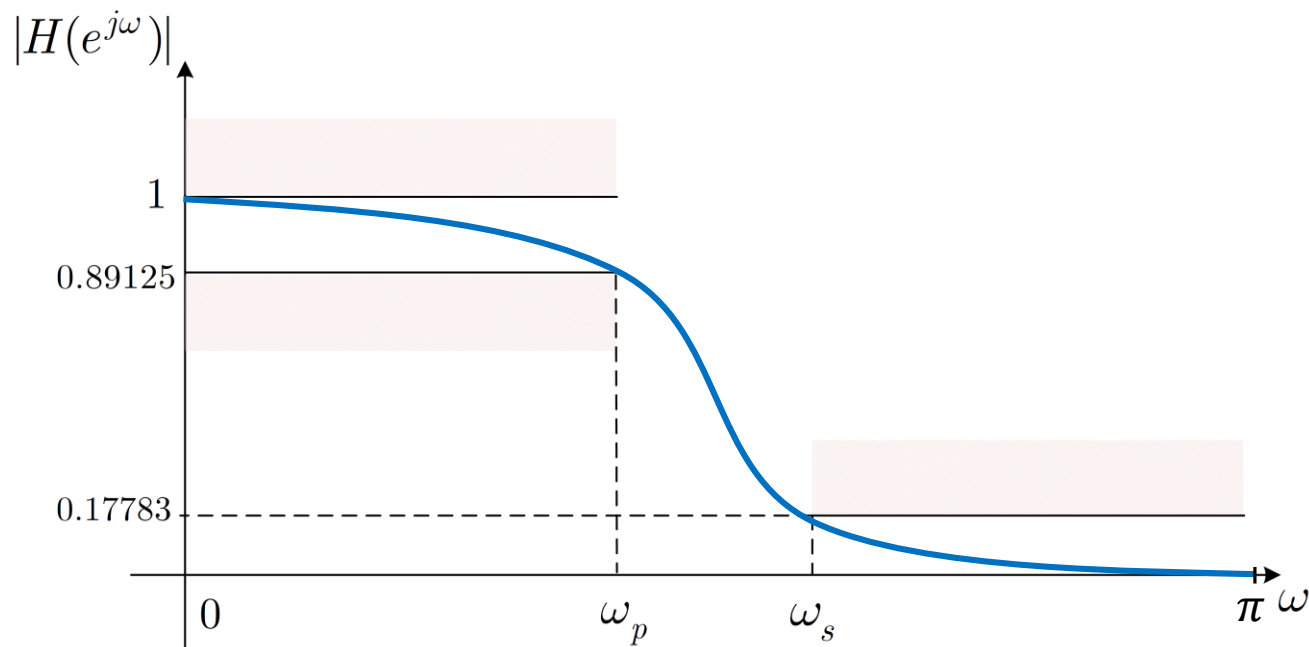
Οι ακριβείς θέσεις των πόλων είναι τυχαίες – η περιοχή όπου βρίσκονται, ΟΧΙ!



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε ένα φίλτρο όπως στο σχήμα - ας πούμε ένα lowpass Butterworth



με $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

• Προδιαγραφές:

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(e^{j\omega})| & : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

• Μπορεί κανείς να δείξει ότι η παράμετρος T_d δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση

- Θέτουμε $T_d = 1$ (δείτε το παράρτημα στο τέλος της διάλεξης)

• Μετατρέπουμε τις «ψηφιακές» συχνότητες σε «αναλογικές»: $\Omega = \frac{\omega}{T_d} = \omega$

- $\Omega_p = 0.2\pi$, $\Omega_s = 0.3\pi$

• Οι προδιαγραφές γίνονται

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(j\Omega)| \leq 1 & : 0 \leq \Omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(j\Omega)| & : 0.3\pi \leq \Omega \leq \pi \end{aligned}$$

• Οι προδιαγραφές γράφονται

$$\begin{aligned} 0.89125^2 &= |H(j\Omega_p)| = |H(j0.2\pi)|^2 \\ 0.17783^2 &= |H(j\Omega_s)| = |H(j0.3\pi)|^2 \end{aligned}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Αντικαθιστώντας την εξίσωση του φίλτρου Butterworth και λύνοντας το 2x2 σύστημα καταλήγουμε στο $N = 5.8858, \Omega_c = 0.70474$

- Θέλουμε ακέραιο $N \Rightarrow N = 6$

- Υπολογίζουμε ξανά τη συχνότητα $\Omega_c = 0.7032$

- Με αυτά τα νούμερα μπορούμε να δείξουμε ότι οι προδιαγραφές μας ικανοποιούνται ακριβώς στη μια συχνότητα (Ω_p ή Ω_s) ενώ υπερκαλυπτόμαστε στην άλλη (Ω_p ή Ω_s)!

- Χρειάζεται να βρούμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός αιτιατού, πραγματικού, και ευσταθούς συστήματος

- Ξανά

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.7032}\right)^{12}} = \frac{(j0.7032)^{12}}{s^{12} + (j0.7032)^{12}}$$

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = 0.7032e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11$$

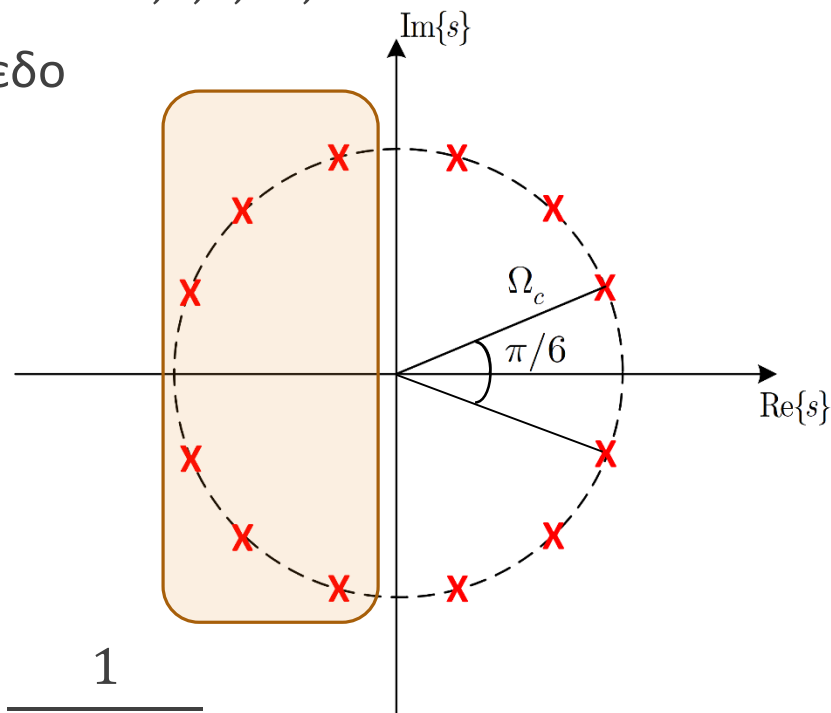
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = 0.7032e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11$$

- Κρατούμε μόνο αυτούς στο αριστερό ημιεπίπεδο

- Δίνουν ευσταθές και αιτιατό σύστημα
- Πρέπει να είναι σε συζυγή ζεύγη για να είναι το σύστημα πραγματικό!



- Το σύστημα δίνεται ως

$$H(s) = \Omega_c^6 \prod_{\substack{k=1 \\ \Re\{s_k\} < 0}}^6 \frac{1}{(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.36s + 0.49)(s^2 + 0.99s + 0.49)(s^2 + 1.35s + 0.49)}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.36s + 0.49)(s^2 + 0.99s + 0.49)(s^2 + 1.35s + 0.49)}$$

$$= \Omega_c^6 \prod_{\substack{k=1 \\ \Re\{s_k\} < 0}}^6 \frac{1}{(s - s_k)} = \sum_{\substack{k=1 \\ \Re\{s_k\} < 0}}^6 \frac{A_k}{(s - s_k)}$$

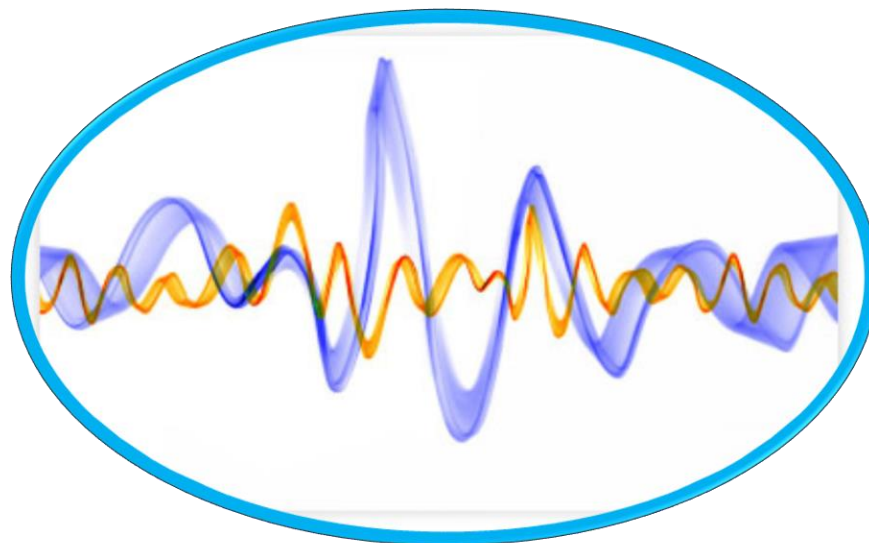
- Για κάθε όρο $\frac{A_k}{s - s_k}$ βάζουμε έναν όρο $\frac{A_k}{1 - e^{s_k} z^{-1}}$ στο χώρο του Z

$$H(z) = \frac{0.28 - 0.44z^{-1}}{1 - 1.29z^{-1} + 0.69z^{-2}} + \frac{-2.14 + 1.14z^{-1}}{1 - 1.06z^{-1} + 0.36z^{-2}} + \frac{1.85 - 0.63z^{-1}}{1 - 0.99z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

- Προσέξτε ότι δεν κάναμε ρητά δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης συνεχούς χρόνου! **Ούτε καν την υπολογίσαμε!**
- Ξέρουμε ότι η μέθοδος απλά κάνει pole mapping $s_k \rightarrow e^{s_k}$!

Παράρτημα

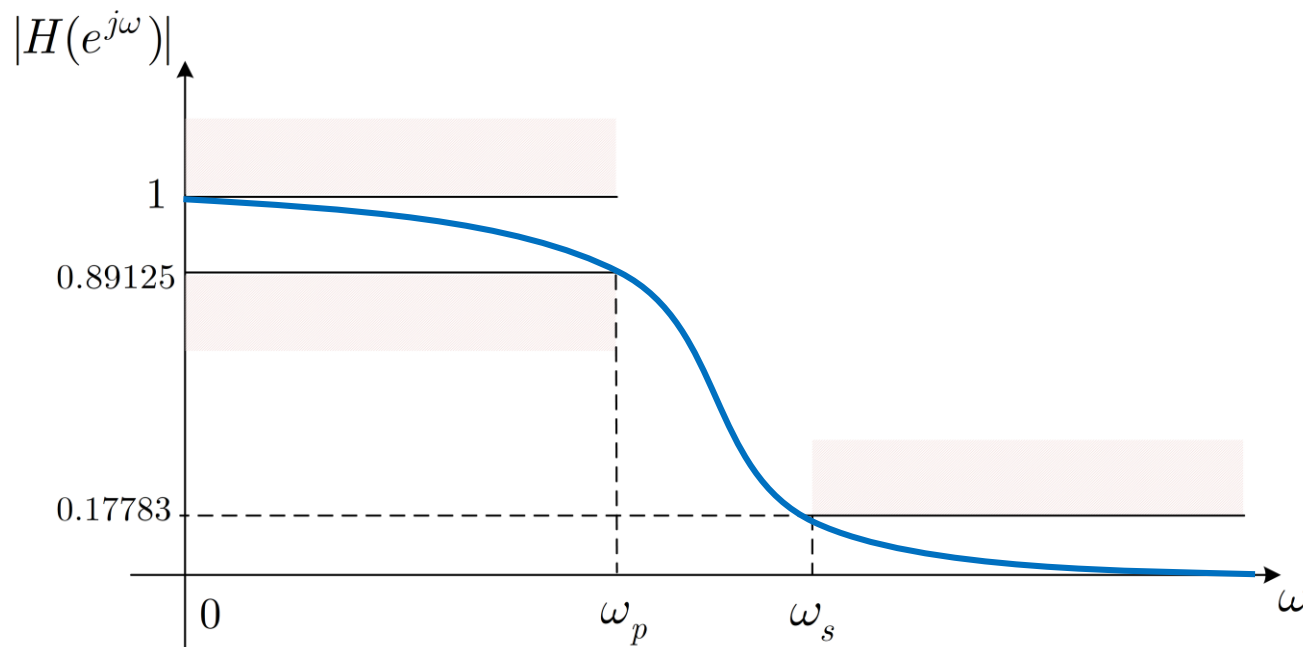
(σχετικά με την παράμετρο T_d)



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε ένα φίλτρο όπως στο σχήμα - ας πούμε ένα lowpass Butterworth



με $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

• Προδιαγραφές:

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(e^{j\omega})| & : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

• Μετατρέπουμε τις «ψηφιακές» συχνότητες σε «αναλογικές»: $\Omega = \frac{\omega}{T_d}$

$$\bullet \Omega_p = \frac{0.2\pi}{T_d}, \Omega_s = \frac{0.3\pi}{T_d}$$

• Οι προδιαγραφές γίνονται

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(j\Omega)| \leq 1 & : 0 \leq \Omega \leq \frac{0.2\pi}{T_d} \\ 0.17783 &\geq |H(j\Omega)| & : \frac{0.3\pi}{T_d} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T_d} \end{aligned}$$

• Οι προδιαγραφές γράφονται

$$\begin{aligned} (0.89125)^2 &= |H(j\Omega_p)|^2 = \left| H\left(\frac{j0.2\pi}{T_d}\right) \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c T_d}\right)^{2N}} \\ (0.17783)^2 &= |H(j\Omega_s)|^2 = \left| H\left(\frac{j0.3\pi}{T_d}\right) \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c T_d}\right)^{2N}} \end{aligned}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Αντικαθιστώντας την εξίσωση του φίλτρου Butterworth και λύνοντας το 2x2 σύστημα καταλήγουμε στο $N = 5.8858, \Omega_c T_d = 0.70474$

- Θέλουμε ακέραιο $N \Rightarrow N = 6$

- Υπολογίζουμε ξανά το $\Omega_c T_d = 0.7032 \Rightarrow \Omega_c = \frac{0.7032}{T_d}$

- Χρειάζεται να βρούμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός αιτιατού και ευσταθούς συστήματος

- Ξανά

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j \frac{0.7032}{T_d}} \right)^{12}}$$

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11$$

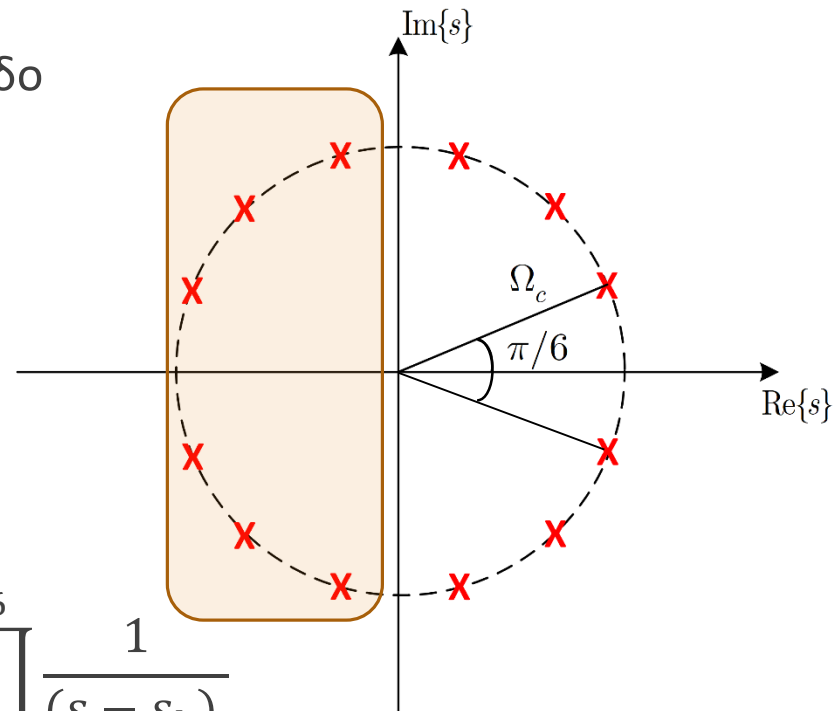
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11$$

- Κρατούμε μόνο αυτούς στο αριστερό ημιεπίπεδο

- Δίνουν ευσταθές και αιτιατό σύστημα



- Το σύστημα δίνεται ως

$$H(s) = \left(\frac{\Omega_c}{T_d}\right)^6 \prod_{k=1}^6 \frac{1}{(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{\left(\frac{0.7032}{T_d}\right)^6}{\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j7\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j9\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j11\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j13\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j15\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j17\pi}{12}}\right)}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

$$H(s) = \frac{\left(\frac{0.7032}{T_d}\right)^6}{\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{j\frac{7\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{j\frac{9\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{j\frac{11\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{j\frac{13\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{j\frac{15\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{j\frac{17\pi}{12}}\right)}$$

• Μερικά κλάσματα: για κάθε όρο $\frac{A_k}{s-s_k}$ βάζουμε ένα όρο $\frac{A_k T_d}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}}$ στο χώρο του Z

• Βλέπετε ότι οι πόλοι $s_k = \frac{0.7032}{T_d} e^{j\frac{\pi}{12}(2k+5)}$, $k = 1, \dots, 6$ πολλαπλασιάζονται με T_d όταν μεταφέρονται στο χώρο του Z

• Άρα η τιμή του T_d δεν έχει σημασία!

• Άρα

$$H(z) = \frac{0.28 - 0.44z^{-1}}{1 - 1.29z^{-1} + 0.69z^{-2}} + \frac{-2.14 + 1.14z^{-1}}{1 - 1.06z^{-1} + 0.36z^{-2}} + \frac{1.85 - 0.63z^{-1}}{1 - 0.99z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

• Προσέξτε ότι δεν κάναμε ρητά δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης συνεχούς χρόνου! Ούτε καν την υπολογίσαμε!

• Ξέρουμε ότι η μέθοδος απλά κάνει pole mapping $s_k \rightarrow e^{s_k T_d}$!

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

