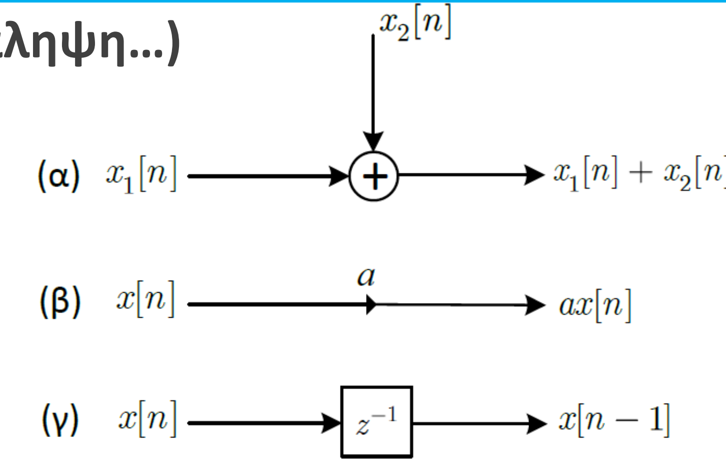
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

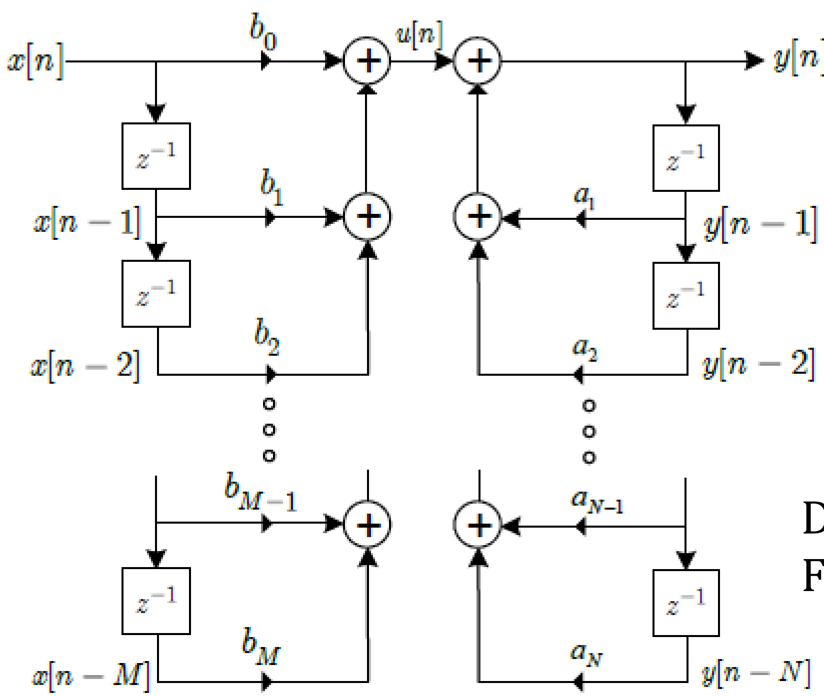
ΔΙΑΛΕΞΗ 17^{Η}

- Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

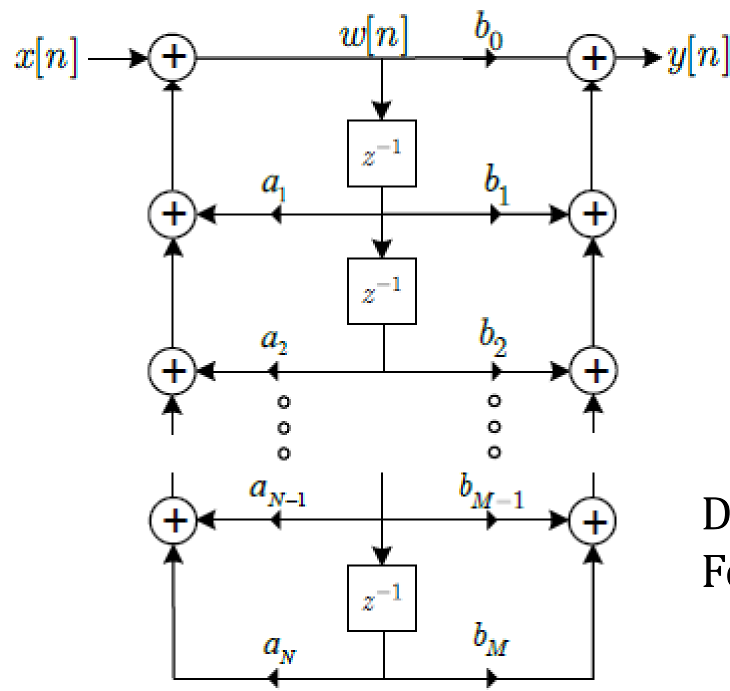
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου (επανάληψη…)**

- Βασικοί δομικοί λίθοι:
  - ❑ Πρόσθεση
  - ❑ Πολλαπλασιασμός
  - ❑ Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)





Direct Form I



Direct Form II

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου (επανάληψη…)**
- **Μορφή σε σειρά**

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-e_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_k z^{-1})(1-g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2, \;\; M = M_1 + 2M_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor$

- **Παράλληλη Μορφή**

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2}\frac{B_k(1-e_k z^{-1})}{(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

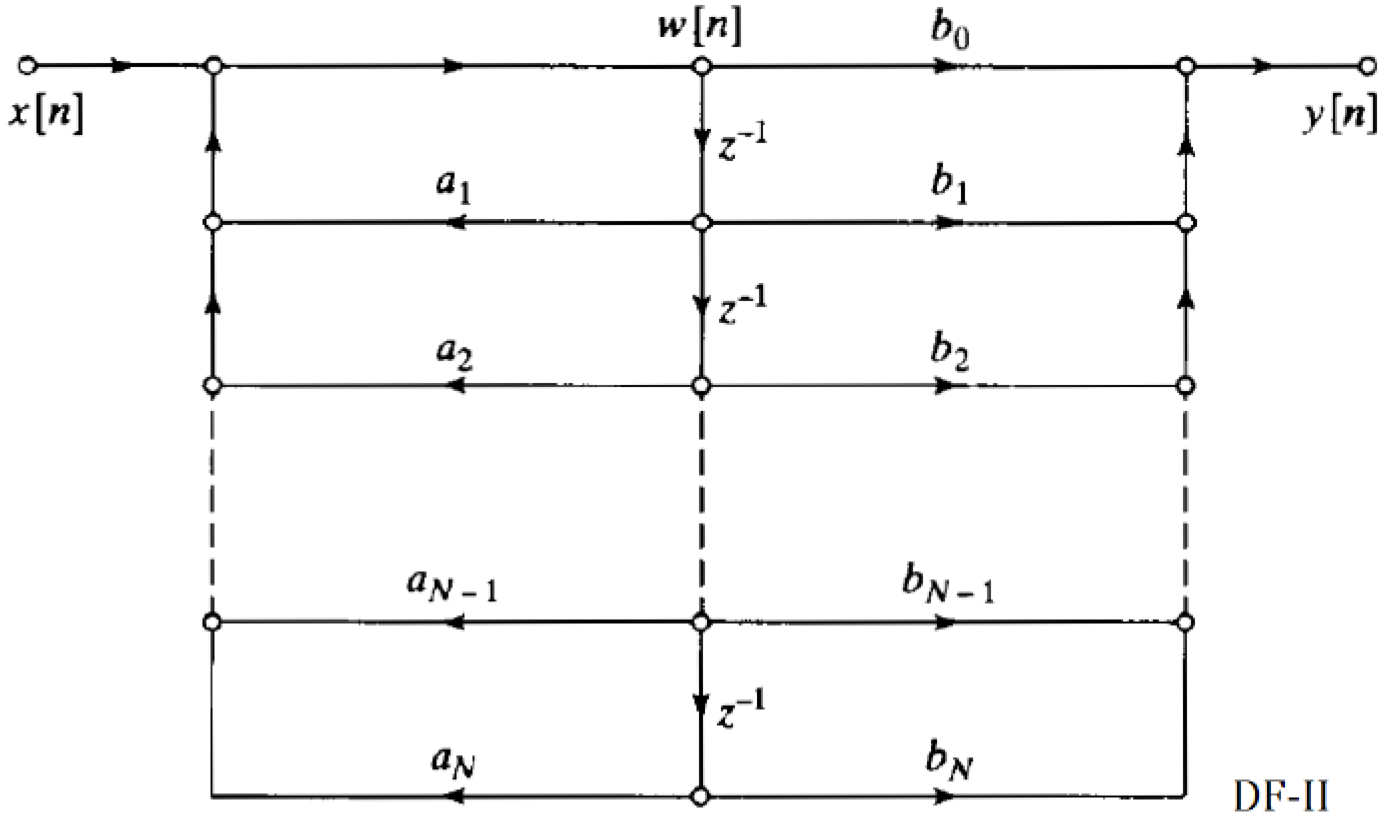
με $N = N_1 + 2N_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s}\frac{e_{0k} + e_{1k}z^{-1}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Ανάστροφη μορφή (transposed form)
- Τα διαγράμματα που σχεδιάζουμε ως τώρα μπορούν εναλλακτικά να αναπαρασταθούν ως γράφοι
- Για παράδειγμα, ο γράφος ενός γενικού IIR συστήματος σε Direct Form II



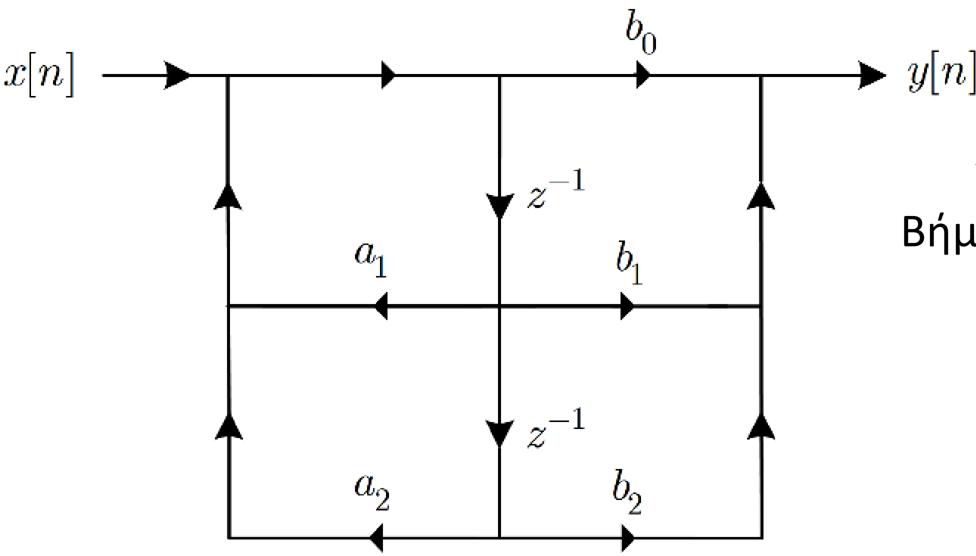
- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Ανάστροφη μορφή (transposed form)
- Η θεωρία γράφων μας προσφέρει μια διαδικασία που ονομάζεται αναστροφή (reversal) που μας δίνει μερικές εναλλακτικές μορφές δομών, με ενδιαφέρουσες ιδιότητες

- **Σχεδίαση Ανάστροφης Μορφής**

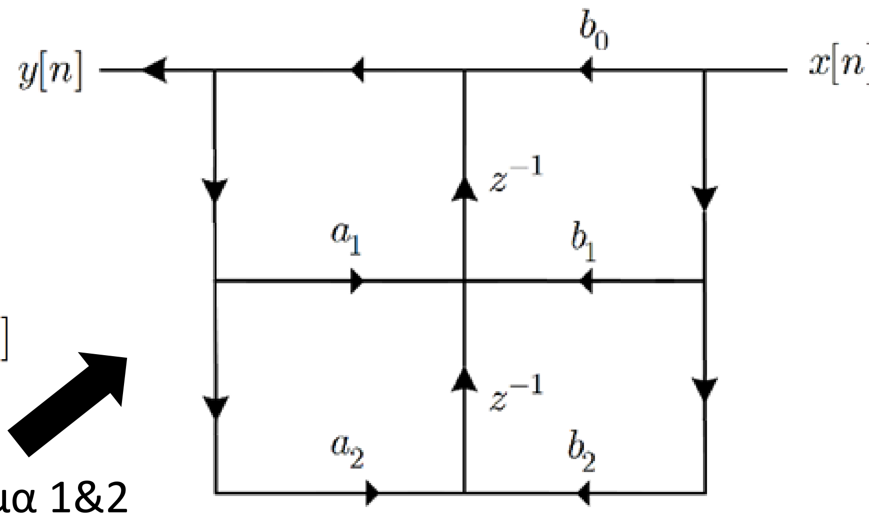
1. Αναστρέφουμε τη φορά όλων των κλάδων του διαγράμματος
   - Κάθε αθροιστής μετατρέπεται σε διακλάδωση, και το αντίστροφο
2. Αλλάζουμε θέση μεταξύ εισόδου και εξόδου
3. Επανασχεδιάζουμε το διάγραμμα, αναστρέφοντάς το ώστε να παρουσιάζεται η είσοδος στα αριστερά και η έξοδος στα δεξιά

- Ας το δούμε στην πράξη

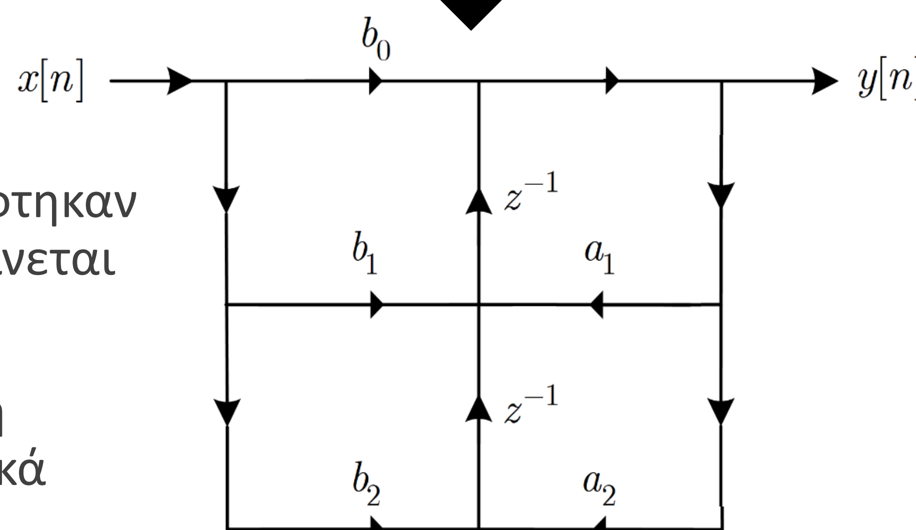
- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Ανάστροφη μορφή (transposed form)
- Έστω ότι μας δίνεται ο Direct Form II γράφος όπως παρακάτω



Βήμα 1&2



Βήμα 3



- Αν εφαρμόσουμε τα βήματα που περιγράφτηκαν πριν, παίρνουμε το νέο διάγραμμα που φαίνεται στα δεξιά
- Προσέξτε ότι καταφέραμε χωρίς προσθήκη μνήμης να υλοποιήσουμε πρώτα τα μηδενικά και μετά τους πόλους!! ☺

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Ως τώρα υλοποιούμε εξισώσεις διαφορών ή συναρτήσεις μεταφοράς με χρήση διάφορων δομών

- Είναι πολύ ενδιαφέρον και το αντίστροφο!
  - Δηλ. να αναλύουμε μια δεδομένη υλοποίηση και να βρίσκουμε την εξίσωση διαφορών ή τη συνάρτηση μεταφοράς που υλοποιεί

- Προς αυτό υπάρχουν μερικοί απλοί κανόνες που μας διευκολύνουν

I. Τοποθετούμε ενδιάμεσες μεταβλητές στην έξοδο κάθε αθροιστή (πλην αυτού που σχετίζεται με την έξοδο)

II. Γράφουμε τις εξισώσεις διαφορών στο πεδίο του χρόνου

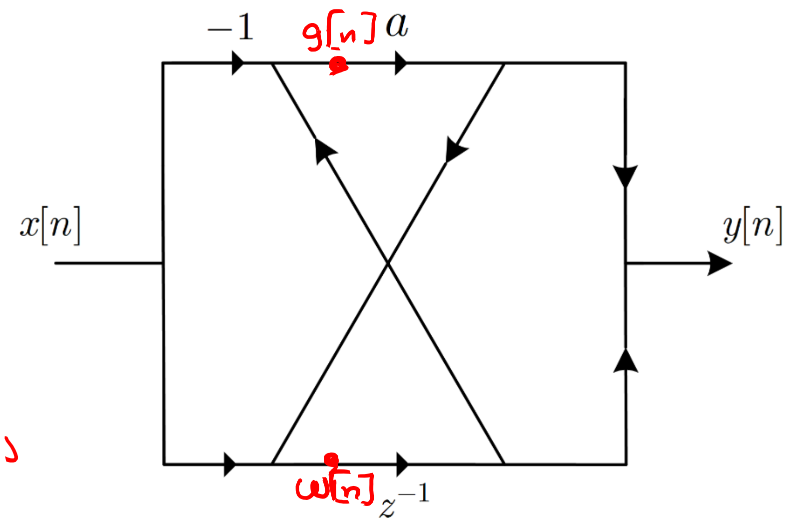
III. Μετατρέπουμε τις εξισώσεις στο χώρο του Z

IV. Λύνουμε ως προς $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από το διάγραμμα. Βρείτε το σύστημα $H(z)$ το οποίο υλοποιεί.



Τοποθετούμε τις ενδιάμεσες μεταβλητές στις εξόδους των αθροιστών.

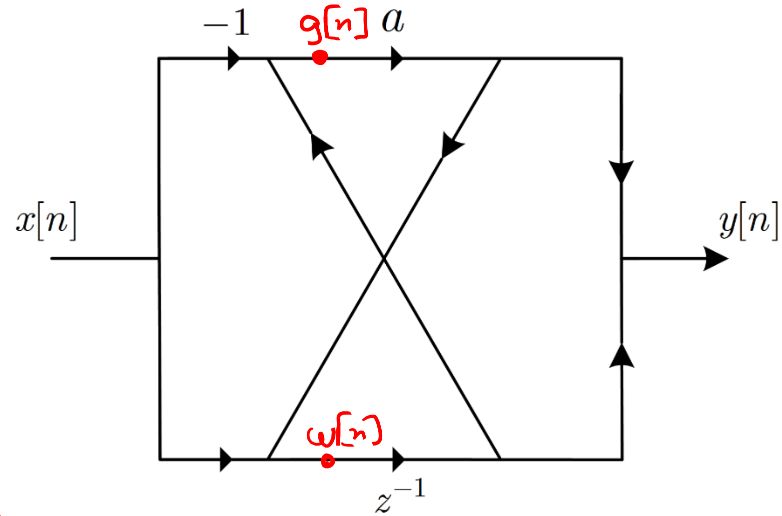
$$\left.\begin{aligned} g[n] &= -x[n] + w[n-1] \\ w[n] &= x[n] + a g[n] \\ y[n] &= a g[n] + w[n-1] \end{aligned}\right\} \overset{Z}{\Longrightarrow} \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} G(z) &= -X(z) + z^{-1} W(z) \\ W(z) &= X(z) + a G(z) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \\ &Y(z) = a G(z) + z^{-1} W(z) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow G(z) = -X(z) + z^{-1}\left(X(z) + a G(z)\right) = -X(z) + z^{-1} X(z) + a z^{-1} G(z)$$

$$(1 - a z^{-1}) G(z) = (z^{-1} - 1) X(z) \Longrightarrow \boxed{G(z) = \frac{z^{-1} - 1}{1 - a z^{-1}} X(z)} \quad (1)$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:



Επίσης,

$$W(z) = X(z) + a\,\frac{z^{-1}-1}{1-az^{-1}}\,X(z)$$

$$\boxed{W(z) = \left(1 + \frac{az^{-1}-a}{1-az^{-1}}\right) X(z)} \quad (2)$$

Η (3) λόγω (1), (2) δίνει

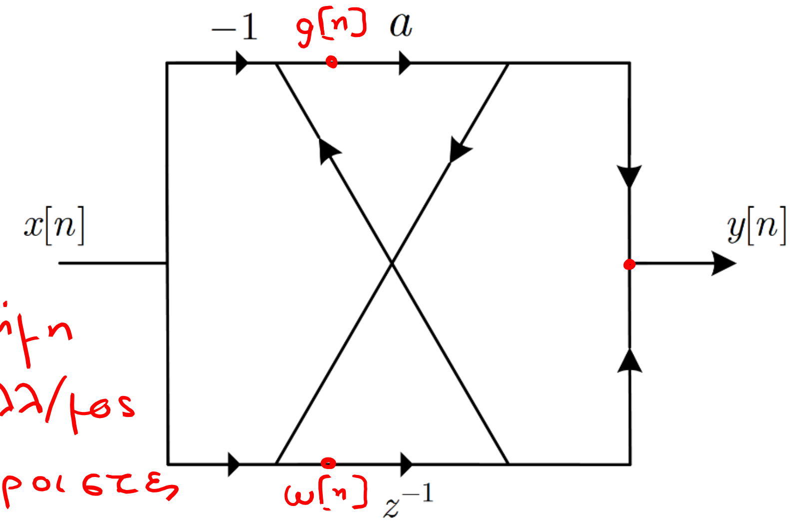
$$Y(z) = a\,\frac{z^{-1}-1}{1-az^{-1}}\,X(z) + z^{-1}\left(1 + \frac{az^{-1}-a}{1-az^{-1}}\right) X(z)$$

$$= \left(\frac{az^{-1}-a}{1-az^{-1}} + z^{-1}\,\frac{1-\cancel{az^{-1}}+\cancel{az^{-1}}-a}{1-az^{-1}}\right) X(z)$$

$$= \frac{\cancel{az^{-1}}-a+z^{-1}-\cancel{az^{-1}}}{1-az^{-1}}\,X(z) = \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}\,X(z)$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:



Άρα

$$Y(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}} X(z)$$

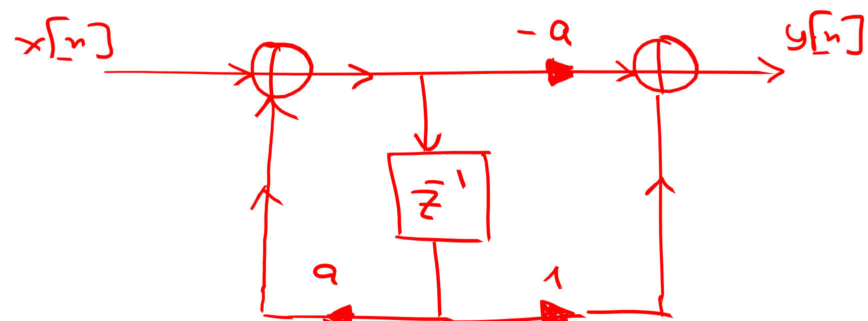
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}} = H(z)$$

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}}$$

all-pass!

1 μνήμη
1 πολλ/μος
3 αθροιστές

DF II

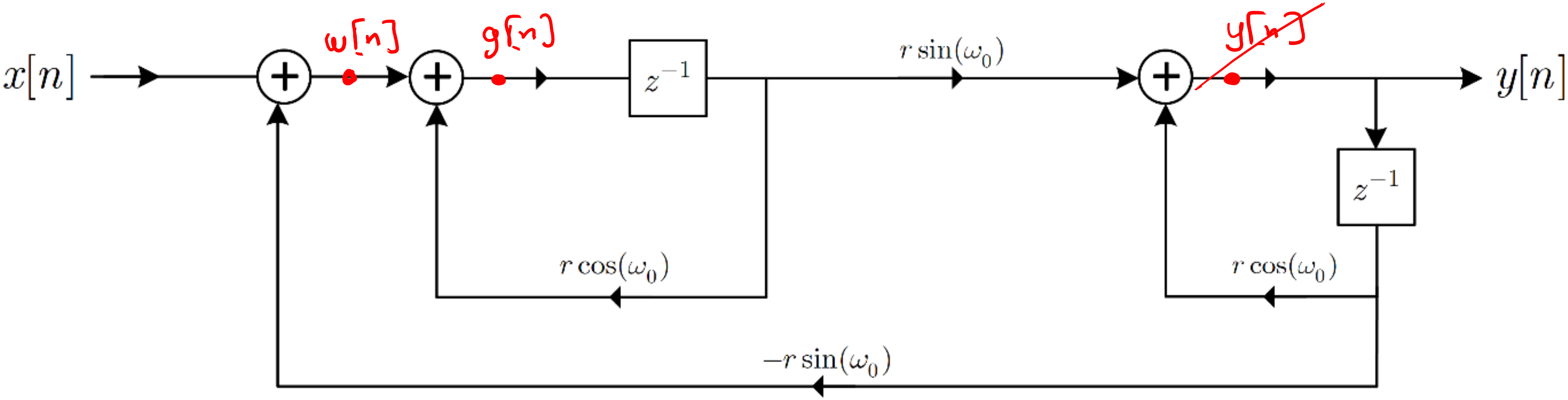


1 μνήμη
2 αθροιστές
2 πολλ/στοι

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από το διάγραμμα. Βρείτε το σύστημα $H(z)$ το οποίο υλοποιεί.



$$\left.\begin{aligned}
w[n] &= x[n] - r\sin(\omega_0)\, y[n-1] \\
g[n] &= w[n] + r\cos(\omega_0)\, g[n-1] \\
y[n] &= r\sin(\omega_0)\, g[n-1] + r\cos(\omega_0)\, y[n-1]
\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\quad \mathcal{Z} \quad}$$

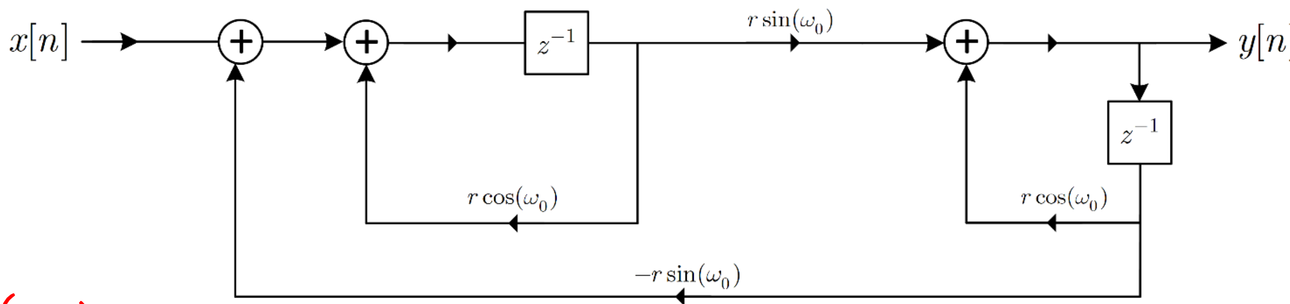
$$W(z) = X(z) - z^{-1} r\sin(\omega_0)\, Y(z) \quad (1)$$

$$G(z) = W(z) + z^{-1} r\cos(\omega_0)\, G(z) \quad (2)$$

$$Y(z) = z^{-1} r\sin(\omega_0)\, G(z) + z^{-1} r\cos(\omega_0)\, Y(z) \quad (3)$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:



Η (1) στη (2) δίνει:

$$G(z) = X(z) - z^{-1} r\sin(\omega_0) Y(z) + z^{-1} r\cos(\omega_0) G(z)$$

$$\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right) G(z) = X(z) - z^{-1} r\sin(\omega_0) Y(z)$$

$$G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)} X(z) - \frac{z^{-1} r\sin(\omega_0)}{1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)} Y(z) \quad (4)$$

Η (3) λόγω (4) δίνει:

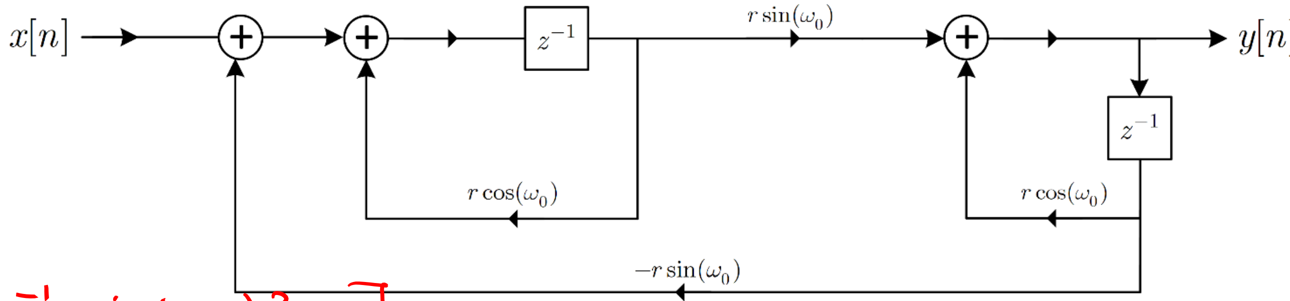
$$Y(z)\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right) = z^{-1} r\sin(\omega_0) G(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1} r\sin(\omega_0)}{1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)} G(z) = \frac{z^{-1} r\sin(\omega_0)}{\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right)^2} X(z) - \frac{\left(z^{-1} r\sin(\omega_0)\right)^2}{\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right)^2} Y(z)$$

$$\left(1 + \frac{\left(z^{-1} r\sin(\omega_0)\right)^2}{\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right)^2}\right) Y(z) = \frac{z^{-1} r\sin(\omega_0)}{\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right)^2} X(z)$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:



Άρα:

$$\left[\frac{(1-z^{-1}r\cos(\omega_0))^2}{(1-z^{-1}r\cos(\omega_0))^2}+\frac{(z^{-1}r\sin(\omega_0))^2}{(1-z^{-1}r\cos(\omega_0))^2}\right]Y(z)=\frac{z^{-1}r\sin(\omega_0)}{(1-z^{-1}r\cos(\omega_0))^2}X(z)$$

$$\left[\frac{1-2z^{-1}r\cos(\omega_0)+(z^{-1}r\cos(\omega_0))^2+(z^{-1}r\sin(\omega_0))^2}{\cancel{(1-z^{-1}r\cos(\omega_0))^2}}\right]Y(z)=\frac{z^{-1}r\sin(\omega_0)}{\cancel{(1-z^{-1}r\cos(\omega_0))^2}}X(z)$$

$$(1-2z^{-1}r\cos(\omega_0)+r^2z^{-2})Y(z)=z^{-1}r\sin(\omega_0)X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{z^{-1}r\sin(\omega_0)}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

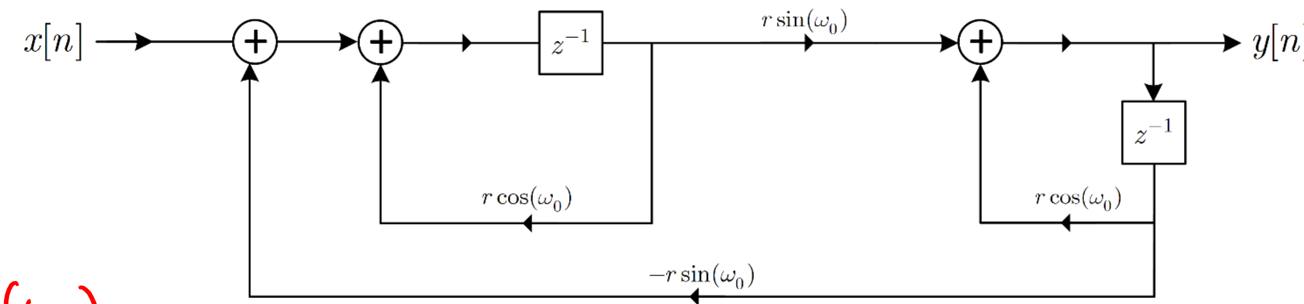
Αρχικό σύστημα

3 αθροιστές

4 πολ/στές

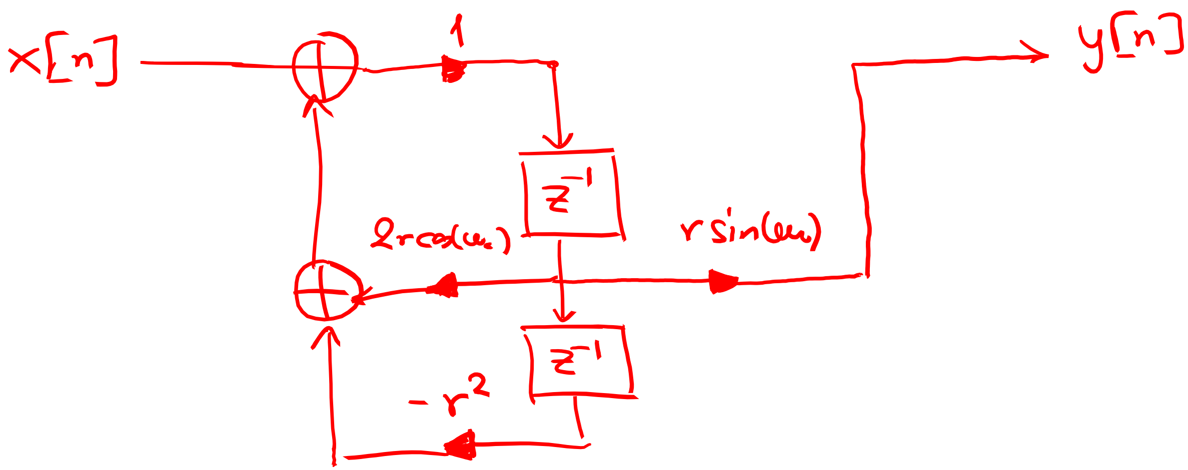
2 θέσεις μνήμης

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:



Είναι

$$H(z) = \frac{z^{-1} r \sin(\omega_0)}{1 - \left(2r\cos(\omega_0) z^{-1} - r^2 z^{-2}\right)}$$



DF II

2 αθροιστές

3 πολλ/στές

2 θέσεις μνήμης

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

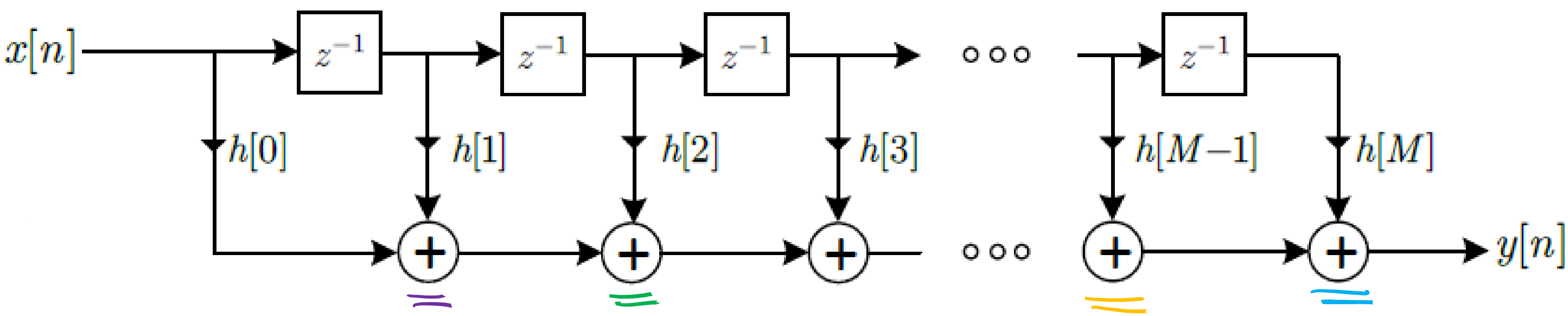
- Για τα FIR συστήματα, καταλαβαίνετε ότι λόγω της απουσίας πόλων, τα Direct Form I και II που γνωρίσαμε «ενώνονται» σε μια μορφή, Direct Form

- Η γενική εξίσωση διαφορών είναι

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

- Η Direct Form υλοποίηση είναι η παρακάτω

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots + h[M-1]x[n-(M-1)] + h[M]x[n-M]$$



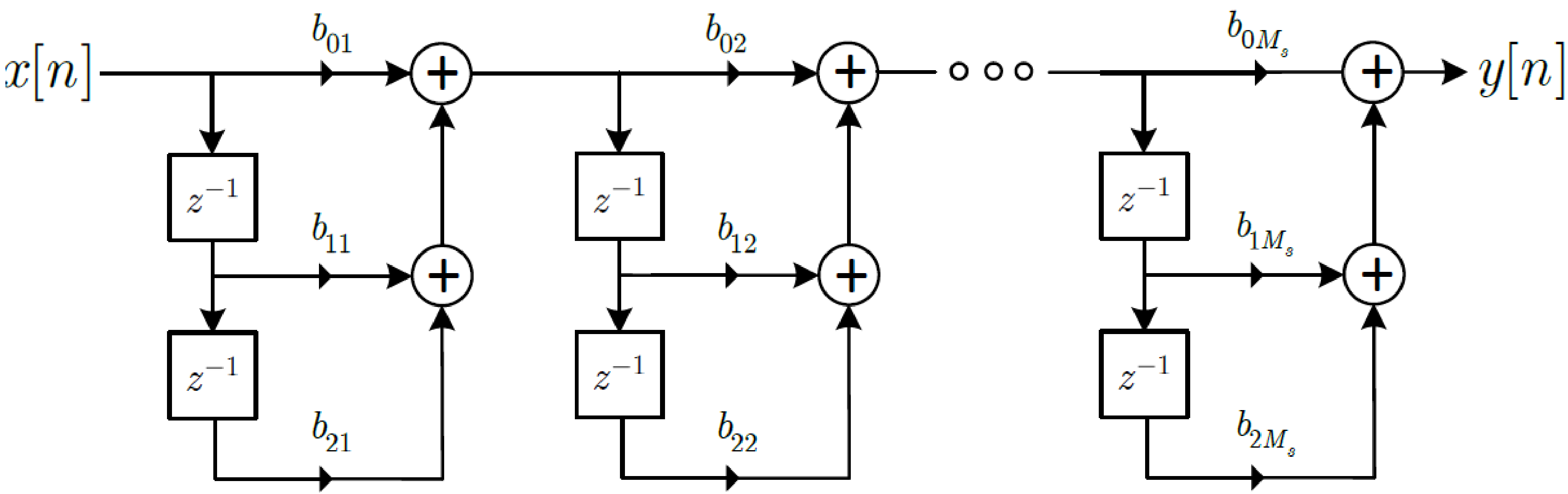
- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Μορφή σε Σειρά (cascade form)

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2})$$

με $M_s = \left\lfloor \frac{M+1}{2} \right\rfloor$

- Μια γενική υλοποίηση σε σειρά φαίνεται παρακάτω



- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- Για να σχεδιάσουμε αποδοτικές δομές για συστήματα γραμμικής φάσης πρέπει να εκμεταλλευτούμε τις συμμετρίες τους

$$h[M-n] = h[n], \qquad n = 0,1,\cdots,M \quad \text{Τύπου I, II}$$

$$h[M-n] = -h[n], \qquad n = 0,1,\cdots,M \quad \text{Τύπου III, IV}$$

- Οποιαδήποτε συμμετρία κι αν ισχύει, μπορούμε να μειώσουμε το πλήθος των **πολλαπλασιασμών** σχεδόν στο μισό!

- Ας δούμε πως μπορούμε να τα γράψουμε με κατάλληλο τρόπο

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης
- Έστω M άρτιος, οπότε ξεκινάμε με τα τύπου I και III
- Τύπου I:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]\left(x[n-k] + x[n-(M-k)]\right) + h\left[\frac{M}{2}\right] x\left[n - \frac{M}{2}\right]$$

- Τύπου III:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]\left(x[n-k] - x[n-M+k]\right)$$

- Έστω M περιττός, οπότε μιλάμε για τύπου II, IV
- Τύπου II:

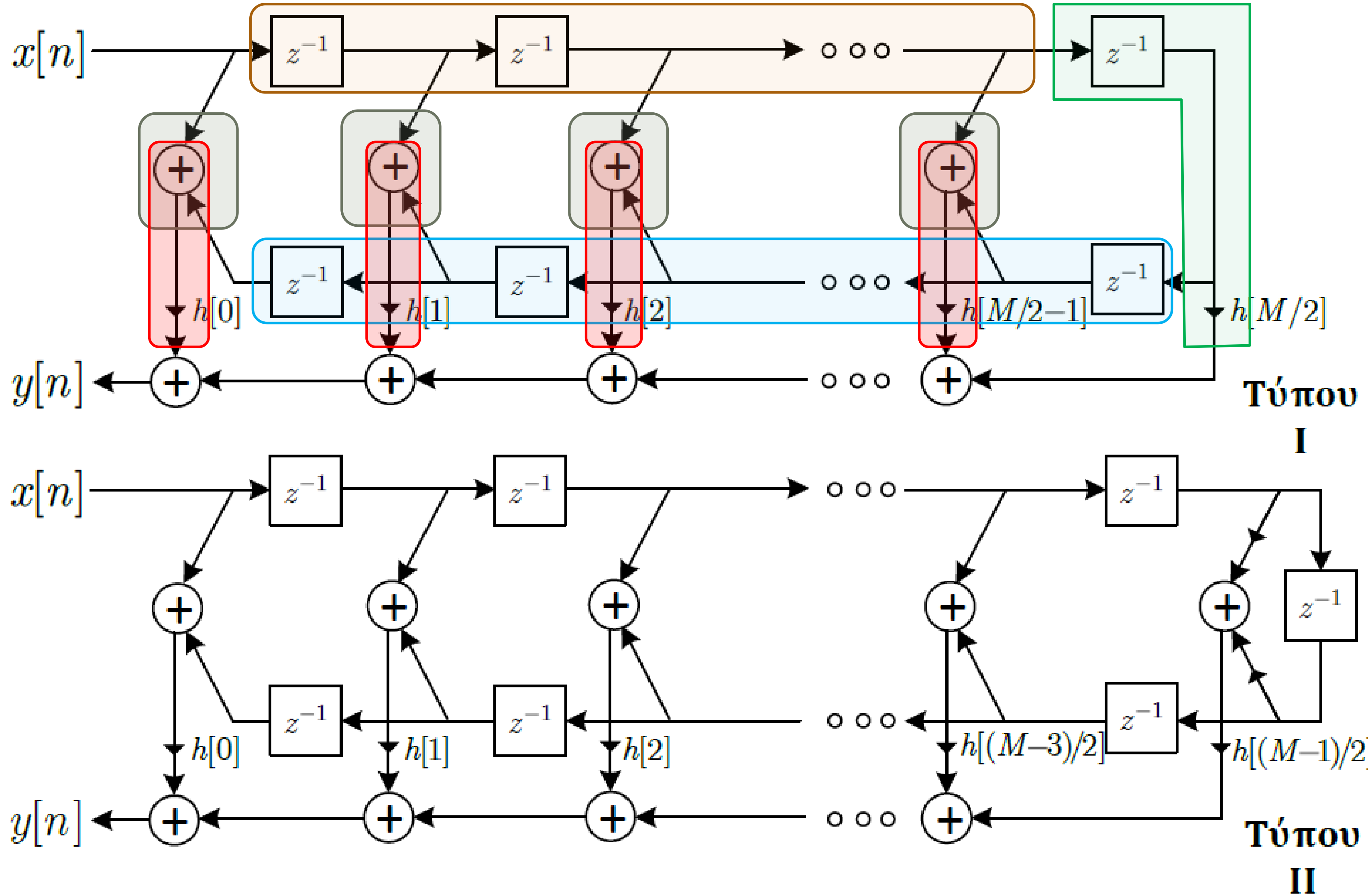
$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k]\left(x[n-k] + x[n-M+k]\right)$$

- Τύπου IV:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k]\left(x[n-k] - x[n-M+k]\right)$$

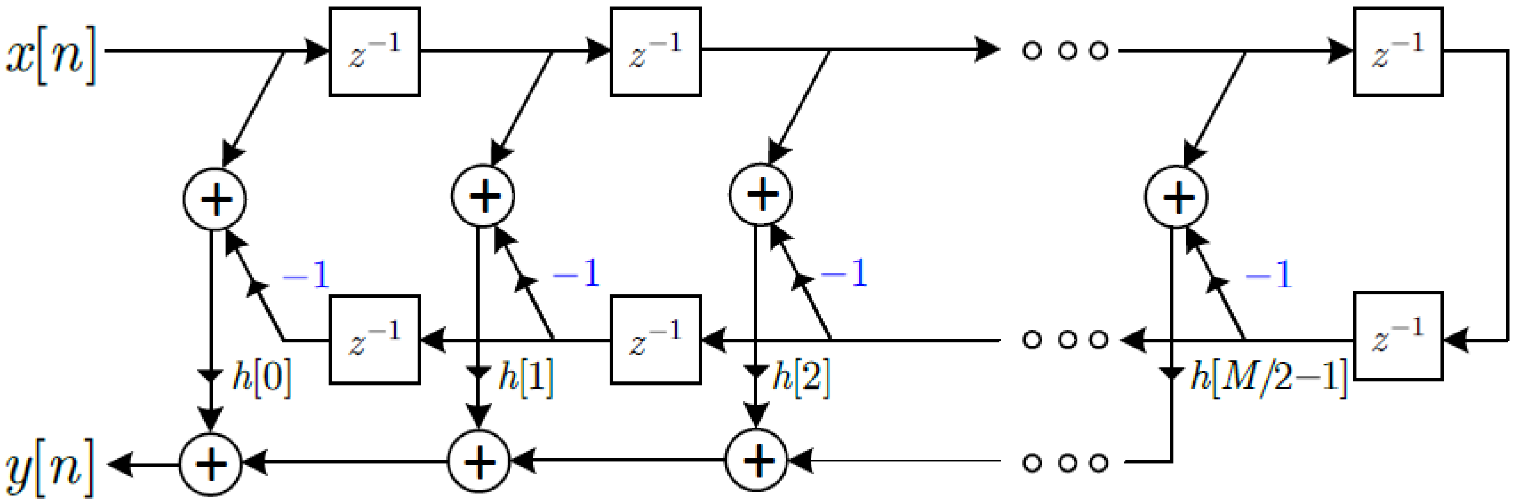
- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k]\left(x[n-k]+x[n-(M-k)]\right)+h\left[\frac{M}{2}\right]x\left[n-\frac{M}{2}\right]$$

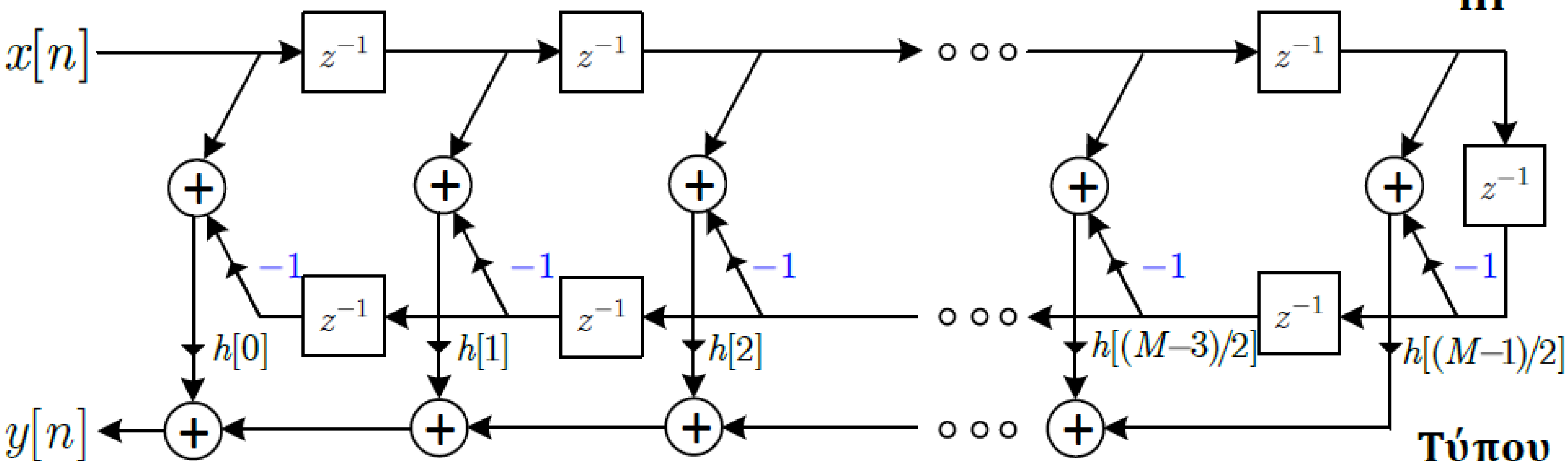


- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης



Τύπου III

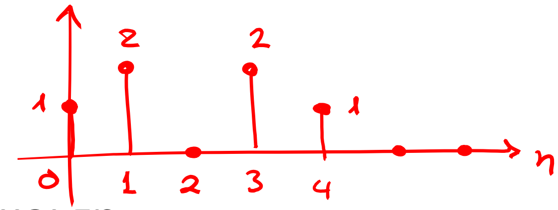


Τύπου IV

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από την κρουστική απόκριση



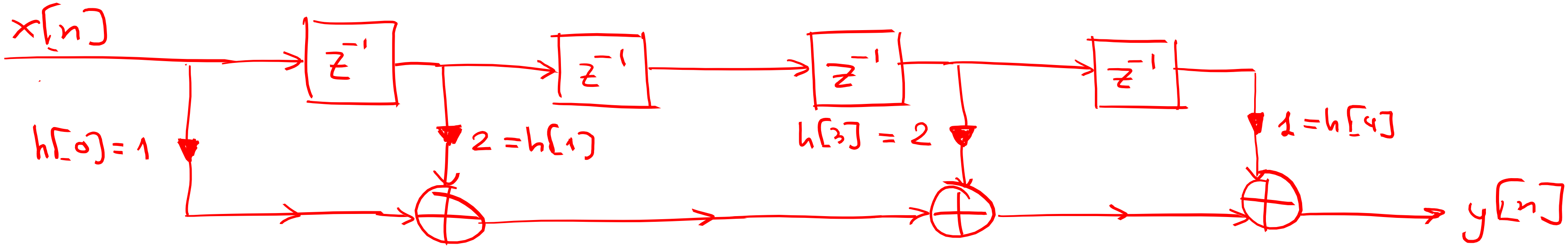
M, άρτιο

Τύπου I

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

Συζητήστε και σχεδιάστε τη βέλτιστη υλοποίηση

Είναι $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + 2x[n-3] + x[n-4]$



Direct Form

Κόστος

4 μνήμες

3 αθροιστές

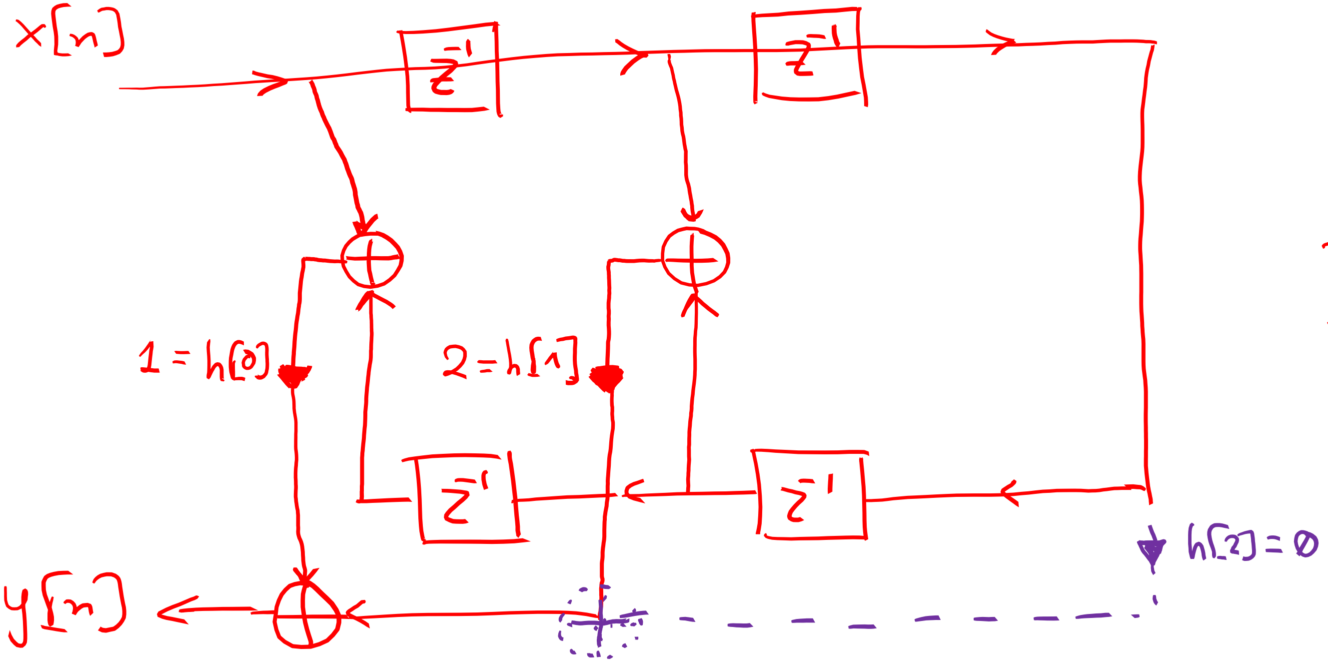
2 πολλ/στές

Αν όμως εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του Τύπου I FIR συστήματος?

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

Type I

- Παράδειγμα:



Κόστος:

4 μνήμες
3 αθρ.
1 πολλ/στης

Εξοικονομήσαμε έναν πολλαπλασιαστή, εν γένει όμως εξοικονομούμε $\frac{M}{2}$ πολλαπλασιαστές για ένα Type I FIR με M+1 δείγματα.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ