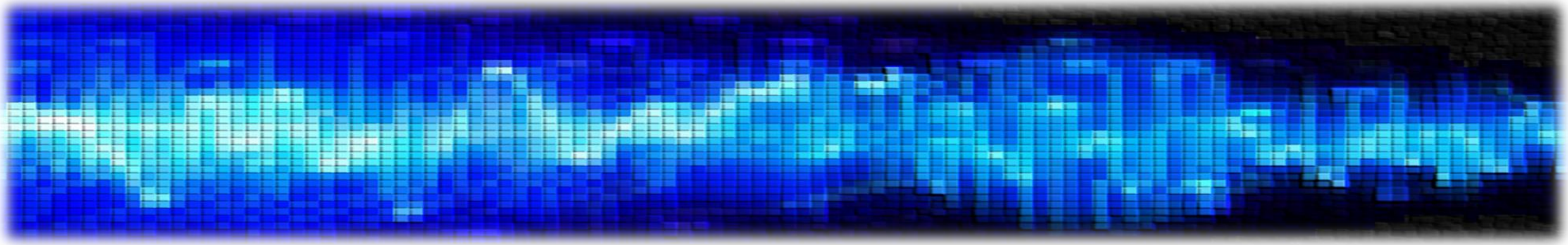
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

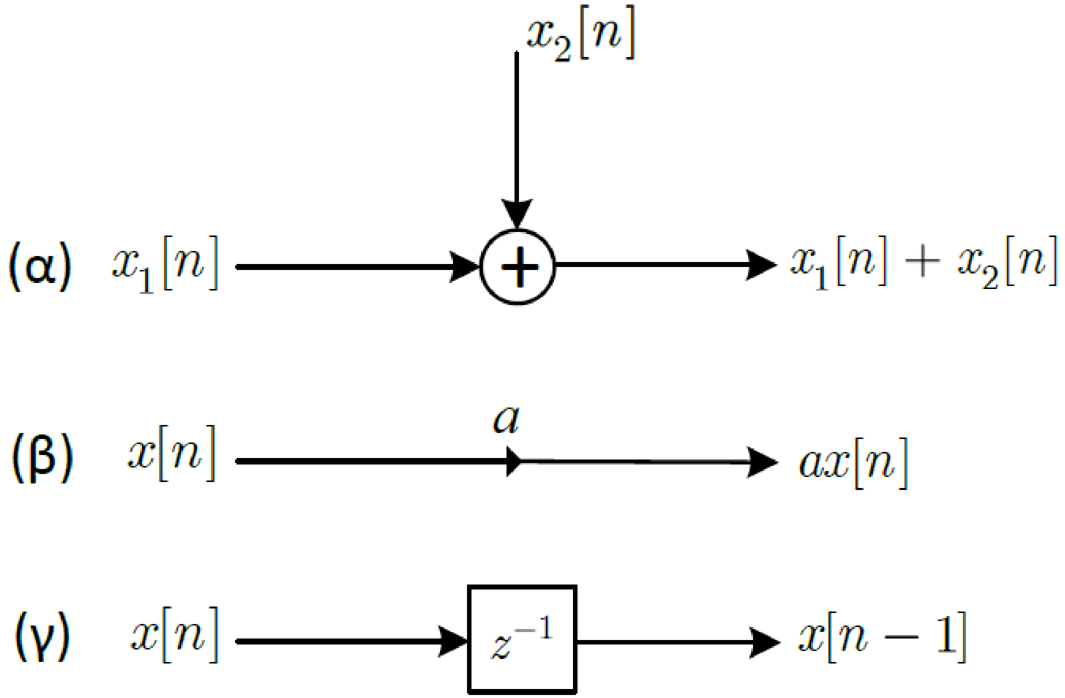


- Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Για να υλοποιήσουμε ένα σύστημα πρέπει να μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ή την εξίσωση διαφορών σε μια δομή που πραγματοποιείται από την υπάρχουσα τεχνολογία

- Βασικοί δομικοί λίθοι:
  - Πρόσθεση
  - Πολλαπλασιασμός
  - Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)



- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Έστω η εξίσωση διαφορών $y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = b_0 x[n]$
- Έχουμε πολλές επιλογές για την υλοποίησή της
- Κόστος:
  - ❑ Πλήθος πράξεων
  - ❑ Πλήθος θέσεων μνήμης
  - ❑ Ευρωστία σε πεπερασμένη αριθμητική ακρίβεια
- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

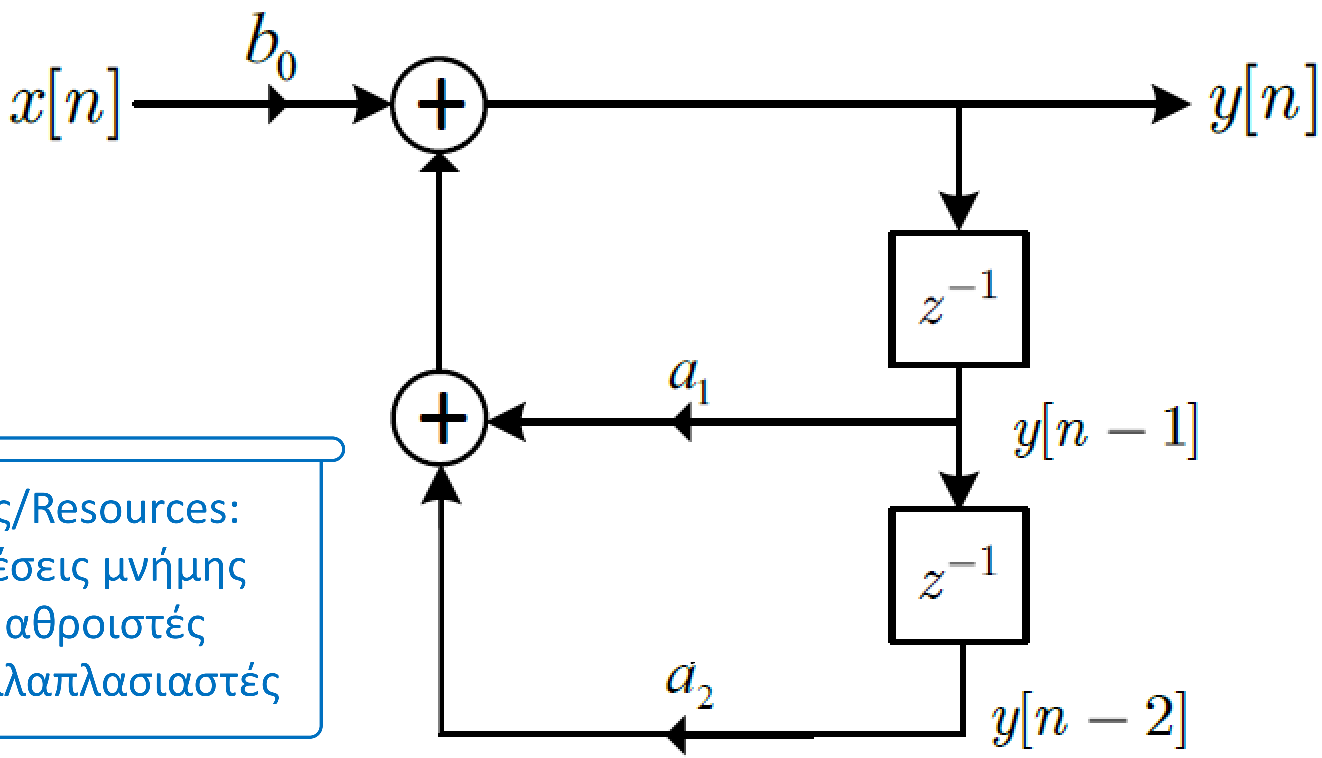
$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$

- Με βάση την εξίσωση διαφορών, μπορούμε κατασκευάσουμε μια δομή που την υλοποιεί

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$



Κόστος/Resources:
- 2 θέσεις μνήμης
- 2 αθροιστές
- 3 πολλαπλασιαστές

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Για μεγαλύτερης τάξης εξίσωσης διαφορών

$$y[n]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

- Ξαναγράφουμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n]=\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]+\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

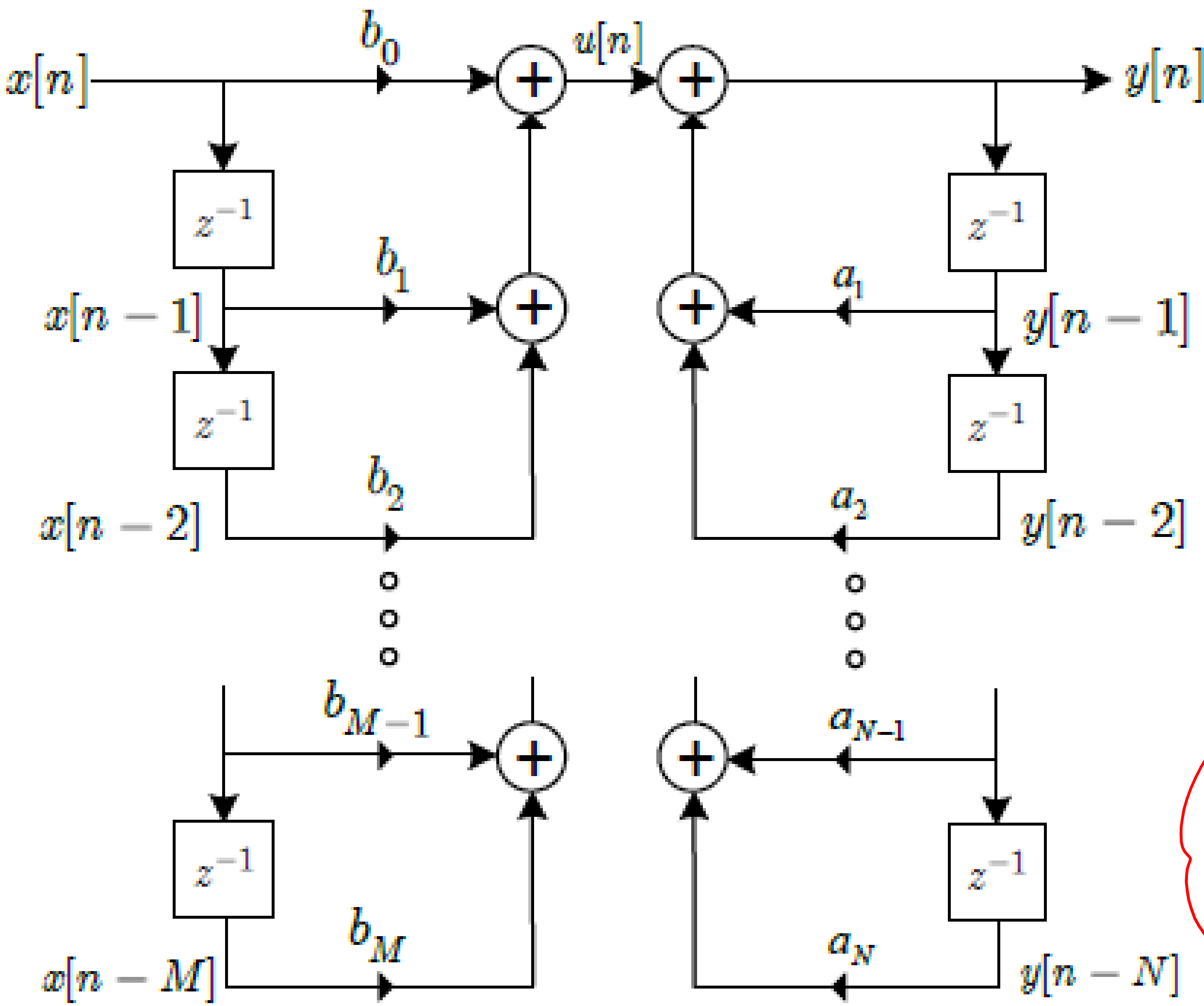
- Δυο υπο-εξισώσεις:

$$u[n]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

$$y[n]=\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]+u[n]$$

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

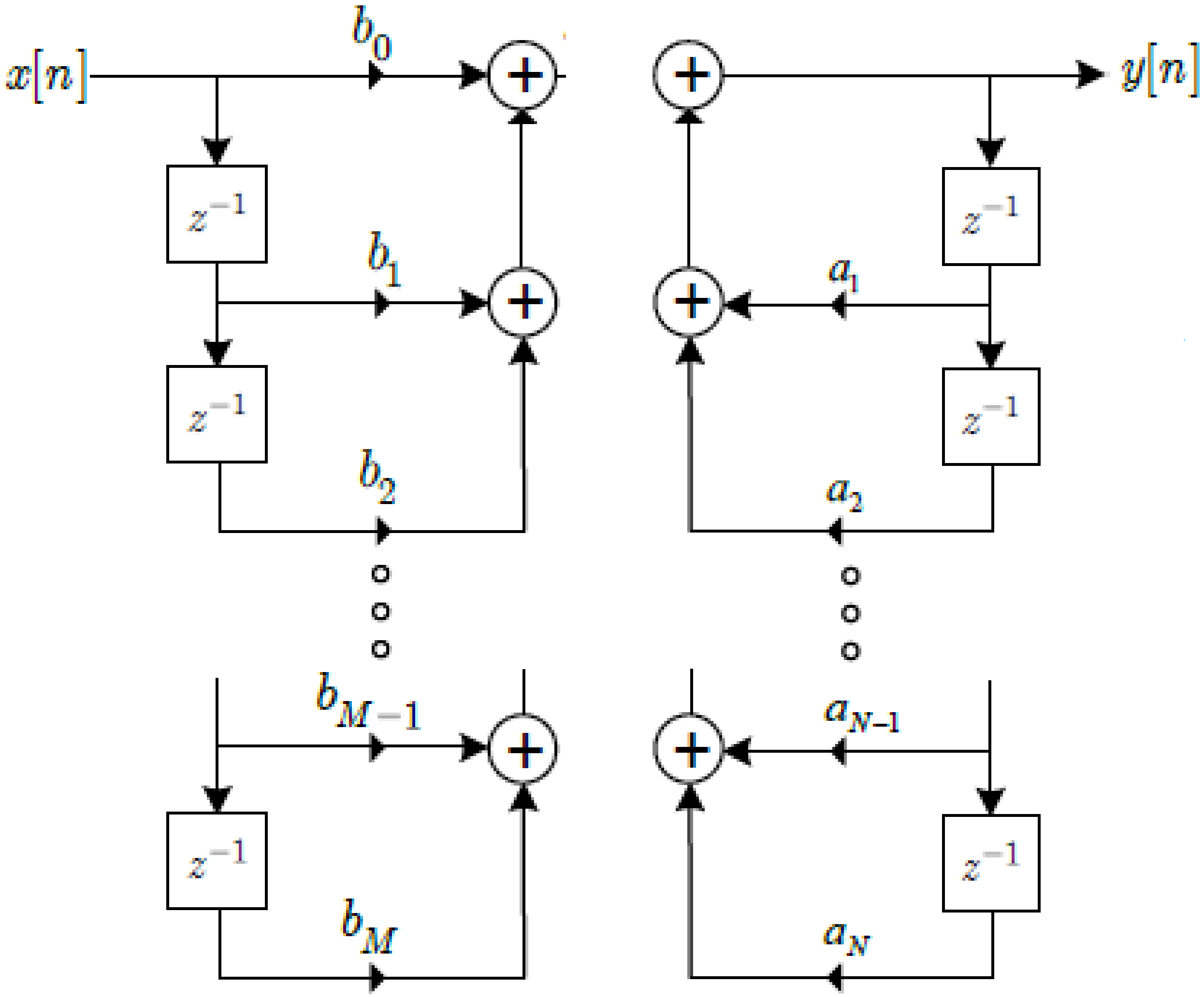
$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$



M+N
θέσεις
μνήμης

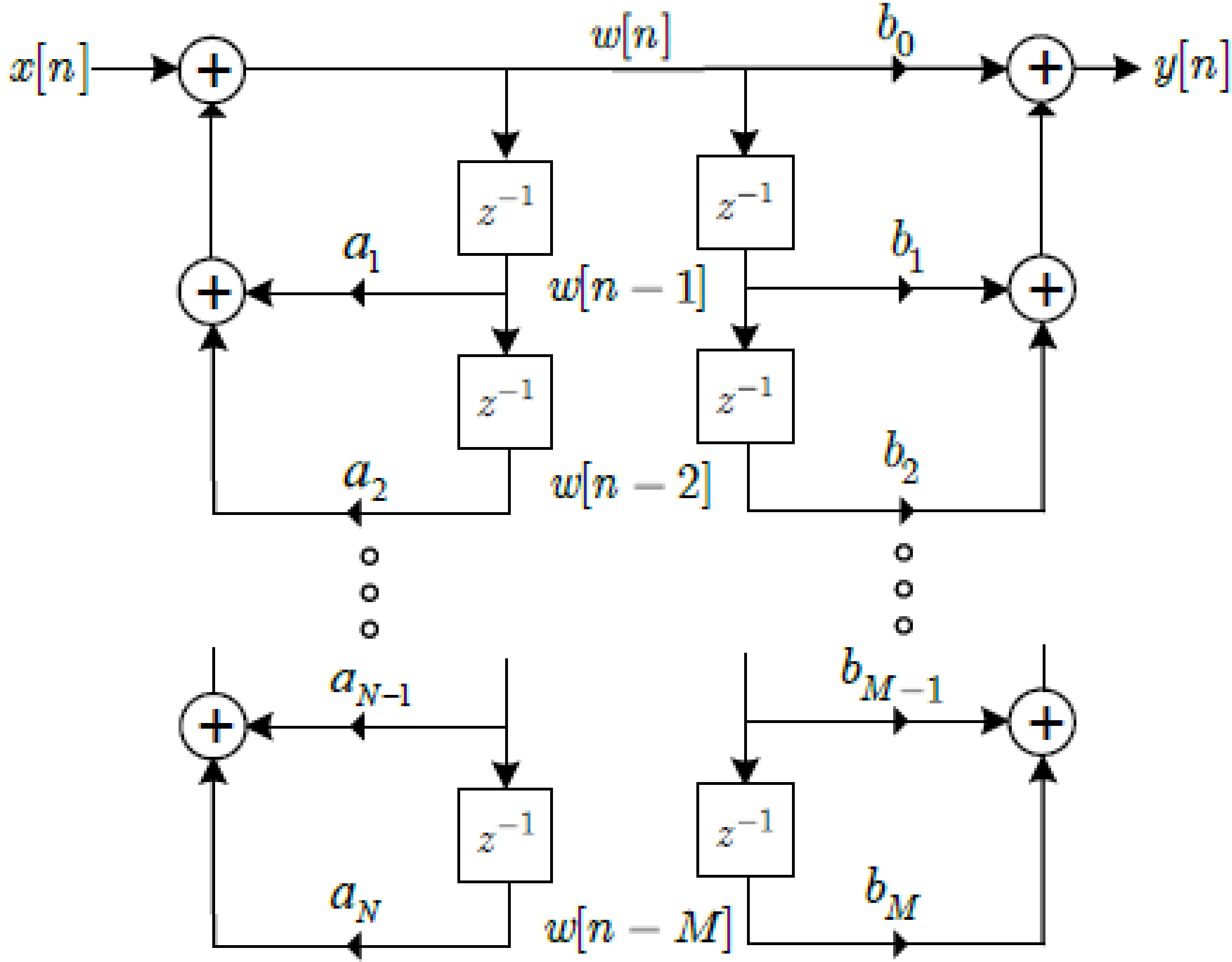
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad , \qquad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$

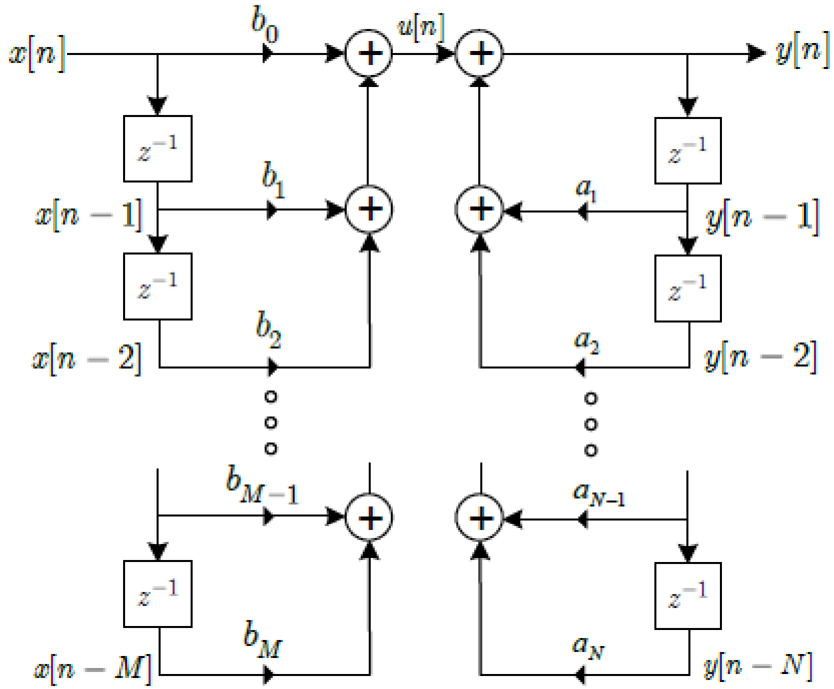


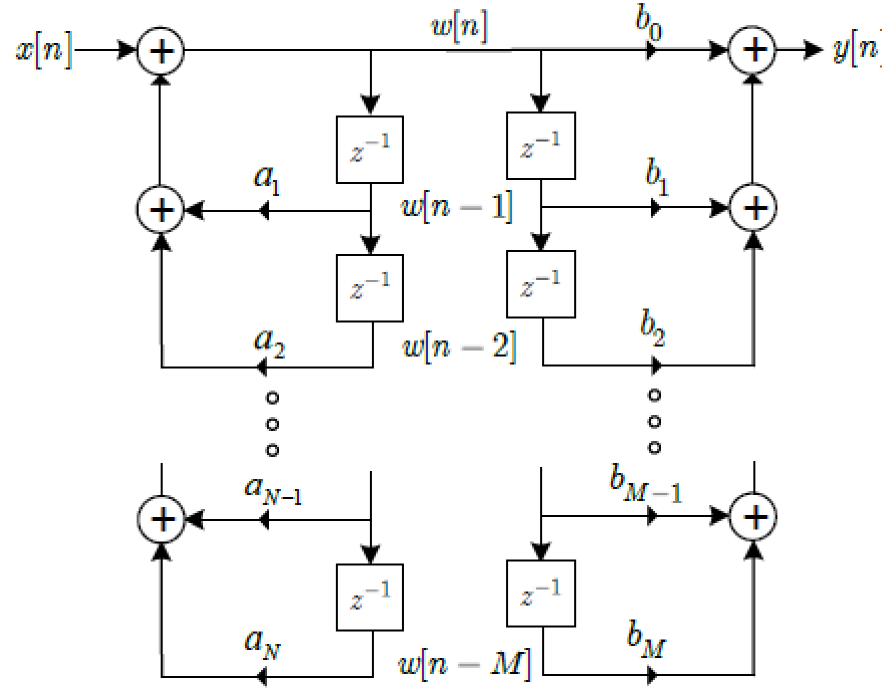
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$



- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

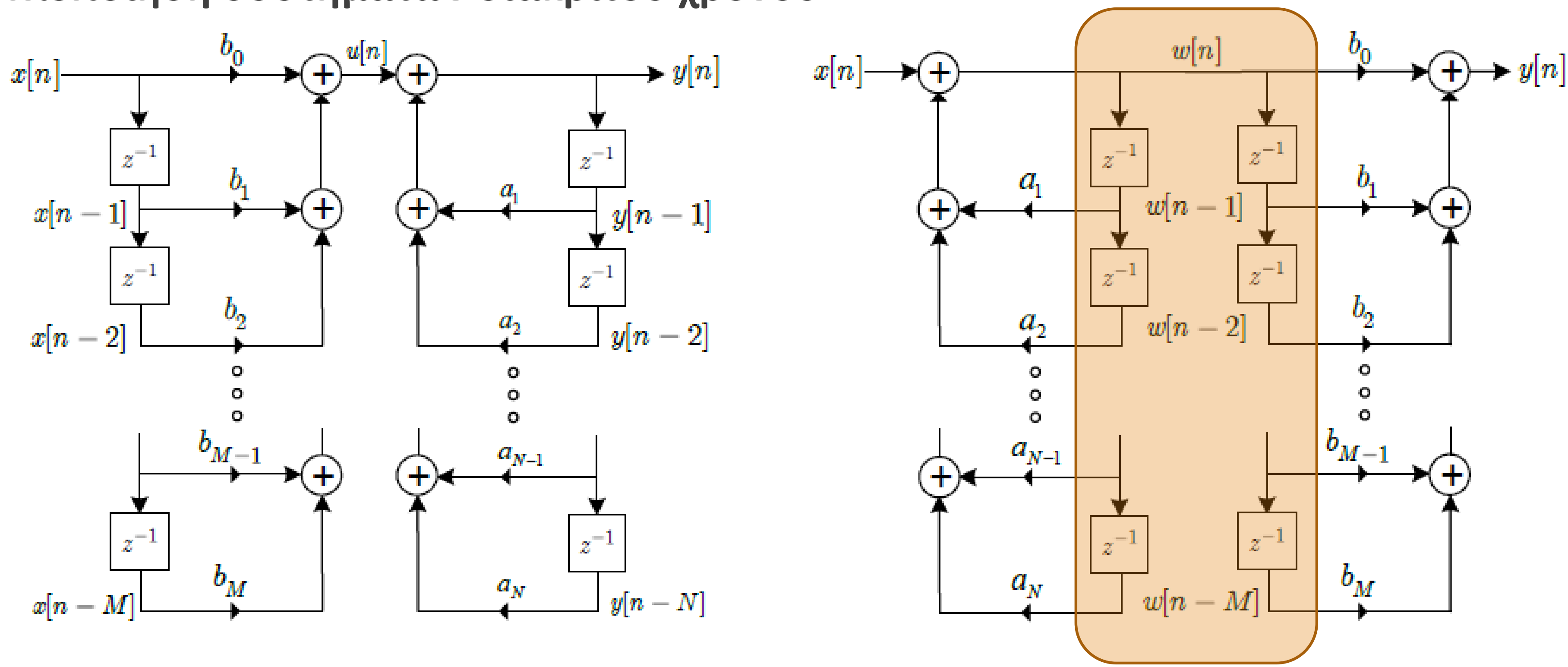




- Βασικές διαφορές των δυο υλοποιήσεων
  - ❑ Στην πρώτη, υλοποιούνται πρώτα τα μηδενικά και μετά οι πόλοι
  - ❑ Στη δεύτερη, υλοποιούνται πρώτα οι πόλοι και μετά τα μηδενικά

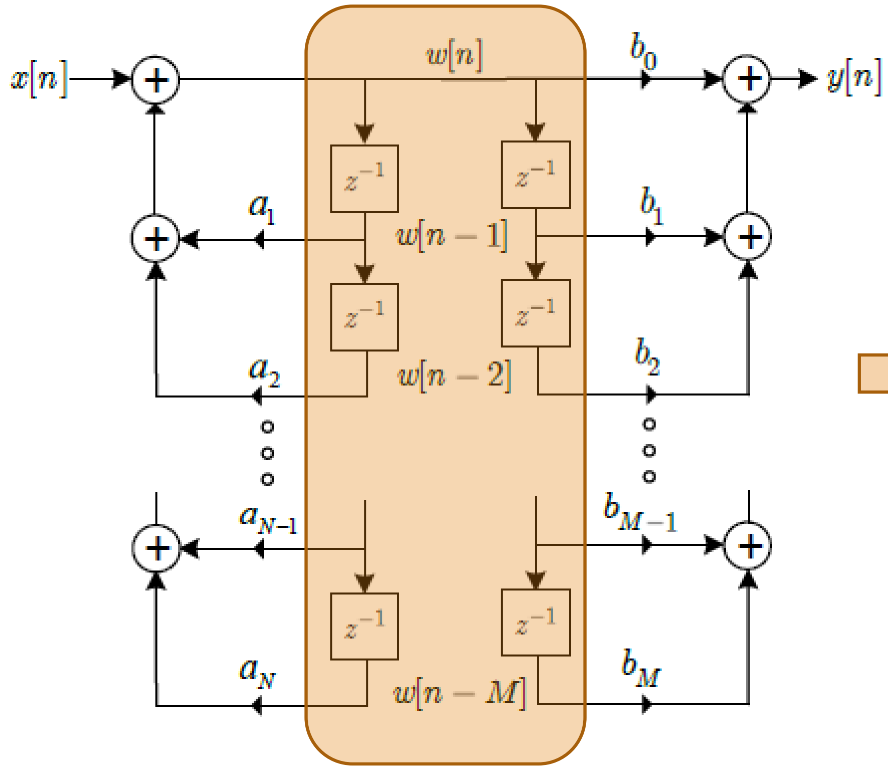
- Θεωρητικά, οι δυο υλοποιήσεις είναι ισοδύναμες
  - ❑ Πρακτικά, μπορεί να υπάρχουν σημαντικές διαφορές! (λόγω υλοποίησης σε πεπερασμένη ακρίβεια)

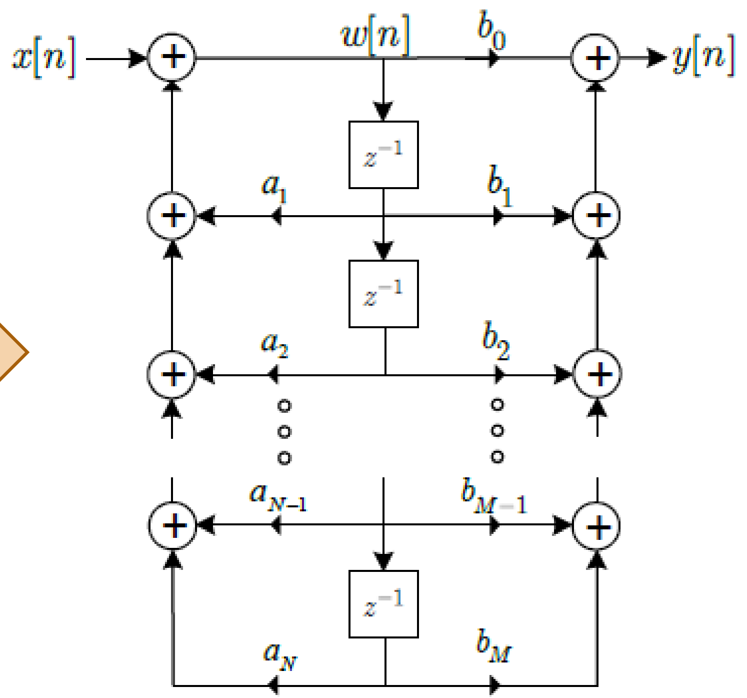
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**



- Παρατήρηση:
  - **Οι μεταβλητές $w[n-k]$ αποθηκεύονται δυο φορές στη δεύτερη υλοποίηση!**
  - Μπορούμε να «γλιτώσουμε» θέσεις μνήμης!
  - Μπορούμε να μοιράσουμε τις ίδιες θέσεις μνήμης και στους δυο κλάδους
  - Αν $M = N$ (όπως στο σχήμα), τότε γλιτώνουμε M θέσεις μνήμης
  - Αν $M \neq N$, τότε γλιτώνουμε $\min(M, N)$ θέσεις μνήμης

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**





- Η νέα υλοποίηση, που χρησιμοποιεί τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων καθυστέρησης (μνήμης) αναφέρεται ως **κανονική μορφή** (canonical form) ή **Direct Form II**

- Η μη κανονική μορφή στο αριστερό σχήμα ονομάζεται **Direct Form I**

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

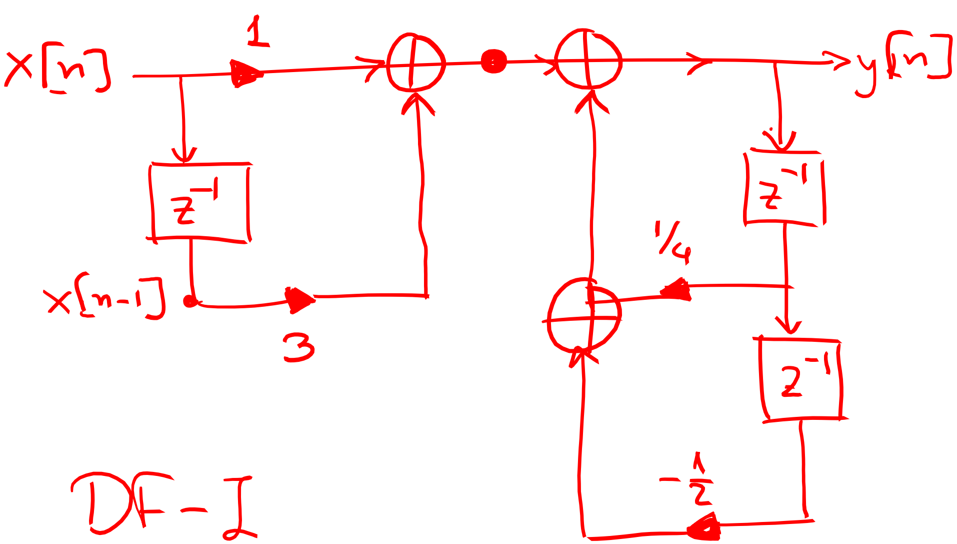
$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] + x[n] + 3x[n-1]$$

- Παράδειγμα:

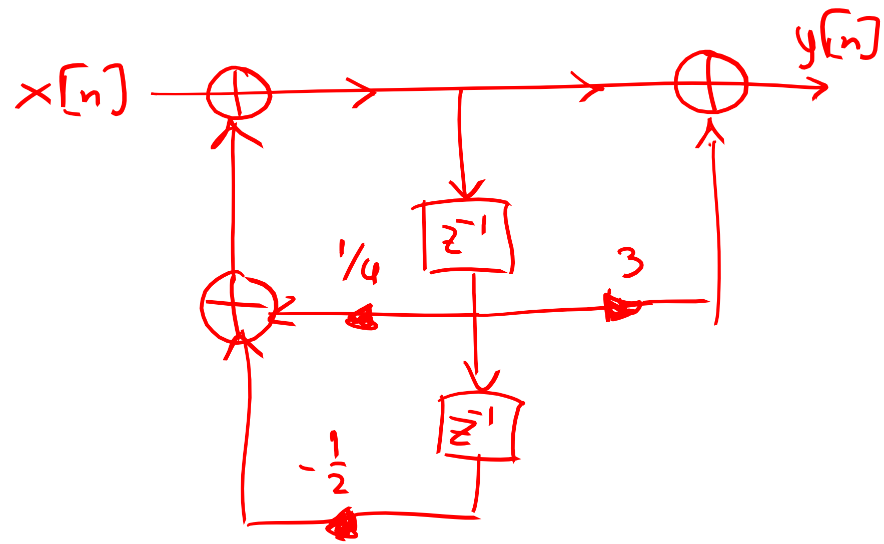
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1+3z^{-1}}{1-\left(\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



DF-I



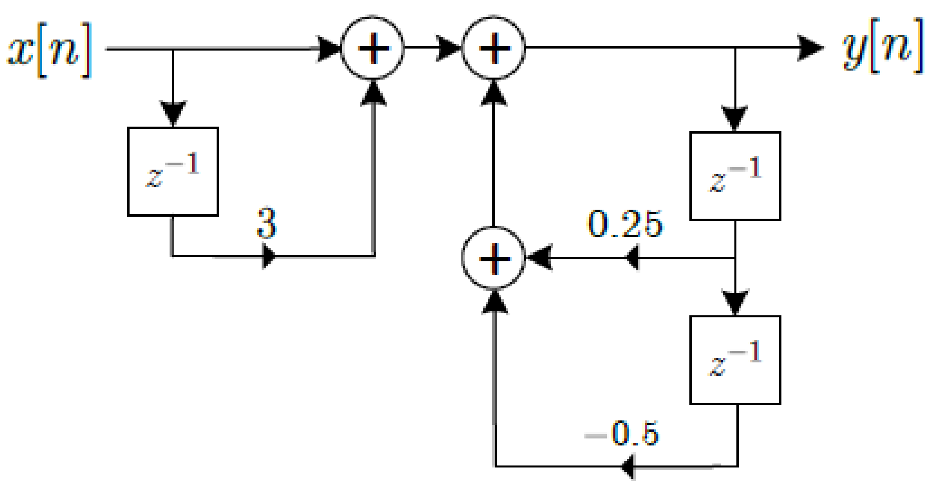
DF-II

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:

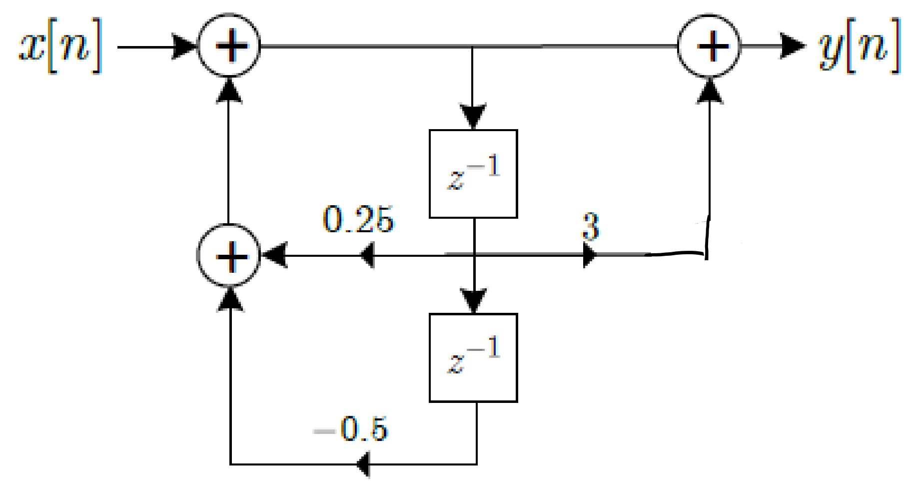
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



(α)



(β)

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Γνωρίζουμε ότι τα συστήματα χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες: FIR, IIR
- Ας δούμε πόσο διαφέρουν οι υλοποιήσεις ανάλογα με την κατηγορία
- Ξεκινάμε με τα IIR
- Θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις ενός IIR συστήματος
- Πώς επιλέγουμε την κατάλληλη;

  - ✓ **Πλήθος πολλαπλασιασμών → χρονοβόρα πράξη**
  - ✓ **Πλήθος καθυστερήσεων → κόστος σε μνήμη**
  - ✓ Εμβαδό, απλότητα, και αρθρωτή υλοποίηση → σημασία σε VLSI υλοποιήσεις
  - ✓ Καταμερισμός αλγορίθμου, επικοινωνία επεξεργαστών → πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον
  - ✓ Ευρωστία σε πεπερασμένη ακρίβεια → προτίμηση από πιο οικονομικές υλοποιήσεις

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Μορφή σε σειρά (cascade form)

$$x \longrightarrow \boxed{H_1} \longrightarrow \boxed{H_2} \longrightarrow \boxed{H_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{H_N} \longrightarrow y[n]$$

- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-e_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_k z^{-1})(1-g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

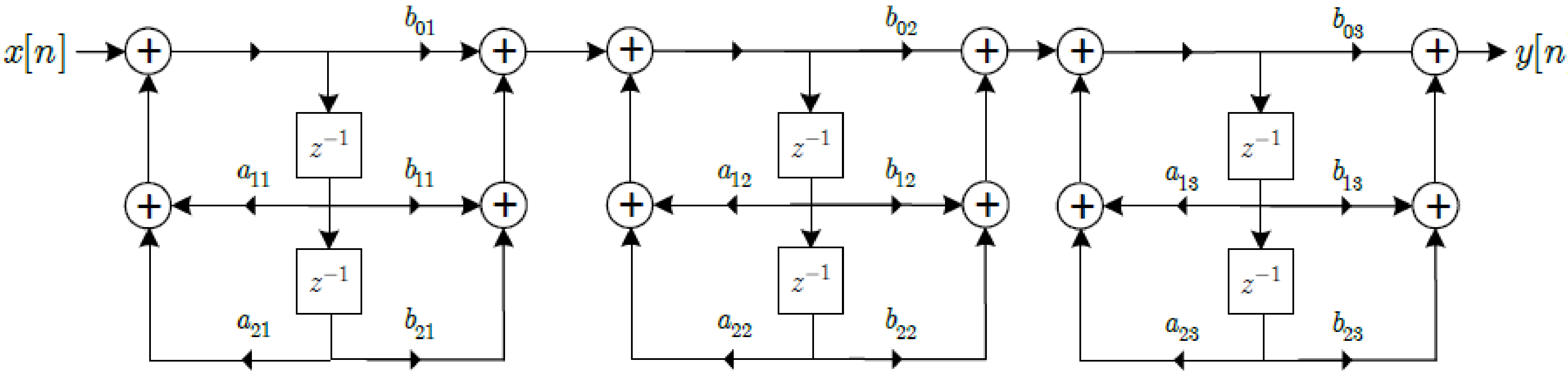
με $N = N_1 + 2N_2, \quad M = M_1 + 2M_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Μορφή σε σειρά (cascade form)
- Παράδειγμα 6ης τάξης



- Οργανωμένο σε υποσυστήματα δευτέρας τάξης Direct Form II

$$H(z) = \prod_{k=1}^{3} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

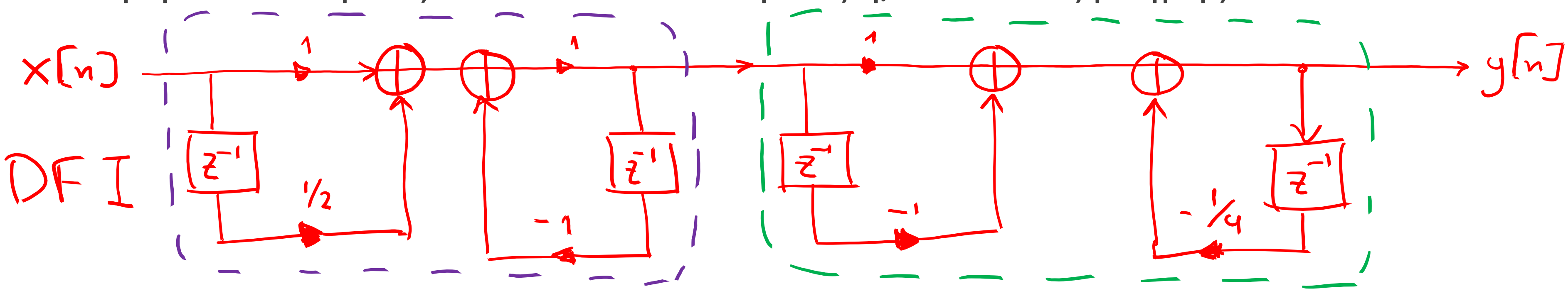
$$\rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-(-1)z^{-1}\right)\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)z^{-1}\right)}$$

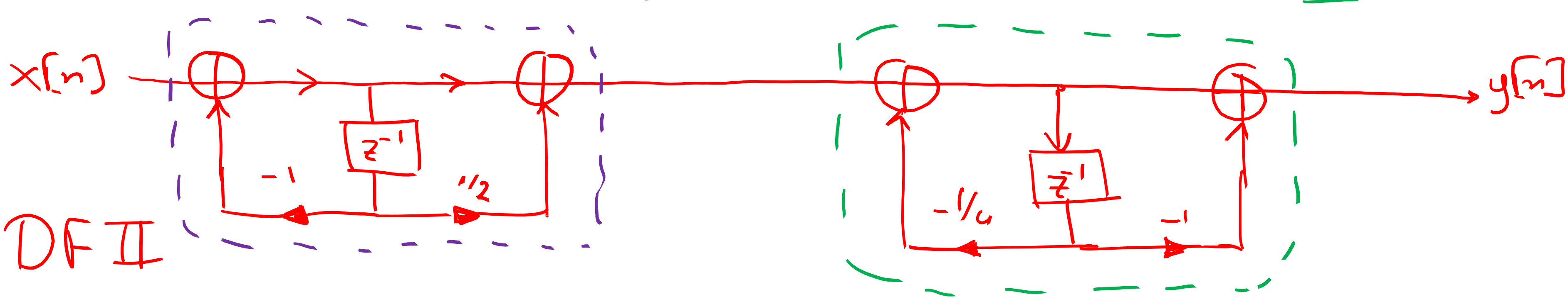
$\parallel$

  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων και αναφέρετε το κέρδος σε πολλαπλασιασμούς ή/και θέσεις μνήμης





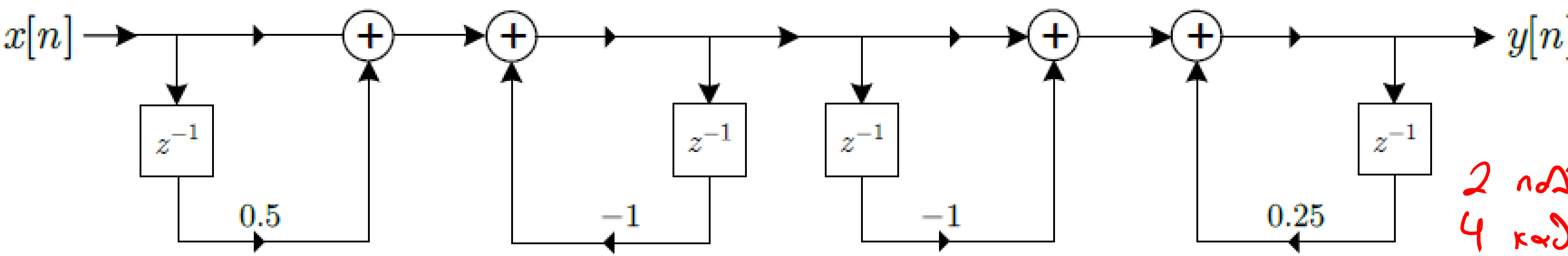
- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

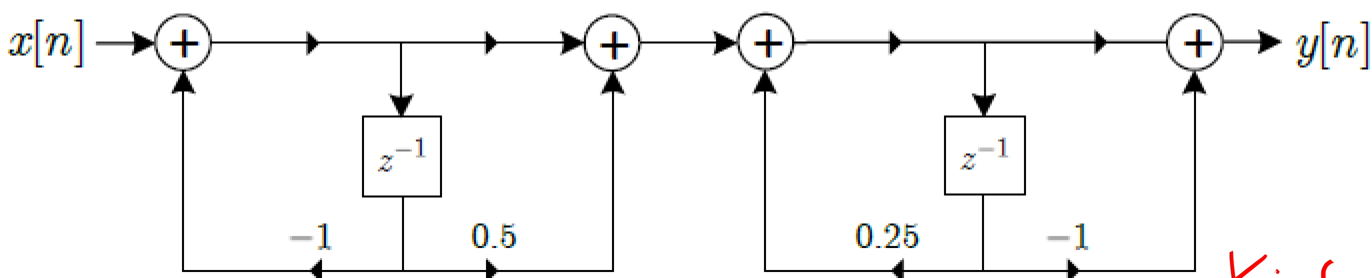
$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων



(α)

2 πολλ/στες
4 καθυστ.
4 αθροιστ.



(β)

4 αθροιστ.
2 καθυστ.
2 πολλ/στες

Κέρδος: 2 μνήμες!

- **Υλοποίηση** **IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
  - Προκύπτει από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Συνάρτηση μεταφοράς

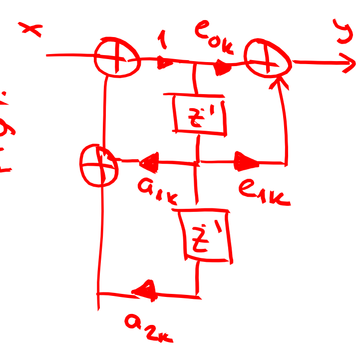
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \overbrace{\frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}}^{H_k(z)}$$

π.χ. DF II



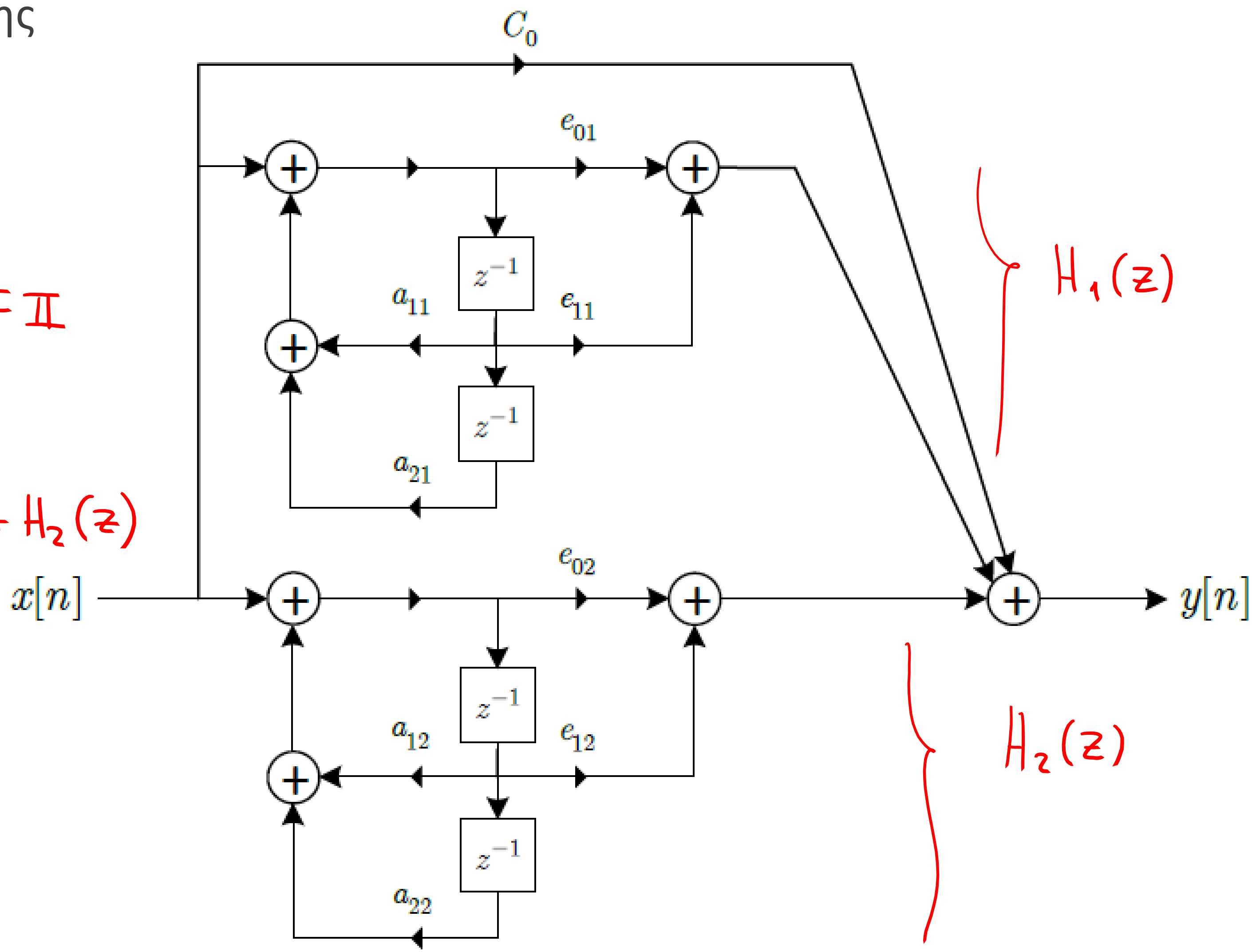
δευτεροβάθμια

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
- Παράδειγμα 4ης τάξης

Οργάνωση σε υποσυστήματα DF II δευτέρου βαθμού

$H(z) = C_0 + H_1(z) + H_2(z)$



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}} \quad \begin{matrix} \rightsquigarrow 2^{ης}\ \beta \\ \rightsquigarrow 2^{ης}\ \beta \end{matrix}$$

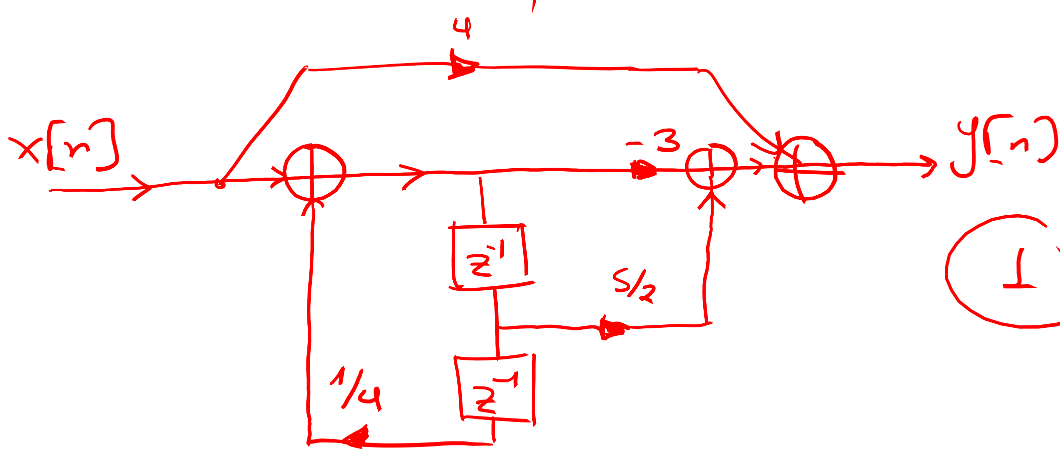
~~ΑΣΚ~~

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης

$$\begin{array}{r|l} -z^{-2} + \frac{5}{2}z^{-1} + 1 & -\frac{1}{4}z^{-2} + 1 \\ \cline{2-2} -(-z^{-2} + 0z^{-1} + 4) & 4 \\ \hline 0z^{-2} + \frac{5}{2}z^{-1} - 3 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow H(z) = 4 + \frac{-3 + \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (1)$$

$$= 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2)$$



(1)

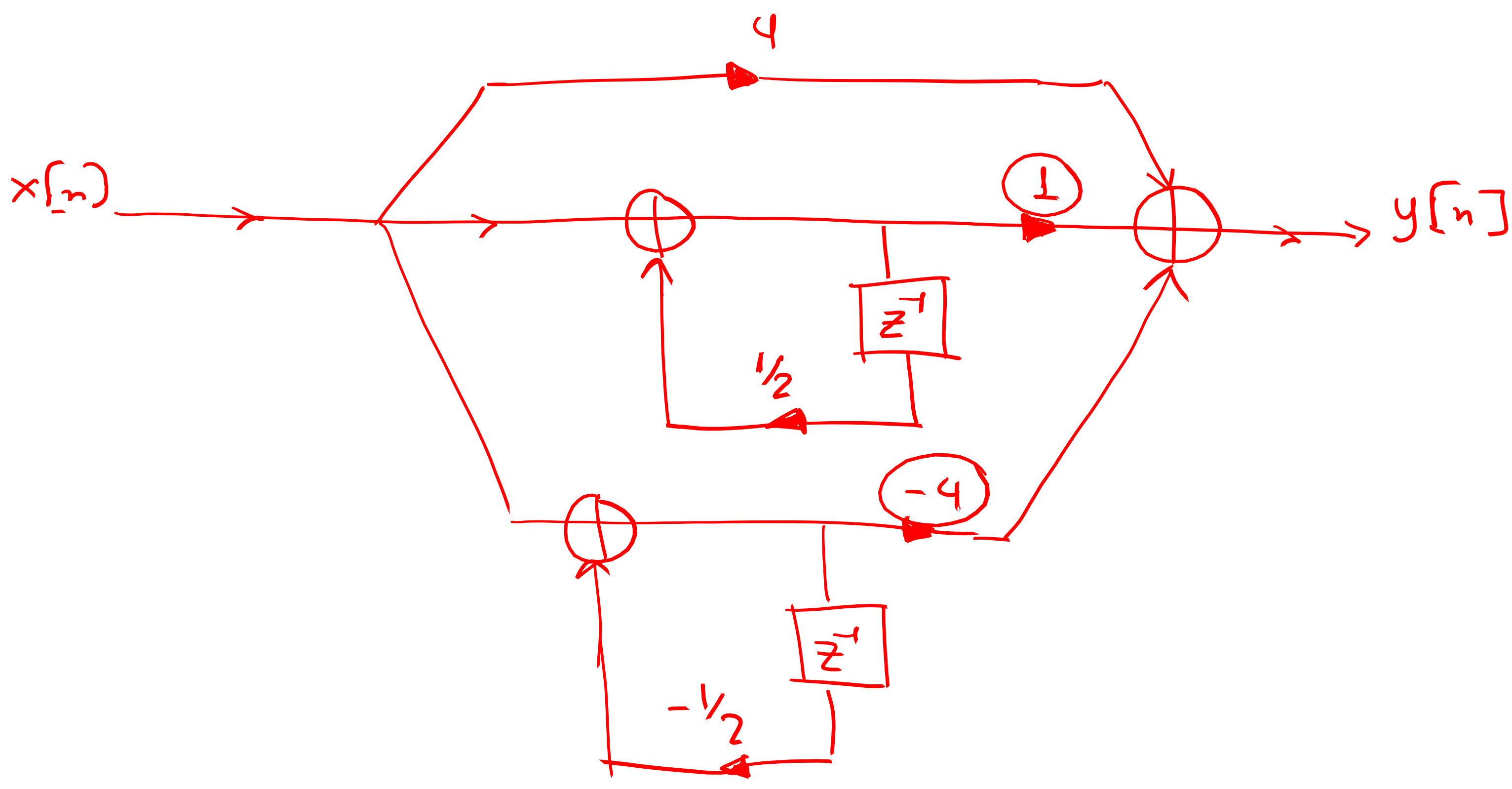
Υλοποίηση με δευτεροβάθμιο υποσύστημα

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$H(z) = 4 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

- Παράδειγμα:

Υλοποίηση της 2:



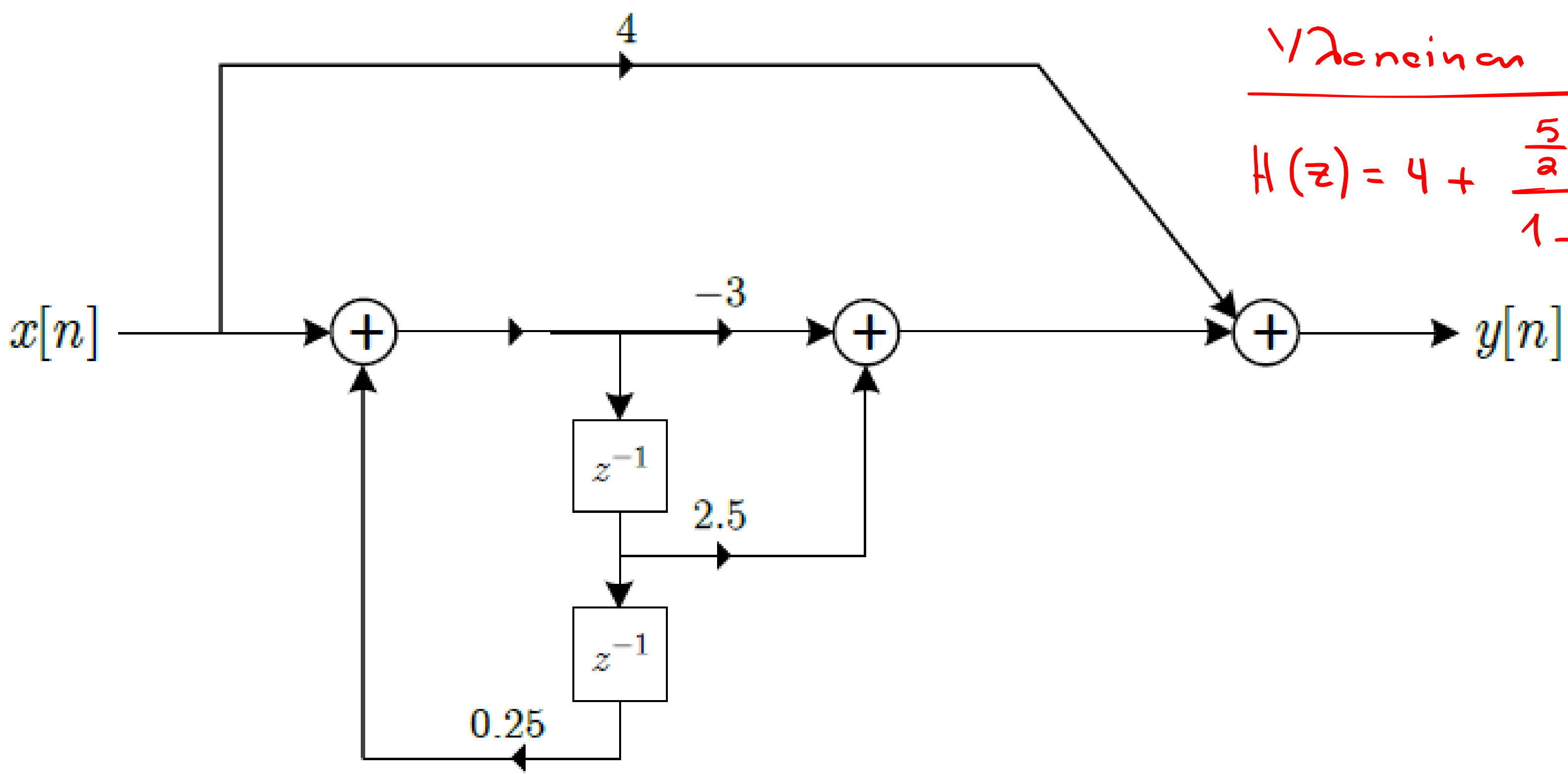
- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης



Υλοποίηση της 1

$$H(z) = 4 + \frac{\frac{5}{2} z^{-1} - 3}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

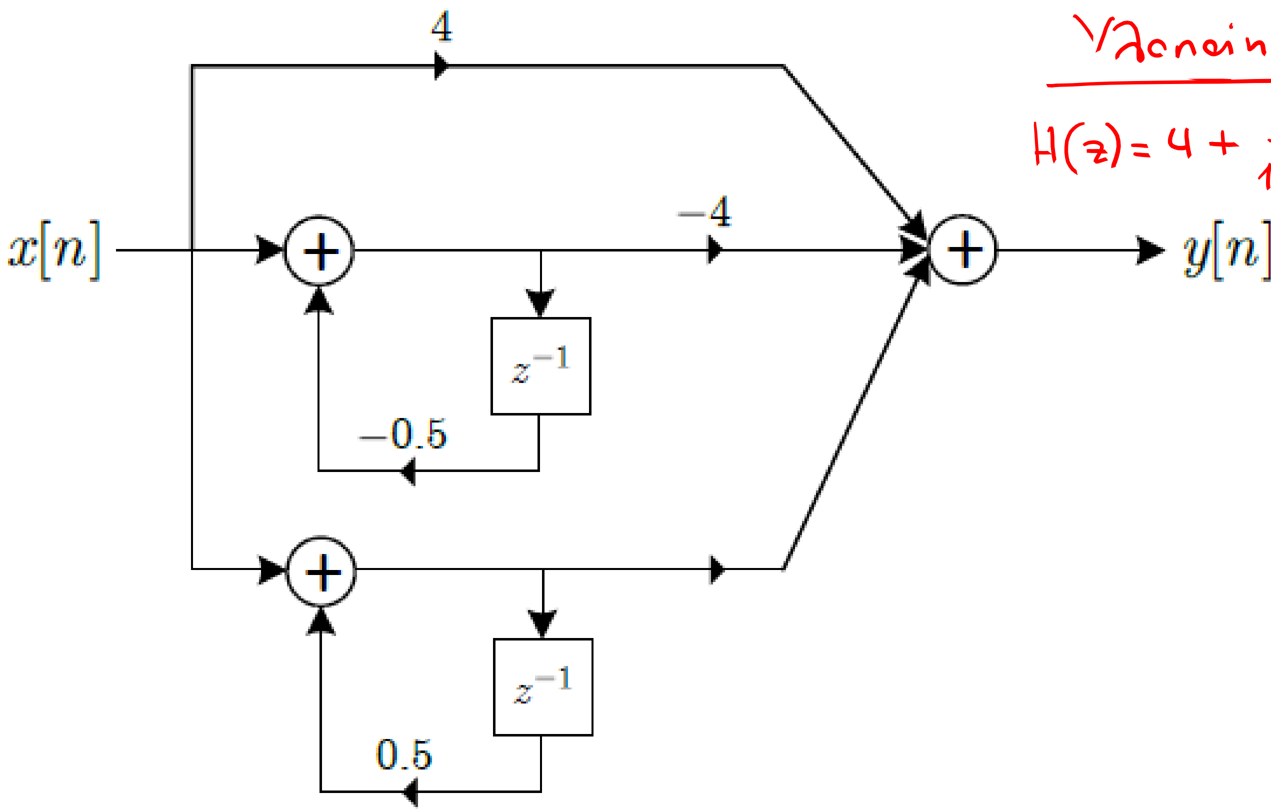
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης

Υλοποίηση τη 2

$$H(z) = 4 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$



Συνεχίζεται... ☺