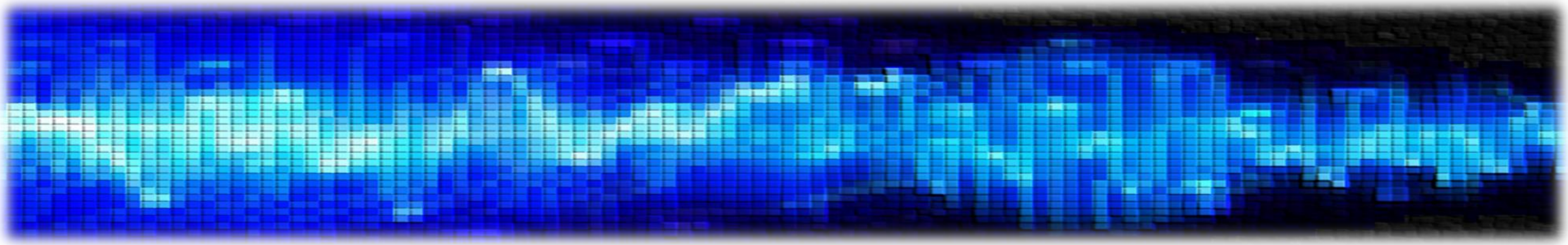
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η



- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης (cont’d)
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης (review…)**

- Συστήματα **με όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου**

- Εναλλακτικά, **συστήματα αιτιατά και ευσταθή, και με αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο σύστημα**

- Γιατί τα συστήματα αυτά ονομάζονται ***ελάχιστης φάσης***?

- Η επιλογή του ονόματος προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους

- Ας τη δούμε, μαζί με άλλες δυο σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H_{min}\left(e^{j\omega}\right) + \angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right) \leq 0 \quad \forall \quad \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) \leq \angle H_{min}(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **απόκριση φάσης με τις μεγαλύτερες τιμές** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Εναλλακτικά, αν ορίσουμε την συνάρτηση «καθυστέρηση φάσης» ως την αρνητική της απόκρισης φάσης

$$\theta(\omega) = -\angle H(e^{j\omega})$$

  τότε **το αιτιατό και ευσταθές σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την καθυστέρηση φάσης με τις μικρότερες τιμές** από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης φάσης», αλλά έχει επικρατήσει απλά το «ελάχιστης φάσης»

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

- Κατά συνέπεια

$$\mathrm{grd}\left[H(e^{j\omega})\right] = \mathrm{grd}\left[H_{min}(e^{j\omega})\right] + \mathrm{grd}\left[H_{ap}(e^{j\omega})\right]$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{grd}\left[H_{ap}(e^{j\omega})\right] > 0 \quad \forall \quad \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\mathrm{grd}\left[H(e^{j\omega})\right] > \mathrm{grd}\left[H_{min}(e^{j\omega})\right]$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **καθυστέρηση ομάδας με τις μικρότερες τιμές, δηλ. την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας», αλλά δε χρησιμοποιείται αυτός ο όρος

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Μπορεί να δειχθεί ότι η κρουστική απόκριση $h_{min}[n]$ ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και οι κρουστικές αποκρίσεις $h[n]$ άλλων συστημάτων με την ίδια απόκριση πλάτους ικανοποιούν τη σχέση ***μερικής ενέργειας***

$$E(n) \leq E_{min}(n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |h_{min}[k]|^2$$

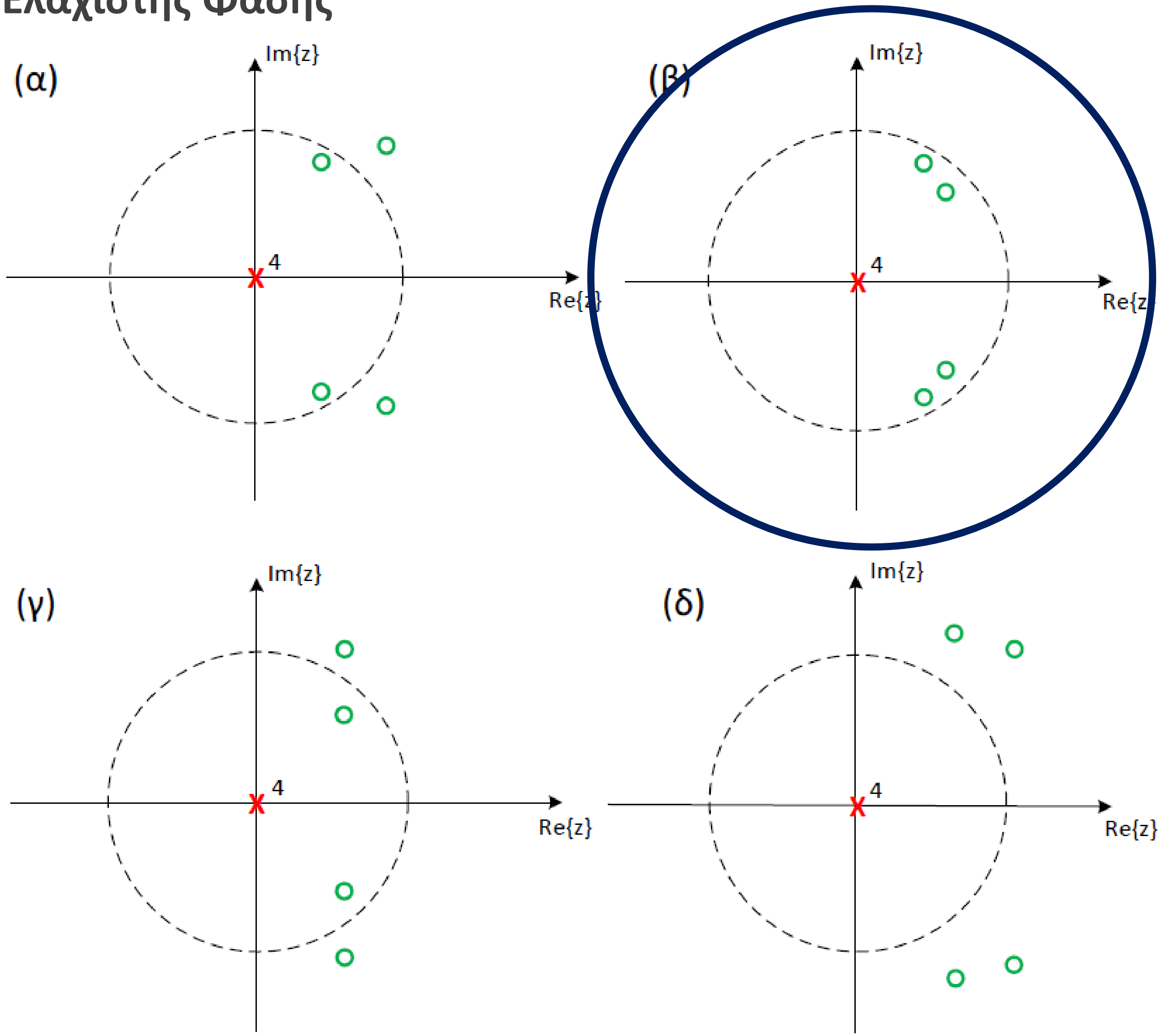
- Αυτή η σχέση σημαίνει ότι στα συστήματα ελάχιστης φάσης, η ***ενέργεια της*** **κρουστικής απόκρισης είναι περισσότερο συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της**

- Όλα τα άλλα συστήματα έχουν την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων διαφορετικά κατανεμημένη και πιο «διάσπαρτη»

- Προσέξτε, η ιδιότητα μιλά για την κατανομή της ενέργειας στα πρώτα δείγματα
  - Όχι για τη συνολική ενέργεια, η οποία είναι ίδια σε όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους!
    - Λόγω φυσικά του θεωρήματος Parseval

- Ας δούμε ένα παράδειγμα.

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**



- Ποιο σύστημα από τα τέσσερα είναι ελάχιστης φάσης? ☺

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

$$\sum_{k=0}^{n} |h[k]|^2$$

- Αν υπολογίσουμε τις κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με τα προηγούμενα διαγράμματα πόλων-μηδενικών, τότε παρατηρούμε την παρακάτω εικόνα για την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων αυτών των κρουστικών αποκρίσεων

Μερική ενέργεια συστημάτων

	$h_{min}[n]$	$h_1[n]$	$h_2[n]$	$h_3[n]$
$n=0$	1.00	0.41	0.65	0.27
$n=1$	5.12	3.32	3.95	2.49
$n=2$	11.21	9.76	10.39	8.58
$n=3$	13.44	13.05	13.30	12.71
$n=4$	13.71	13.71	13.71	13.71

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης**

- Ξέρουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να προκαλέσει σημαντική διαταραχή στη χρονική δομή ενός σήματος που δέχεται στην είσοδό του αν η απόκριση φάσης του δεν είναι σταθερή ή γραμμική

- Συστήματα **γραμμικής** φάσης είναι πολύ επιθυμητά και χρήσιμα στην πράξη
  - Καθυστερούν όλες τις συνιστώσες εισόδου το ίδιο στην έξοδο
  - Δε διαταράσσουν τη χρονική δομή του σήματος εισόδου

- Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση αν $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j(a\omega+\beta)}, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$

- Θα μας απασχολήσουν μόνο **FIR αιτιατά συστήματα γραμμικής φάσης**
  - …τα οποία είναι υποχρεωτικά ευσταθή, ως FIR ☺

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι τέτοια συστήματα ικανοποιούν κάποιες συμμετρίες στην κρουστική τους απόκριση

- Υπάρχουν 4 **κατηγορίες** ΓΧΑ FIR συστημάτων γραμμικής φάσης
  - …ανάλογα με το είδος της συμμετρίας της κρουστικής τους απόκρισης

- **Κατηγορίες : «Τύποι»: I, II, III, IV**

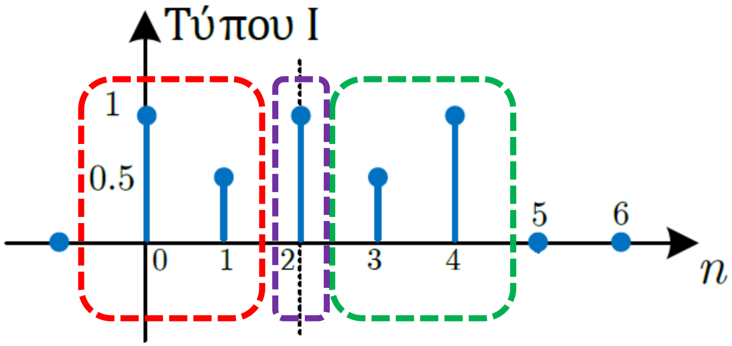
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου Ι έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M-n], \;\; 0 \leq n \leq M, \;\; \boldsymbol{M} \textbf{ άρτιο}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$

- Απόκριση Συχνότητας



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+2)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$n \coloneqq M-k$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{k=0}^{(M-2)/2} h[M-k]e^{-j\omega(M-k)} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$h[M-k] = h[k]$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{k=0}^{(M-2)/2} h[k]e^{-j\omega(M-k)} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$k := n$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega(M-n)} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

Κοινός παράγοντας το $e^{-\frac{j\omega M}{2}}$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{-j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

Euler

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} 2h[n]\cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right) + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

$m := \frac{M}{2} - n$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{m=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-m\right]\cos(\omega m) + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

Η αλλαγή στα άκρα του αθροίσματος προκύπτει από την τελευταία αλλαγή μεταβλητής $m := \frac{M}{2} - n$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**
- Οπότε συνολικά

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

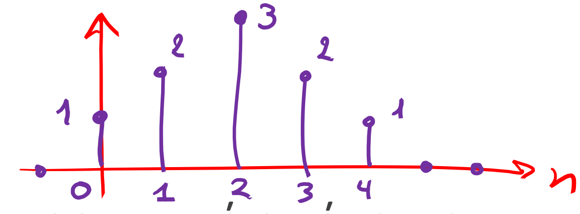
$$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

Όρος με γραμμική φάση $-\frac{\omega M}{2}$

Όρος με σταθερή φάση $0, \pm\pi$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**



- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας για το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$$

$n = 4 = M$

Είναι

$$h[n] = h[0]\delta[n] + h[1]\delta[n-1] + h[2]\delta[n-2] + h[3]\delta[n-3] + h[4]\delta[n-4]$$

$$= 1\cdot\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 1\cdot\delta[n-4]$$

$h[0]=h[4]$
$h[1]=h[3]$
Συμμετρία!

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + 1\cdot e^{-j4\omega}$$

$$= (1 + e^{-j4\omega}) + 2(e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}) + 3e^{-j2\omega}$$

$$= e^{-j2\omega}\left[e^{j2\omega} + e^{-j2\omega} + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 3\right] \in \mathbb{R}$$

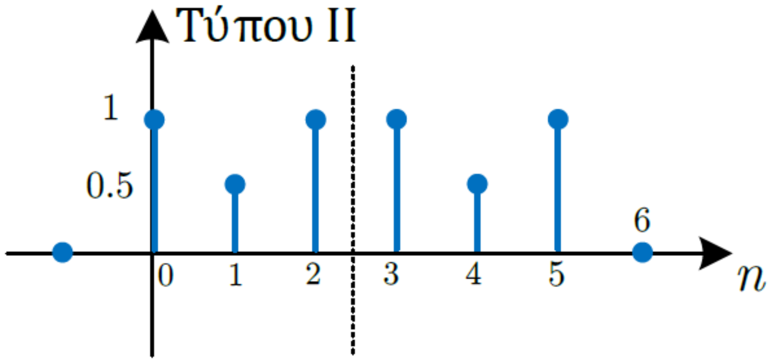
$$= e^{-j2\omega}\left(\overset{=h[0]}{2}\cos(2\omega) + \overset{=h[1]}{4}\cos(\omega) + \overset{=h[2]}{3}\right) = e^{-j2\omega}A(e^{j\omega})$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου ΙΙ**

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου ΙΙ έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M-n],\ \ 0 \le n \le M,\ \ \boldsymbol{M}\ \textbf{περιττό}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$



- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

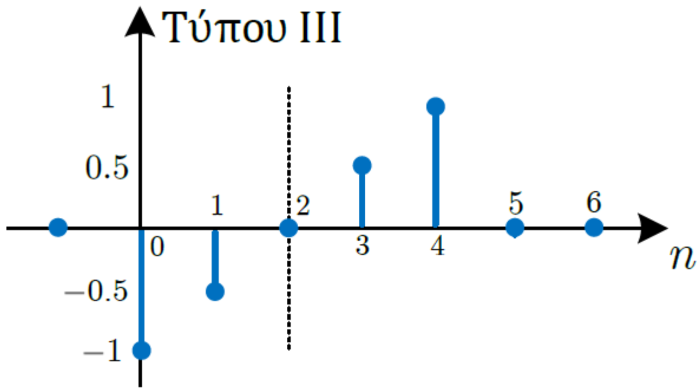
$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου ΙΙΙ**

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου ΙΙΙ έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M-n],\quad 0 \le n \le M,\quad \boldsymbol{M} \textbf{ άρτιο}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$



- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

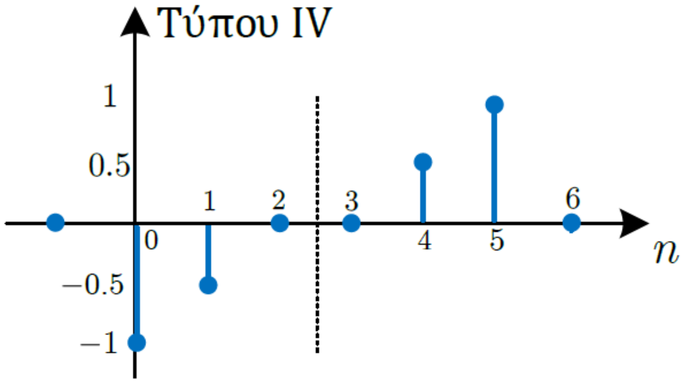
με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV**
- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου IV έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \boldsymbol{M} \textbf{ περιττό}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

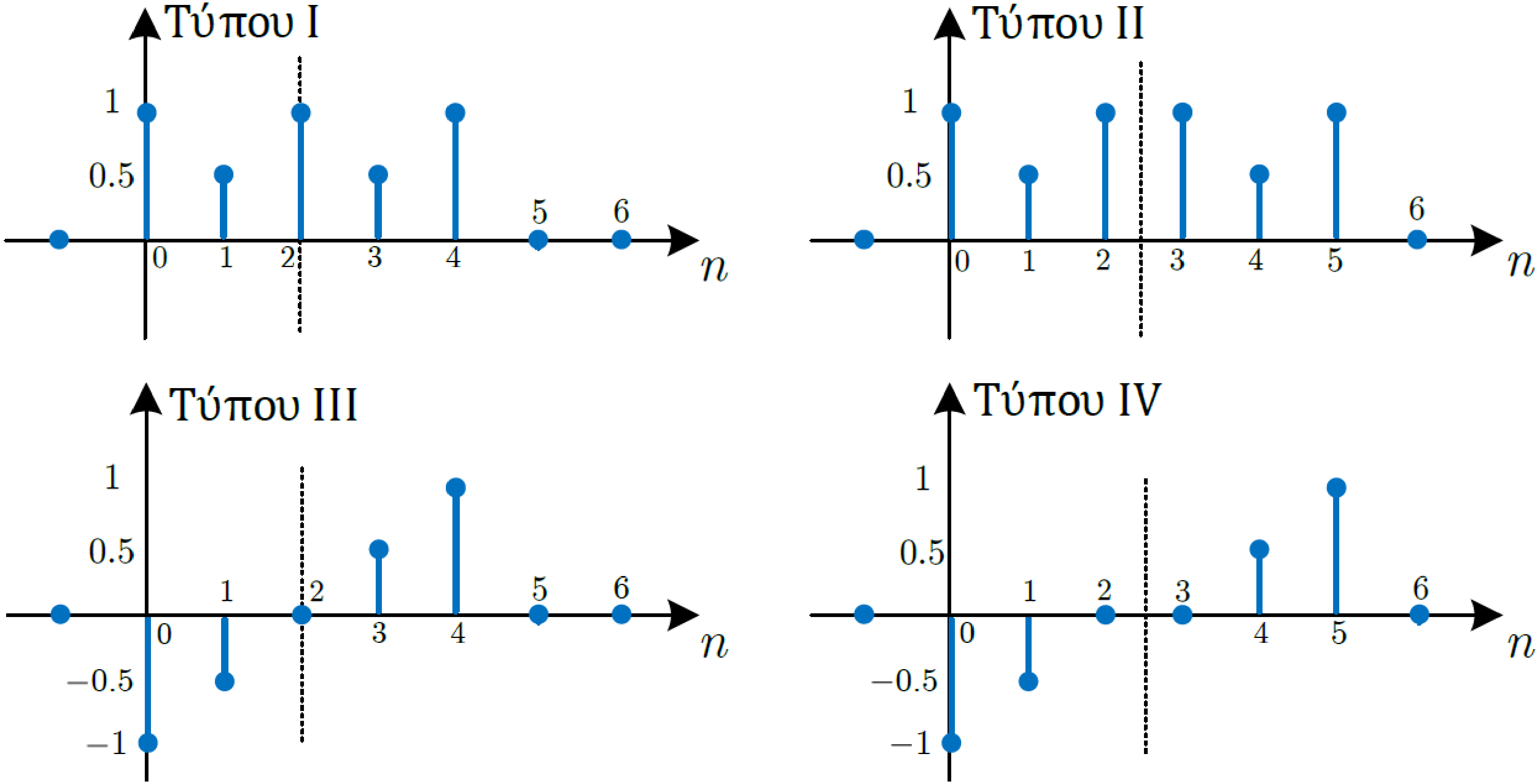
με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2, \cdots, \frac{M+1}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη**

Τύπου I – συμμετρική h[n] – άρτιο M	**Τύπου II – συμμετρική h[n] – περιττό M**
$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$ με $a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$ $a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$ με $b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$
Τύπου III – αντισυμμετρική h[n] – άρτιο M	**Τύπου IV – αντισυμμετρική h[n] – περιττό M**
$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$ με $c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$ με $d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη**



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη**
- Συνολικά, η απόκριση συχνότητας των συστημάτων που είδαμε γράφεται

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} \sum p_k S(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} A(e^{j\omega})$$

- Το $A(e^{j\omega})$ είναι πραγματική συνάρτηση του ω και ονομάζεται «ψευδοπλάτος»
    - Ως πραγματική συνάρτηση, η φάση της θα είναι 0 ή $\pm\pi$
- Για $0 \leq \omega \leq \pi$, η απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ γράφεται

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2}, & \text{τύπου I, II,} \quad A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \pi, & \text{τύπου I, II,} \quad A(e^{j\omega}) < 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \dfrac{\pi}{2}, & \text{τύπου III, IV,} \quad \mathrm{A}(e^{j\omega}) > 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \dfrac{\pi}{2} + \pi, & \text{τύπου III, IV,} \quad \mathrm{A}(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Οι προηγούμενες σχέσεις δε μας δίνουν ιδιαίτερη διαίσθηση για τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικής φάσης στο χώρο της συχνότητας

- Θα πρέπει να περάσουμε στο χώρο του Ζ για να λάβουμε αυτήν την πληροφορία

- Προφανώς, για αιτιατά ΓΧΑ συστήματα γραμμικής φάσης, όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται στο $z = 0$
  - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Τύπου I, II: $h[n] = h[M-n] \leftrightarrow H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$
- Τύπου III, IV: $h[n] = -h[M-n] \leftrightarrow H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$

- Μας ενδιαφέρουν μόνο τα μηδενικά των συστημάτων, όπως είπαμε

- Παρατηρήστε από τις παραπάνω εξισώσεις στο χώρο του Z ότι:

❑ Αν $z = z_0$ ένα μηδενικό του συστήματος $H(z)$, τότε **υποχρεωτικά** και το $z = \frac{1}{z_0}$ είναι μηδενικό του συστήματος, ώστε να ικανοποιείται η γραμμική φάση

  ❑ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0}\right)$ λέγεται **αμοιβαίο**

  ❑ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0^*}\right)$ λέγεται **συζυγές αμοιβαίο** (όπως ξέρετε)

- Αν θέλουμε λοιπόν να σχεδιάσουμε ένα FIR γραμμικής φάσης με ένα μηδενικό στη θέση $z = z_0$, πρέπει **υποχρεωτικά** να βάλουμε κι ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$!!!
- Ειδάλλως, η φάση μας <u>**δε**</u> θα είναι γραμμική!

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Άρα, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση:

  - Το $H(z)$ γραμμικής φάσης μπορεί να έχει μηδενικά:

    - συζυγή και αμοιβαία (ταυτόχρονα), επάνω στο μοναδιαίο κύκλο: $z_k = e^{\pm j\theta_k}$

    - αμοιβαία, στον πραγματικό άξονα: $z_k = a, z_k = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$

    - αμοιβαία, αλλού: $z_k = r_k e^{j\theta_k}, r_k \neq 1$ και $z_k = \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k}$

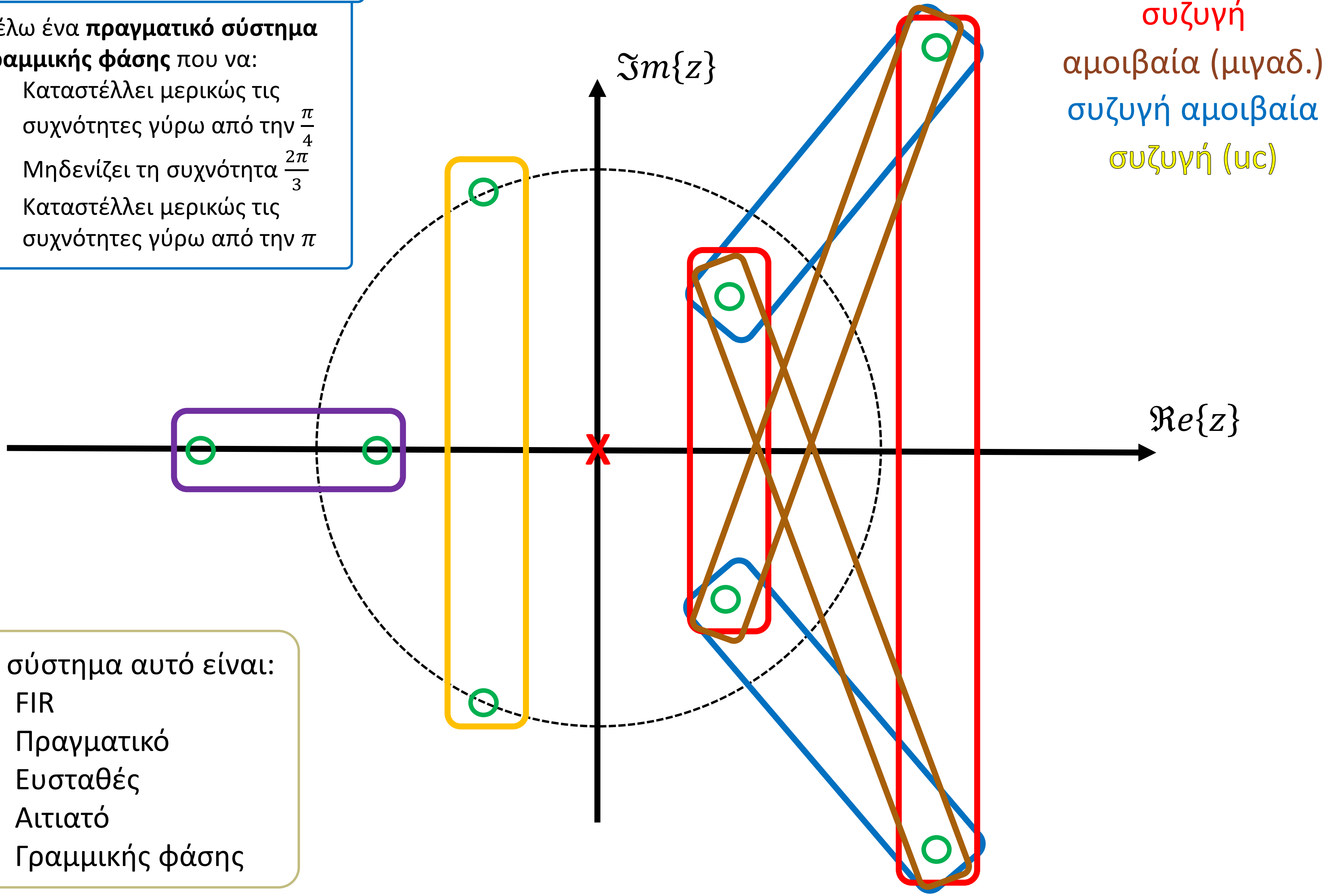
  - Αν επιπλέον το $H(z)$ αντιστοιχεί σε πραγματικό σύστημα ($h[n] \in \mathbb{R}$), τότε το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μιγαδικών μηδενικών (αφού κάθε μιγαδικό μηδενικό θα «φέρνει» μαζί και το συζυγές του, εκτός από το αμοιβαίο του)

$$\left(z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k}\right)$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Θέλω ένα **πραγματικό σύστημα γραμμικής φάσης** που να:

- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την $\frac{\pi}{4}$
- Μηδενίζει τη συχνότητα $\frac{2\pi}{3}$
- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την π



Το σύστημα αυτό είναι:

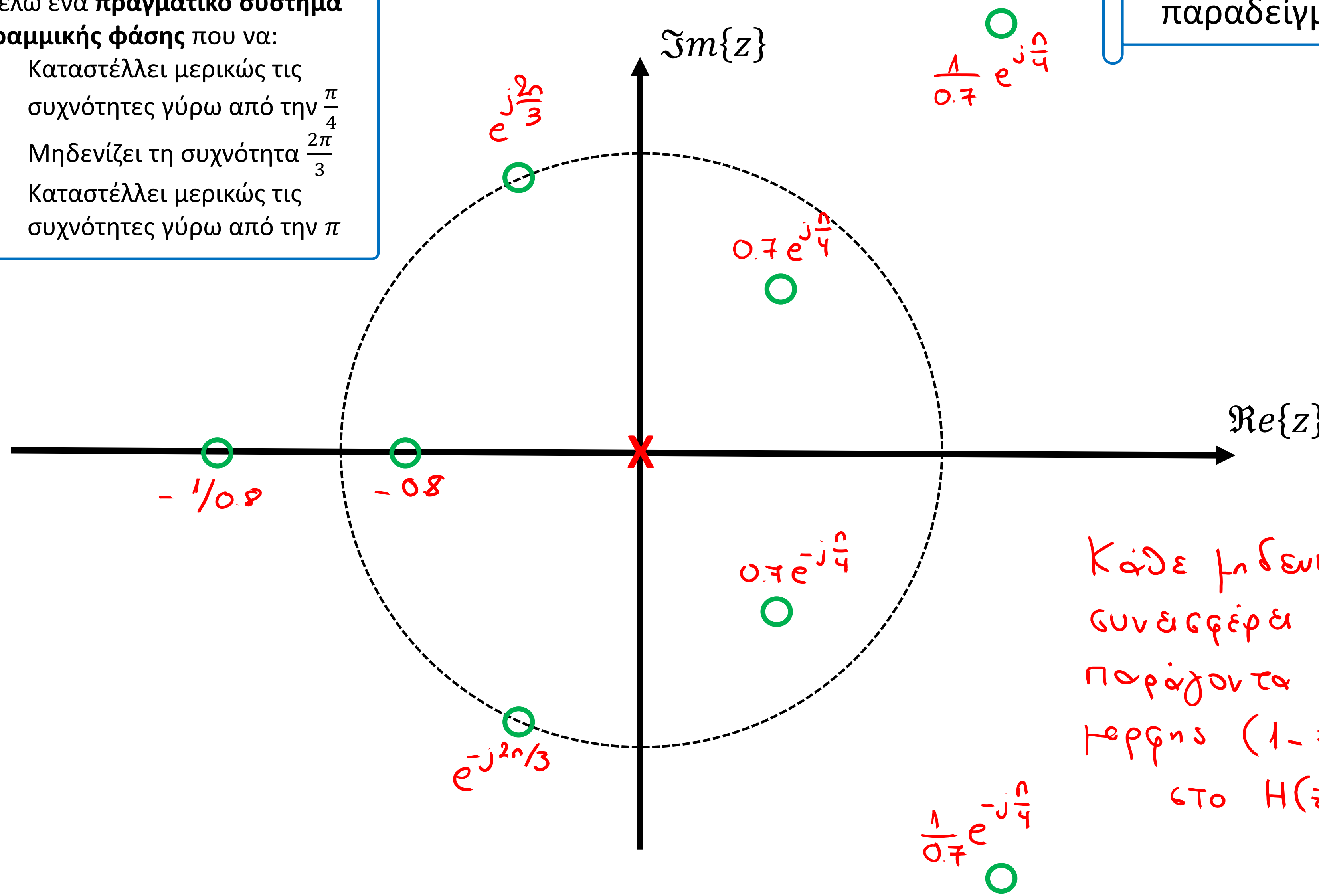
- FIR
- Πραγματικό
- Ευσταθές
- Αιτιατό
- Γραμμικής φάσης

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Επέκταση του παραδείγματος

Θέλω ένα **πραγματικό σύστημα γραμμικής φάσης** που να:

- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την $\frac{\pi}{4}$
- Μηδενίζει τη συχνότητα $\frac{2\pi}{3}$
- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την π



Κάθε μηδενικό z_0 συνεισφέρει έναν παράγοντα της μορφής $(1 - z_0 z^{-1})$ στο $H(z)$!

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

Επέκταση του παραδείγματος

Μπορούμε να γράψουμε :

$$H(z) = \left(1+0.8z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{0.8}z^{-1}\right)\cdot$$
$$\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-1}\right)\cdot$$
$$\left(1-0.7e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.7e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\cdot$$
$$\left(1-\frac{1}{0.7}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{0.7}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)$$
$$= \left(1+2.05z^{-1}+z^{-2}\right)\cdot$$
$$\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)\cdot$$
$$\left(1-0.9899z^{-1}+0.49z^{-2}\right)\cdot$$
$$\left(1-2.0203z^{-1}+2.0408z^{-2}\right)$$

$M=8,$

Τύπου I

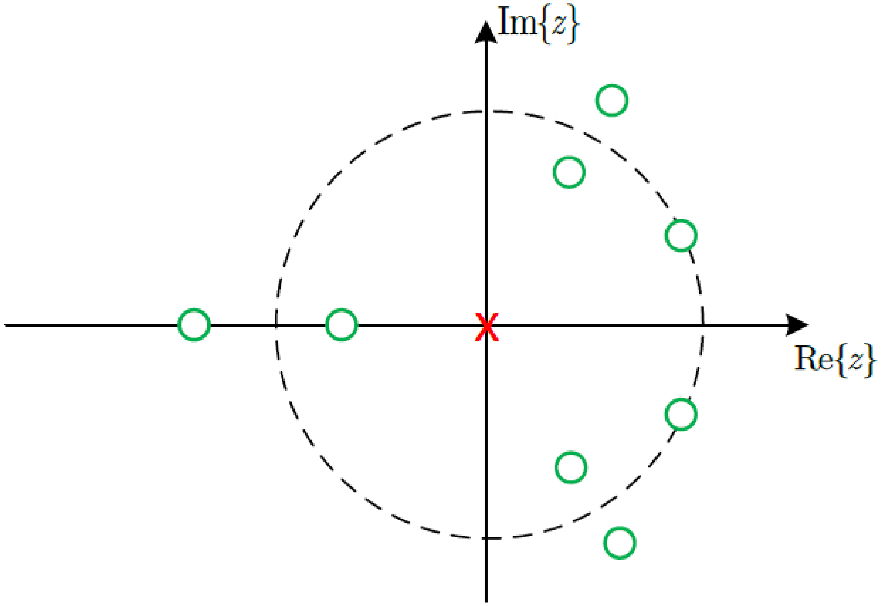
$$= \dots =$$
$$= 1+0.0397z^{-1}-0.6004z^{-2}+1.667z^{-3}+1.987z^{-4}+1.667z^{-5}-0.6004z^{-6}+0.0397z^{-7}+z^{-8}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$
  - ...δηλ. στις συχνότητες $\omega = 0$ και $\omega = \pi$...
    - ...αφού $z = 1 = e^{j0}$ και $z = -1 = e^{j\pi}$

- Τύπου I : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}, M$ άρτιο, για $z = 1$: ταυτότητα

- Τύπου I : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



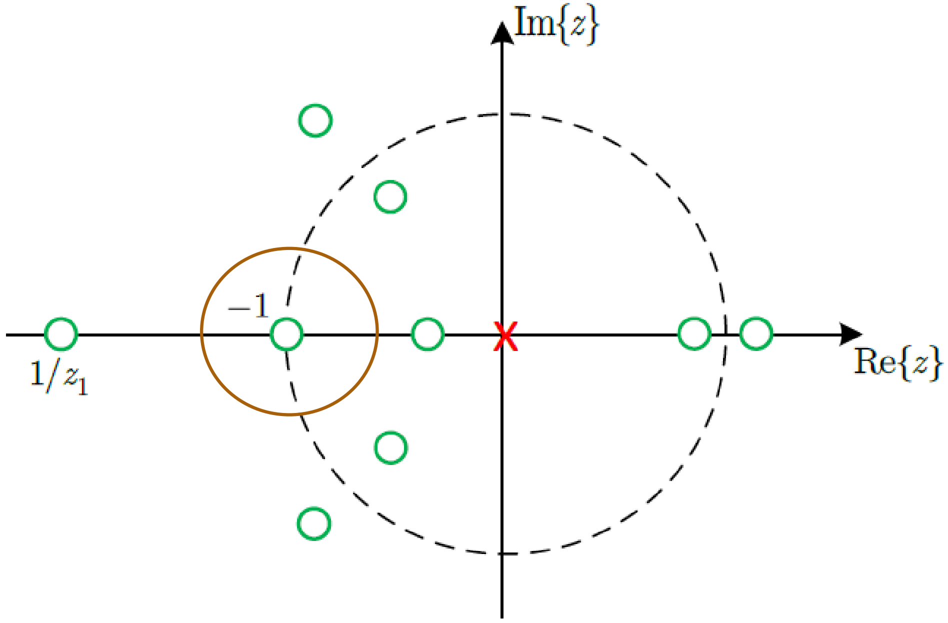
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$
  - ...δηλ. στις συχνότητες $\omega = 0$ και $\omega = \pi$...
    - ...αφού $z = 1 = e^{j0}$ και $z = -1 = e^{j\pi}$

- Τύπου ΙΙ : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = 1$: ταυτότητα

- Τύπου ΙΙ : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-$$



❑ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{II}\left(e^{j\pi}\right) = 0$!

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

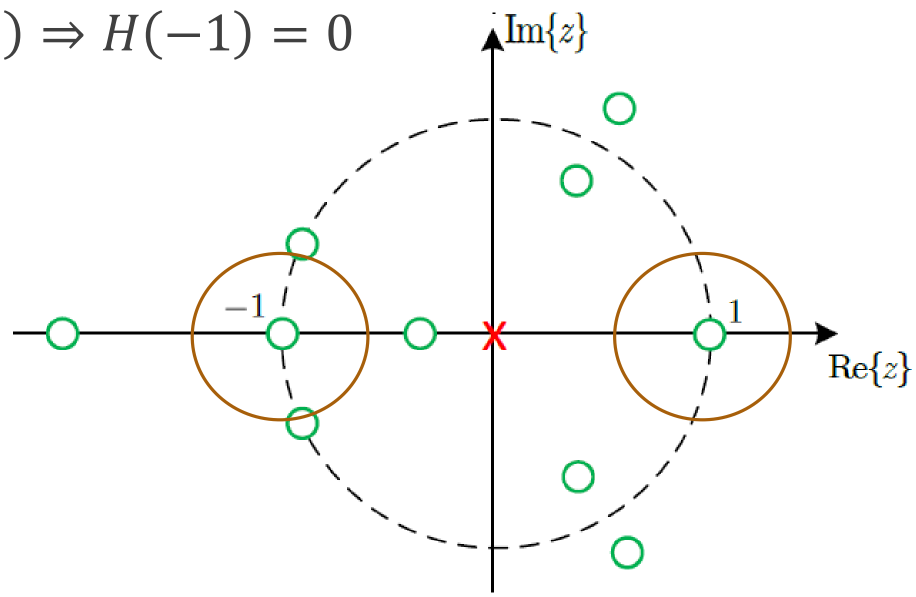
$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{III}(e^{j0}) = 0$!

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{III}(e^{j\pi}) = 0$!



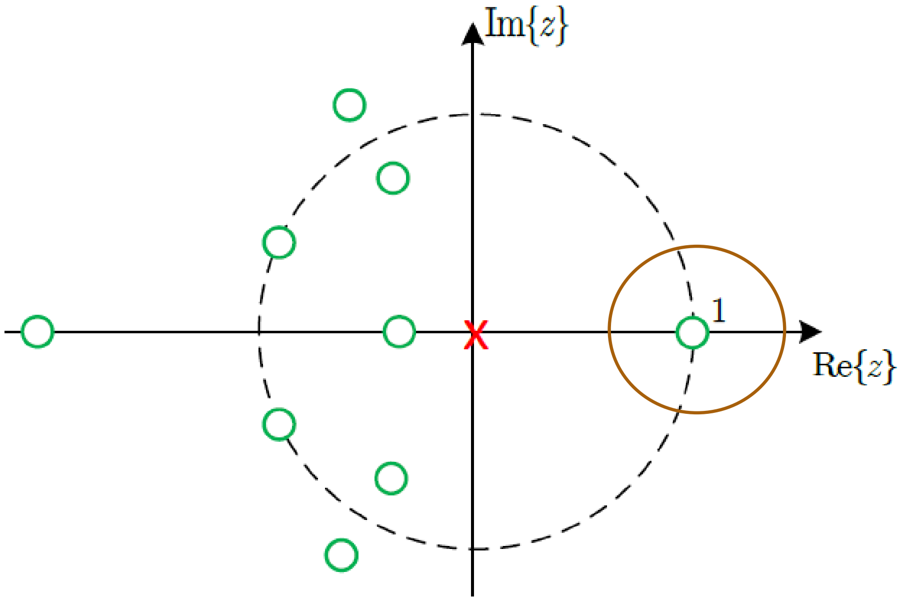
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{IV}\left(e^{j0}\right) = 0$!

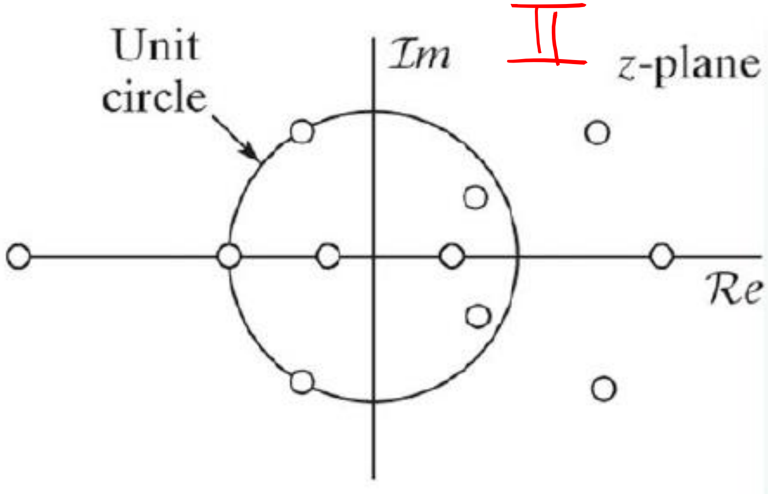
- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα

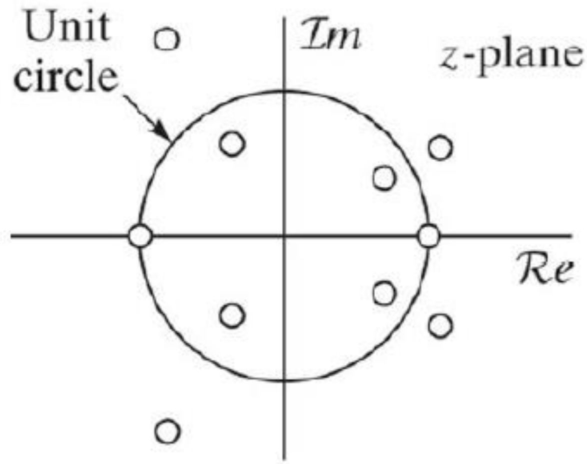


• Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη

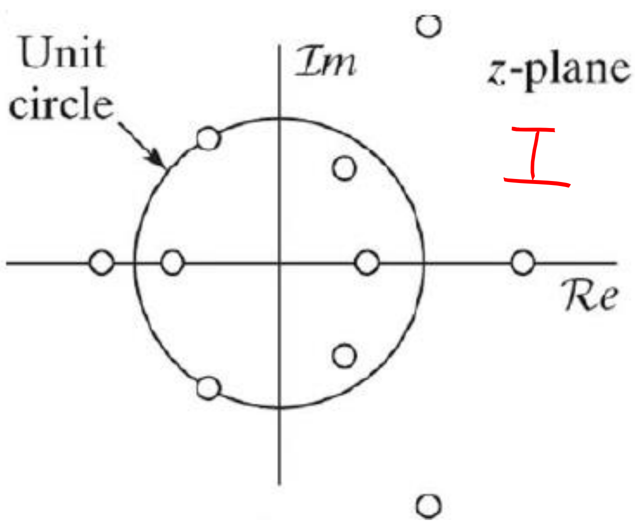
Τύπου I – συμμετρική h[n] – άρτιο M	Τύπου II – συμμετρική h[n] – περιττό M
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}\left(e^{j\pi}\right) = 0$
Τύπου III – αντισυμμετρική h[n] – άρτιο M	**Τύπου IV – αντισυμμετρική h[n] – περιττό M**
$H_{III}\left(e^{j0}\right) = 0, H_{III}\left(e^{j\pi}\right) = 0$	$H_{IV}\left(e^{j0}\right) = 0$

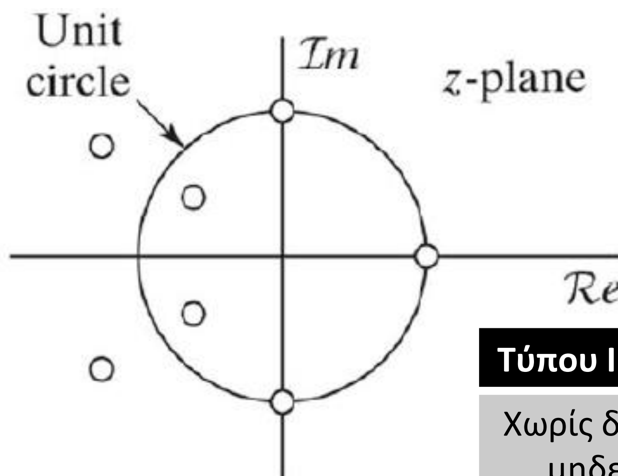
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**





III



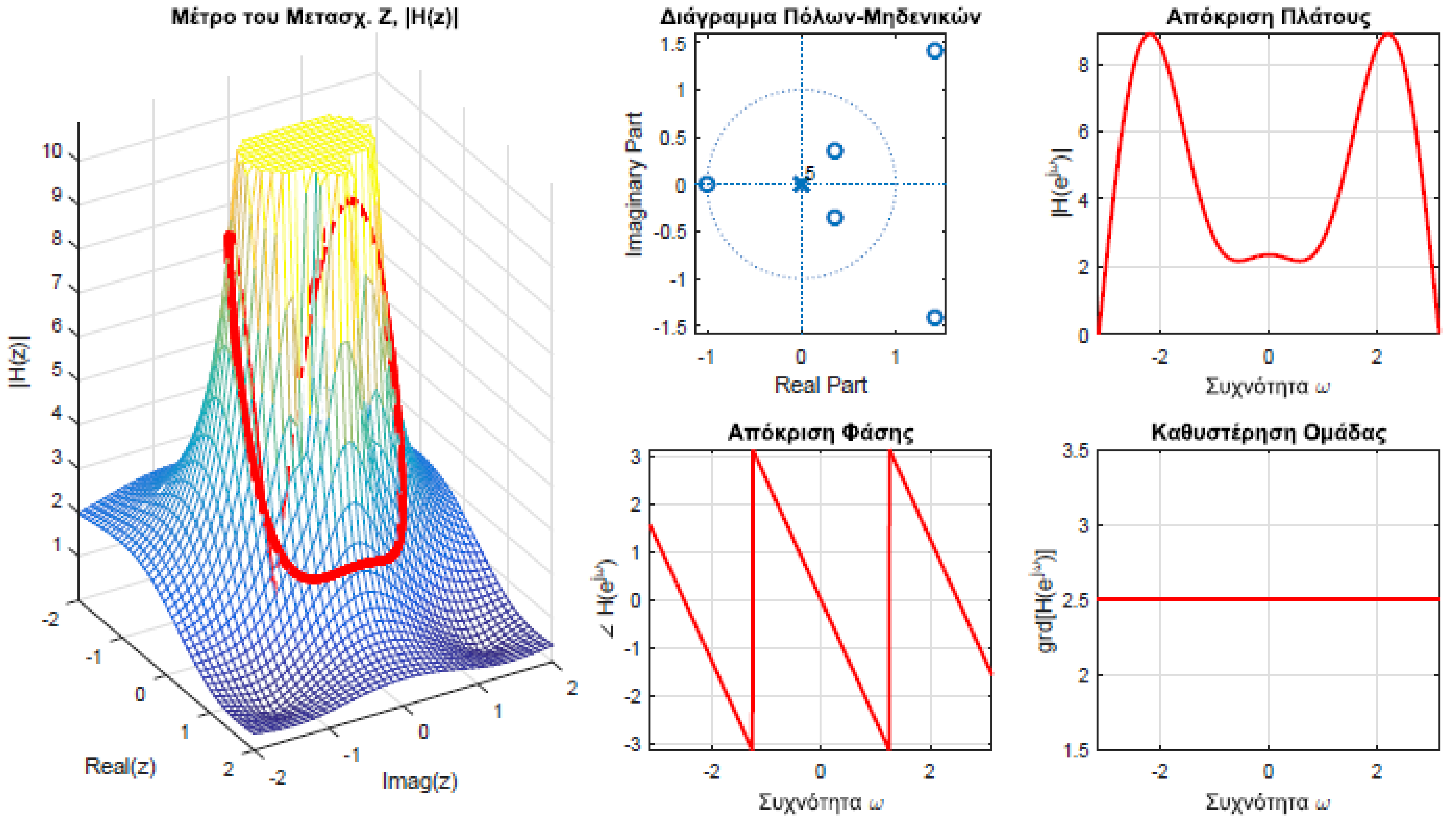


IV

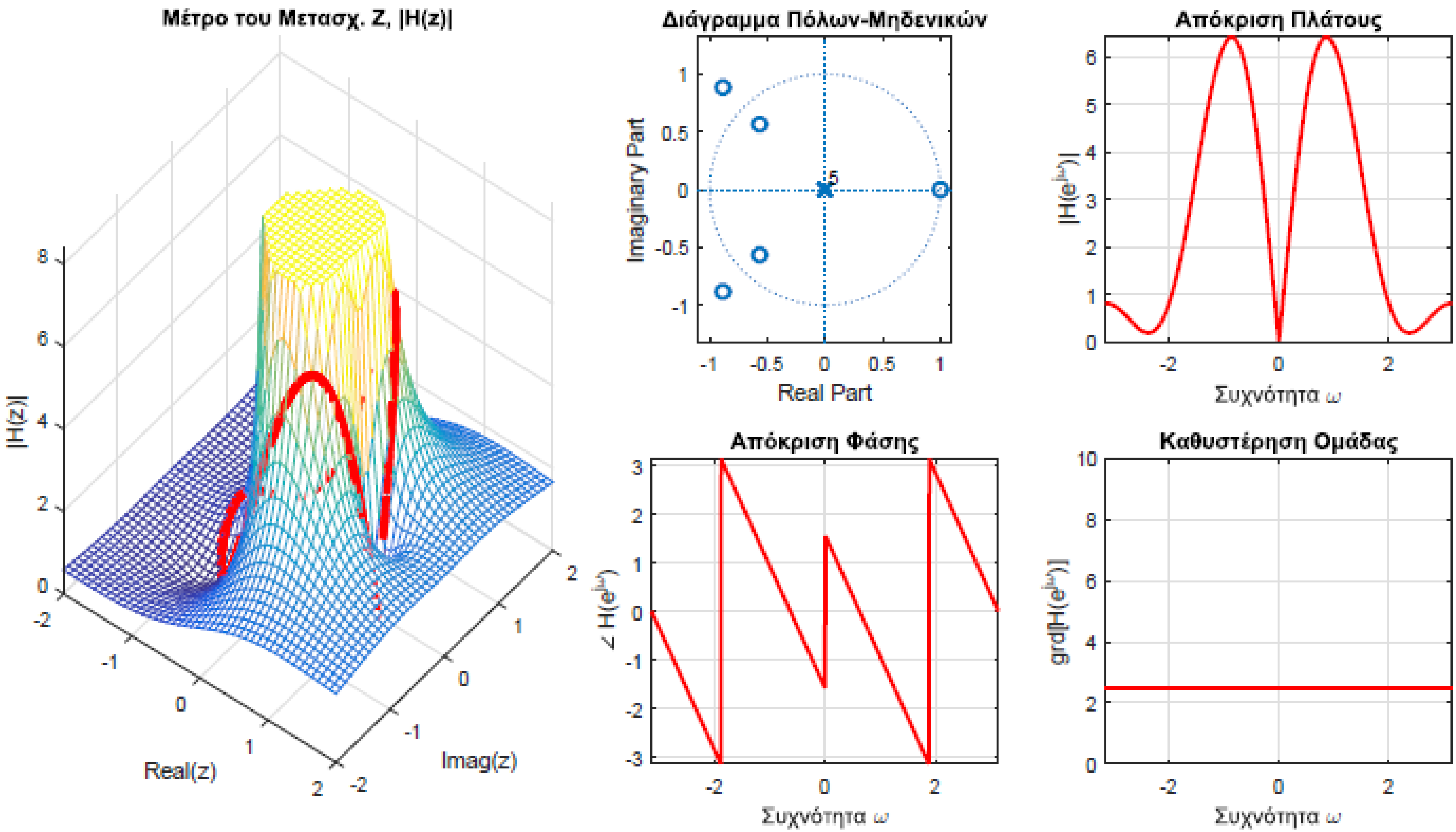
Τύπου I	Τύπου II
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III	**Τύπου IV**
$H_{III}(e^{j0}) = 0,$ $H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

- Αναγνωρίζετε τους τύπους των συστημάτων γραμμικής φάσης;

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Ένα FIR σύστημα γραμμικής φάσης μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων:

○ ενός όρου ελάχιστης φάσης

$$H_{min}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \quad , \qquad |c_k| < 1$$

○ ενός όρου μέγιστης φάσης

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*)$$

○ ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$$H_{uc}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_o}{2}} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})$$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z) H_{uc}(z) H_{max}(z)$$

με

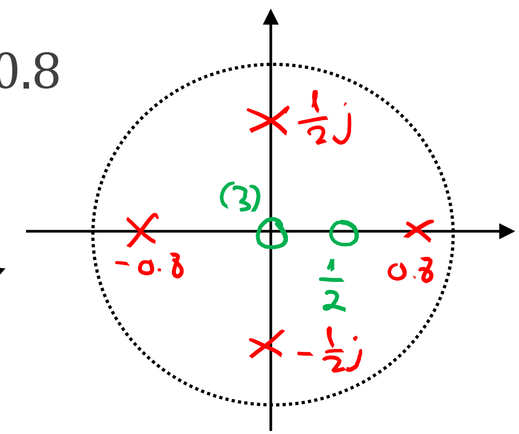
$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1}) z^{-M_i}$$

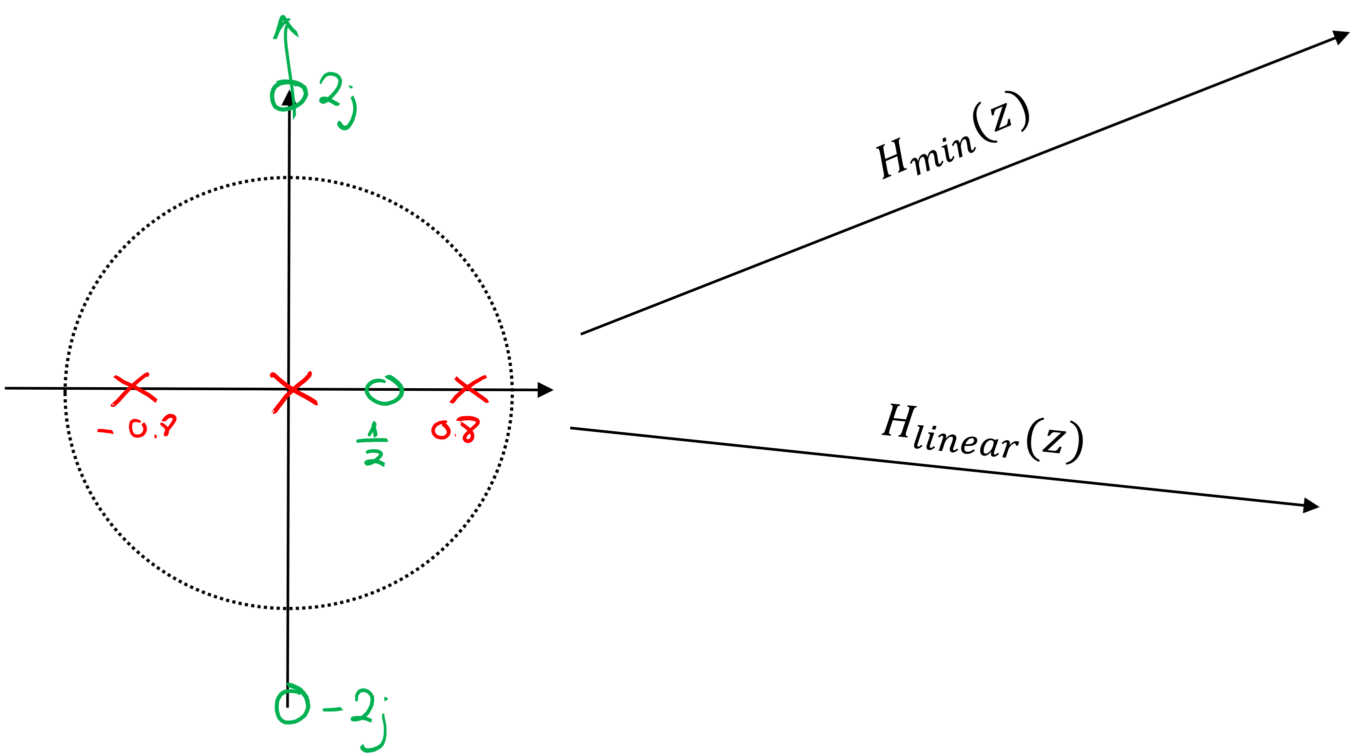
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

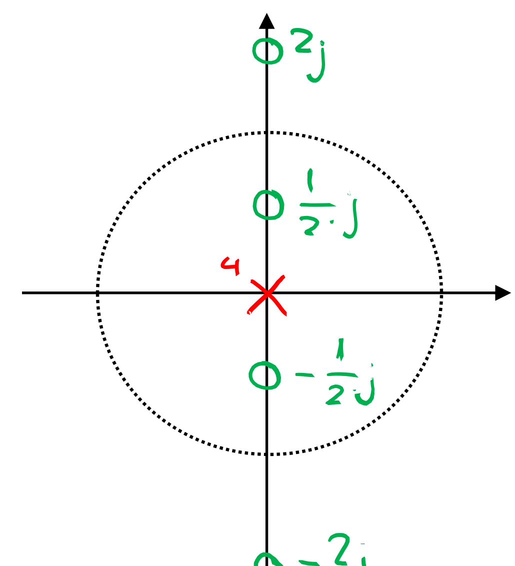
$$\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+2j)(z-2j)}{z(z-0.8)(z+0.8)}$$

$$H(z)=\frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}, \qquad |z|>0.8$$

Γράψτε το σε μορφή $H(z)=H_{min}(z)H_{linear}(z)$







- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Παράδειγμα:

Είναι

$$H_{min}(z) = \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right)}$$

$$= \frac{z^3\left(z-\frac{1}{2}\right)}{(z-0.8)(z+0.8)\left(z-\frac{1}{2}j\right)\left(z+\frac{1}{2}j\right)}, \quad |z|>0.8$$

και

$$H_{linear}(z) = (1-2jz^{-1})(1+2jz^{-1})\left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right)$$

$$= \frac{(z-2j)(z+2j)\left(z-\frac{1}{2}j\right)\left(z+\frac{1}{2}j\right)}{z^4}, \quad |z|>0$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ