

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 13<sup>Η</sup>

- Συστήματα στο χώρο του Z

## • Αντίστροφα Συστήματα

• Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό της ακύρωσης της επίδρασης ενός συστήματος επάνω σε μια είσοδο

• Έστω ότι έχουμε το σύστημα με έξοδο  $y[n] = x[n] * h[n]$ , και η επίδραση της κρουστικής απόκρισης είναι ανεπιθύμητη

• Όπως π.χ. όταν περνάμε ένα σήμα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που διαταράσσει το σήμα εισόδου

• Τότε χρειαζόμαστε ένα σύστημα  $h_i[n]$  τέτοιο ώστε

$$y[n] * h_i[n] = x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n]$$

δηλ. να ανακτήσουμε την είσοδο από την έξοδο

• Από την παραπάνω σχέση εύκολα καταλαβαίνετε ότι

$$h_i[n] * h[n] = \delta[n]$$

## • Αντίστροφα Συστήματα

- Φέρνοντας τη σχέση αυτή στο χώρο του  $Z$  προκύπτει ότι

$$H_i(z)H(z) = 1, \quad R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$$

- Το σύστημα  $h_i[n]$  ονομάζεται **αντίστροφο σύστημα** του  $h[n]$

- Στο χώρο του  $Z$ , αν

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

τότε

$$H_i(z) = \frac{1}{A} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}$$

Οι πόλοι του συστήματος  
γίνονται μηδενικά του  
αντιστρόφου και τα μηδενικά  
του συστήματος γίνονται πόλοι  
του αντιστρόφου

## • Αντίστροφα Συστήματα

• Παράδειγμα:

○ Έστω  $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$ ,  $|z| > 0.8$ . Βρείτε το αντίστροφο σύστημα  $h_i[n]$

$$H_i(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} - 0.8 \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

i) Είτε  $|z| < 0.5$  : απαρ. διότι  $\mathcal{R}_H \cap \mathcal{R}_{H_i} = \emptyset$

ii) Είτε  $|z| > 0.5$  :  $\mathcal{R}_H \cap \mathcal{R}_{H_i} = \{ |z| > 0.8 \} \cap \{ |z| > 0.5 \}$   
 $= \{ |z| > 0.8 \}$

$$h_i[n] = z^{-1} \left\{ H_i(z) \right\} = (0.5)^n u[n] - 0.8(0.5)^{n-1} u[n-1].$$

## • Αντίστροφα Συστήματα

• Παράδειγμα:

○ Έστω  $H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$ ,  $|z| > 0.8$ . Βρείτε το αντίστροφο σύστημα  $h_i[n]$

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}}, \quad \text{πόλωση: } 0.5 - z^{-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = 2}$$

i) Είτε  $|z| < 2$  :  $0.8 < |z| < 2 \rightarrow$  ευσταθές, όχι αιτιατό

ii) Είτε  $|z| > 2$  :  $|z| > 2 \rightarrow$  όχι ευσταθές, αιτιατό

$$i) h_i[n] = 2 \cdot 2^n u[n] - 1.6 \cdot 2^{n-1} u[-n-1]$$

$$ii) h_i[n] = -2 \cdot 2^n u[-n-1] + 1.6 \cdot 2^{n-1} u[-n]$$

## • Αντίστροφα Συστήματα

- Μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα συστήματα που έχουν **ευσταθές και αιτιατό** αντίστροφο σύστημα
- Όπως είδατε πριν, μπορεί κανένα από τα υποψήφια αντίστροφα συστήματα να μην είναι **ταυτόχρονα** ευσταθές και αιτιατό
- Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα  $H(z)$ 
  - Ως τέτοιο, θα έχει **όλους** τους πόλους του **εντός** του μοναδιαίου κύκλου, αφού το πεδίο σύγκλισης του είναι  $\{|z| > \max|c_k|\}$  και  $|c_k| < 1, \forall k$
  - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε
- Τι πρέπει να συμβαίνει στο σύστημα  $H(z)$  έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι και αυτό **ευσταθές και αιτιατό**?
- Αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται πόλοι, τότε πρέπει αυτοί να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου
  - Άρα **όλα** τα μηδενικά του αρχικού συστήματος πρέπει να βρίσκονται **ΚΑΙ ΑΥΤΑ** εντός του μοναδιαίου κύκλου
- Τέτοια συστήματα, με **όλους** τους πόλους και **όλα** τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου ονομάζονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης – Minimum Phase**
  - ...θα τα μελετήσουμε λίγο αργότερα...

## • Διάγραμμα Διανυσμάτων

- Μερικές διαλέξεις νωρίτερα, εισάγαμε το μετασχ.  $Z$  ως μια «γενίκευση» του μετασχ. Fourier επάνω στο μιγαδικό επίπεδο
- Είδαμε όμως ότι όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ.  $Z$  περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, τότε ο μετασχ. Fourier συγκλίνει (== «υπάρχει» μέσω του ορισμού του)
- Όμως είδαμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ.  $Z$  «δρουν» επάνω στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης του μετασχ. Fourier!
  - Πώς?
    - Ένας πόλος κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αυξάνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται → *amplification*
    - Ένα μηδενικό κοντά στο μοναδιαίο κύκλο μειώνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται → *attenuation*
    - Για το φάσμα φάσης δεν είπαμε κάτι σχετικό
- Η παραπάνω περιγραφή είναι κάπως «γενική» και «δαισθητική»
- Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε ακριβώς πως επηρεάζονται οι φασματικές αποκρίσεις από τους πόλους και τα μηδενικά

## • Διάγραμμα Διανυσμάτων

- Ας γράψουμε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και την καθυστέρηση ομάδας μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς, όταν αυτή υπολογίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

### Απόκριση Πλάτους

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{l=1}^N |1 - a_l e^{-j\omega}|}$$

### Απόκριση Φάσης

$$\begin{aligned} \angle H(e^{j\omega}) &= \angle A + \angle \prod_{k=1}^M (1 - b_k e^{-j\omega}) - \angle \prod_{l=1}^N (1 - a_l e^{-j\omega}) \\ &= \angle A + \sum_{k=1}^M \angle(1 - b_k e^{-j\omega}) - \sum_{l=1}^N \angle(1 - a_l e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

### Καθυστέρηση Ομάδας

$$\tau_g(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \angle(1 - a_k e^{-j\omega}) - \sum_{l=1}^N \frac{d}{d\omega} \angle(1 - b_l e^{-j\omega})$$

- Κοινό στοιχείο: όροι της μορφής  $(1 - c_k e^{-j\omega})!!$



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

- Ας θεωρήσουμε τον όρο  $1 - ce^{-j\omega}$ , με  $c \in \mathbb{C}$

- Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

- Το  $c$  είναι πόλος
- Το  $c$  είναι μηδενικό

- Θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις επάνω στις αποκρίσεις πλάτους και φάσης

- Ξεκινώντας από τη θεώρηση του  $c = re^{j\theta}$  ως **μηδενικό**:

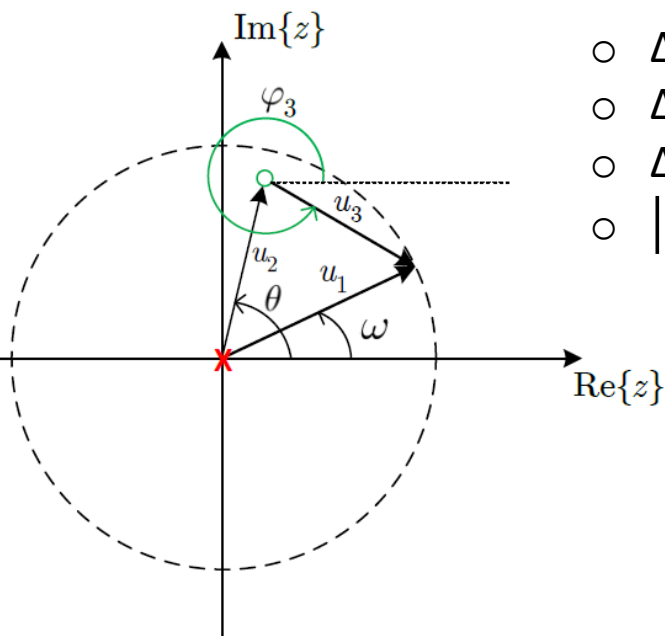
$$H(z) = 1 - cz^{-1} = 1 - re^{j\theta} z^{-1}$$

- Οπότε:

$$|H(e^{j\omega})| = |1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}| = \underset{\perp}{|e^{-j\omega}|} |e^{j\omega} - re^{j\theta}| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}|$$

## • Διάγραμμα Διανυσμάτων

$$|H(e^{j\omega})| = |1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}|$$



- Διάνυσμα  $\vec{u}_1$ : διάνυσμα μιγαδικού αριθμού  $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα  $\vec{u}_2$ : διάνυσμα από 0 ως το μηδενικό
- Διάνυσμα  $\vec{u}_3$ : διάνυσμα από μηδενικό ως το μοναδ. κύκλο
- $|e^{j\omega} - re^{j\theta}| = |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = |\vec{u}_3|$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το μήκος του  $\vec{u}_3$ !!

## • Για την απόκριση φάσης

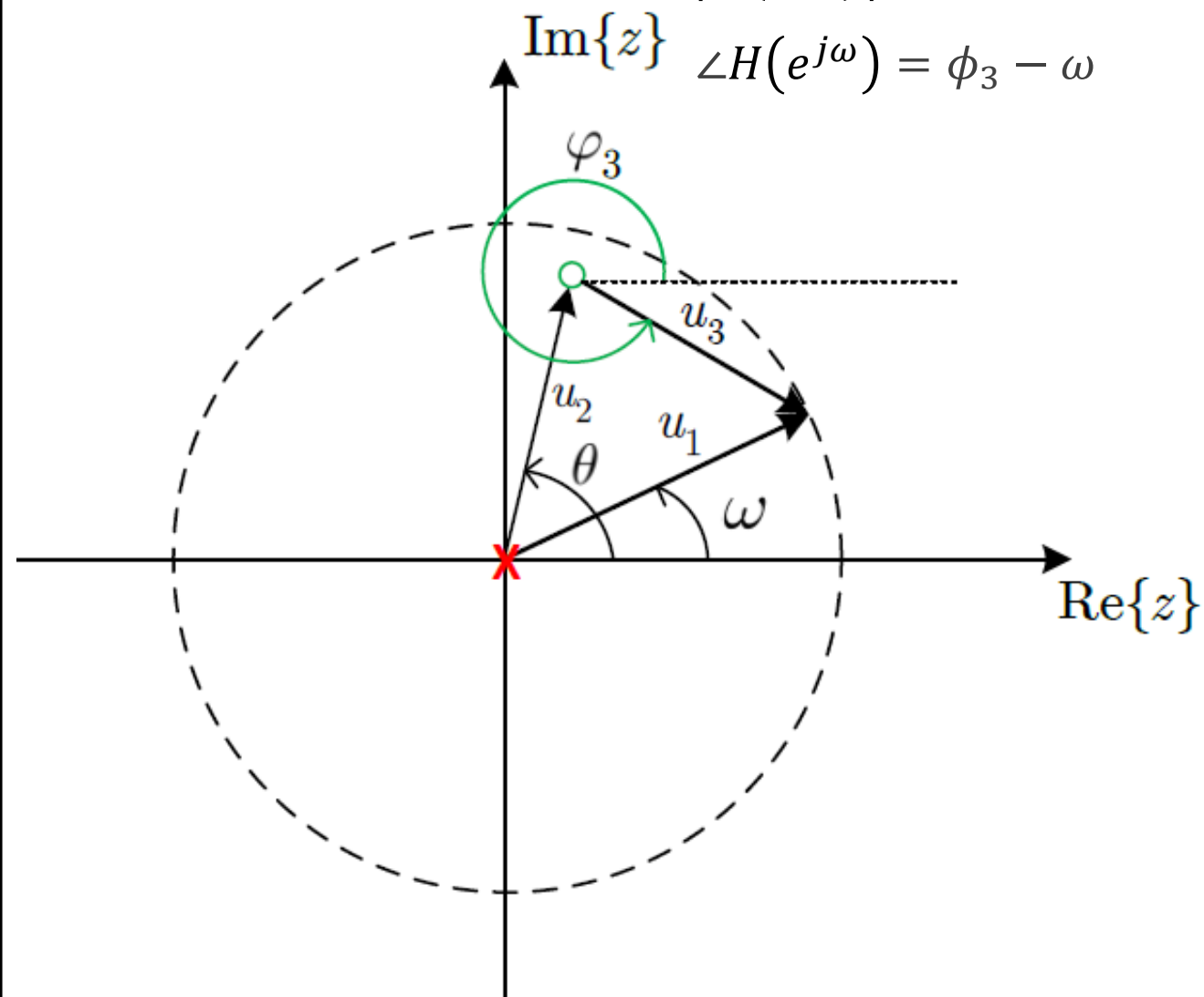
$$\angle(1 - re^{j\theta} e^{j\omega}) = \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle e^{j\omega} = \phi_3 - \omega$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά  $\phi_3 - \omega$ !!

## • Διάγραμμα Διανυσμάτων

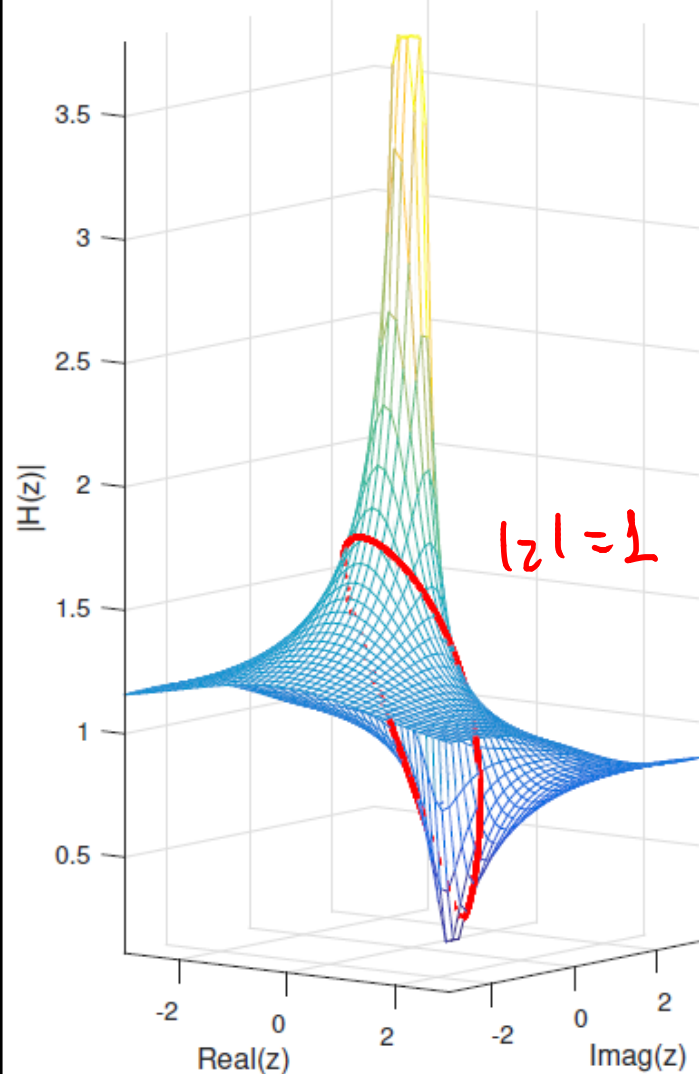
$$|H(e^{j\omega})| = |\vec{u}_3|$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3 - \omega$$

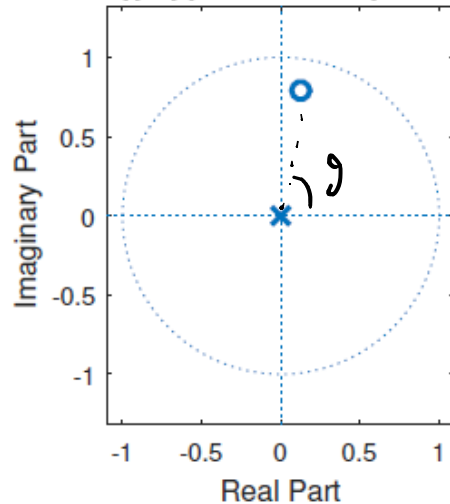


• Διάγραμμα Διανυσμάτων

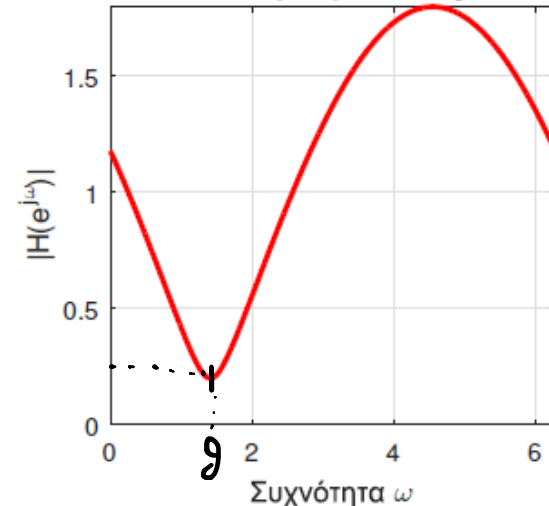
Μέτρο του Μετασχ. Z,  $|H(z)|$



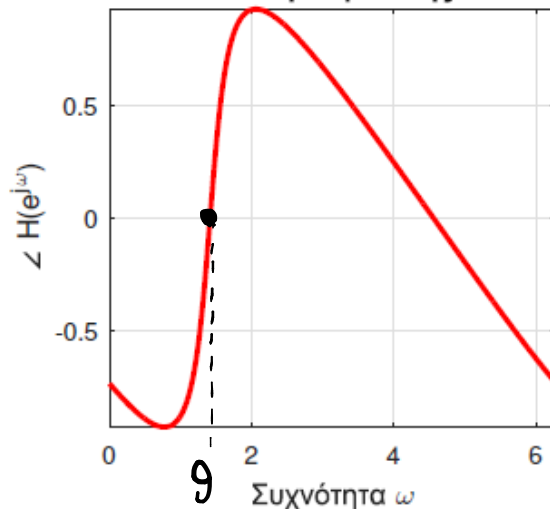
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



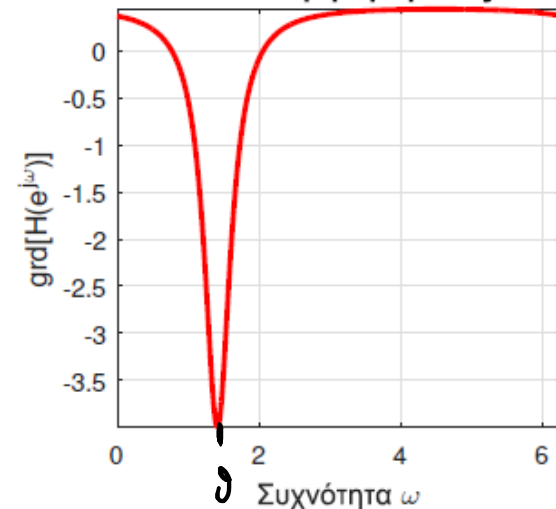
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης

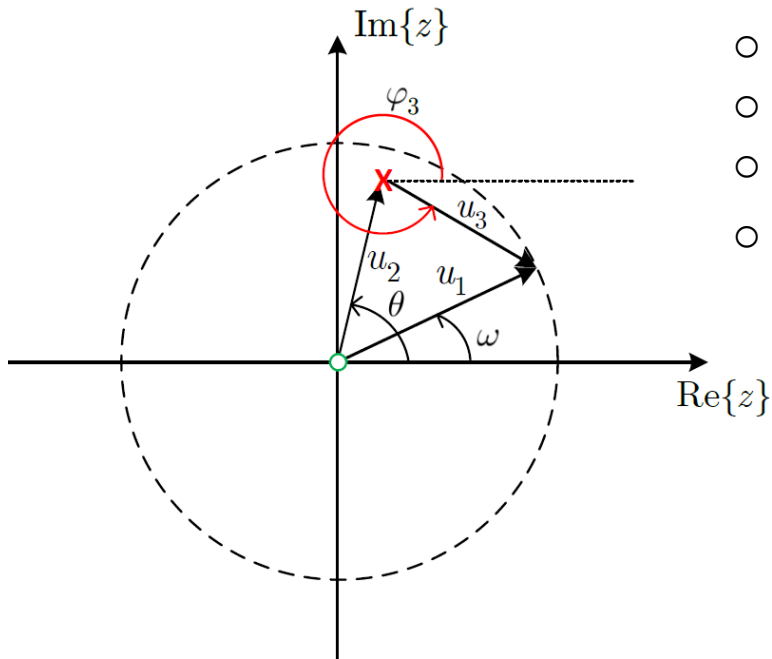


Καθυστέρηση Ομάδας



## • Διάγραμμα Διανυσμάτων

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|}$$



- Διάνυσμα  $\vec{u}_1$ : διάνυσμα μιγαδικού αριθμού  $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα  $\vec{u}_2$ : διάνυσμα από 0 ως τη θέση του  $re^{j\theta}$
- Διάνυσμα  $\vec{u}_3$ : διάνυσμα από  $re^{j\theta}$  ως το μοναδ. κύκλο
- $\frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|} = \frac{1}{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|} = \frac{1}{|\vec{u}_3|}$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το (αντίστροφο) μήκος του  $\vec{u}_3$ !!

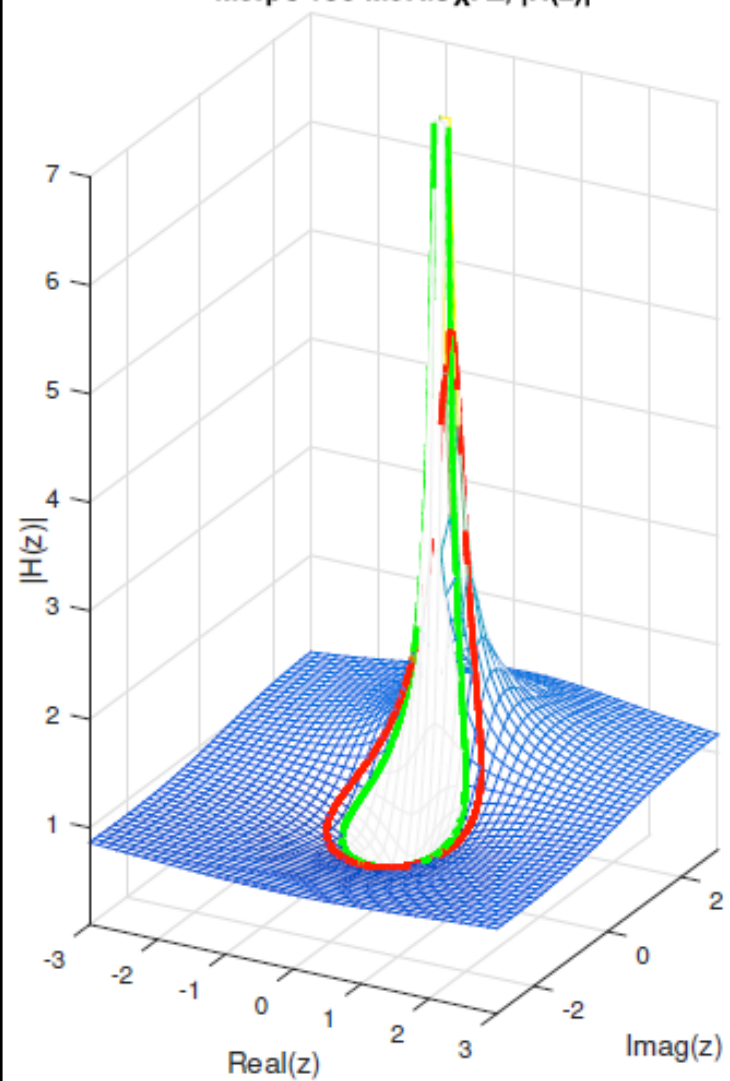
## • Για την απόκριση φάσης

$$\angle \frac{1}{(1 - re^{j\theta} e^{j\omega})} = \angle e^{j\omega} - \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) = \omega - \phi_3$$

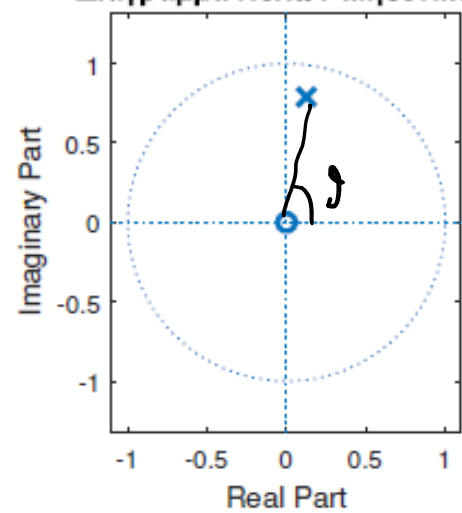
Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά  $\omega - \phi_3$ !!

• Διάγραμμα Διανυσμάτων

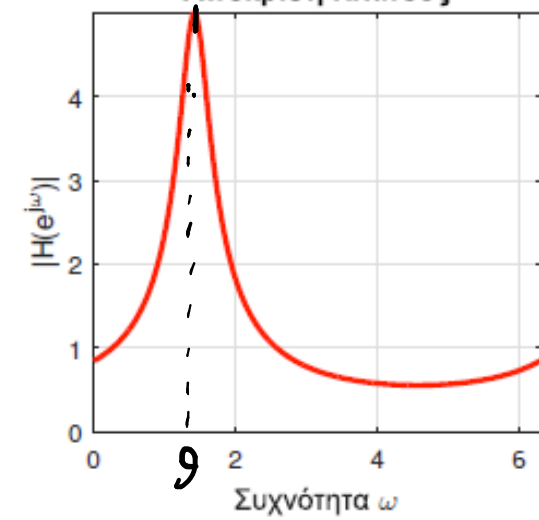
Μέτρο του Μετασχ. Ζ,  $|H(z)|$



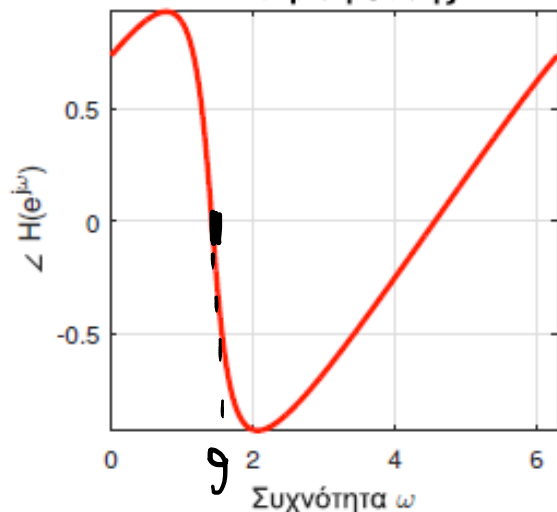
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



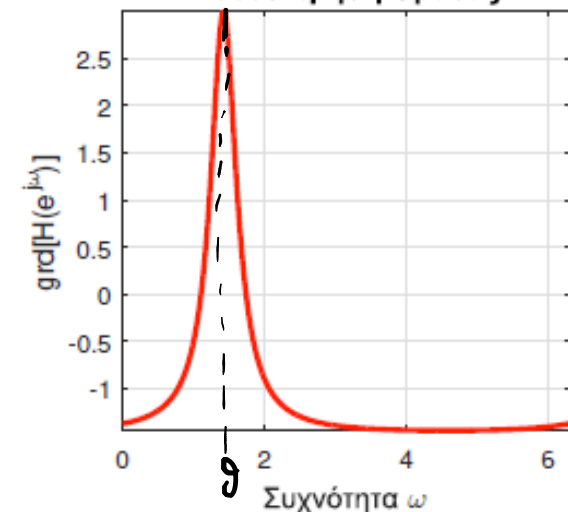
Απόκριση Πλάτους



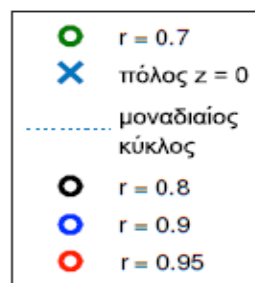
Απόκριση Φάσης



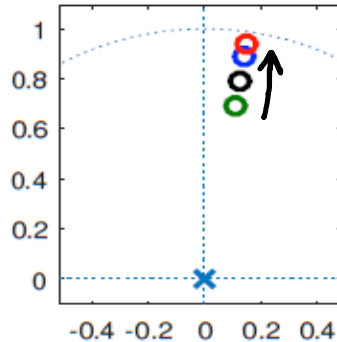
Καθυστέρηση Ομάδας



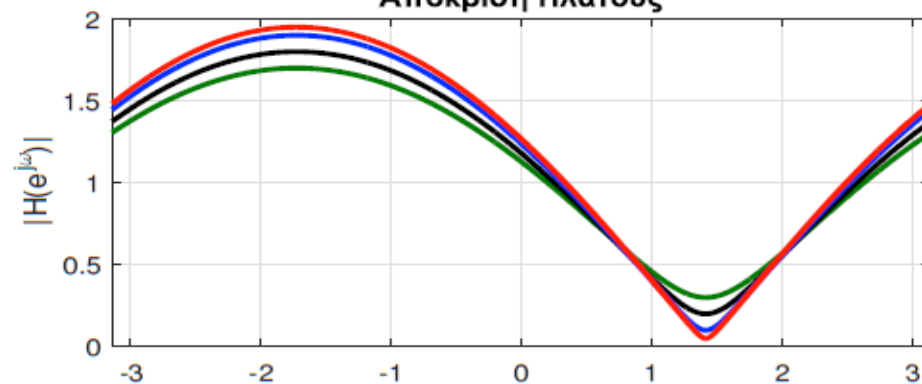
# • Διάγραμμα Διανυσμάτων



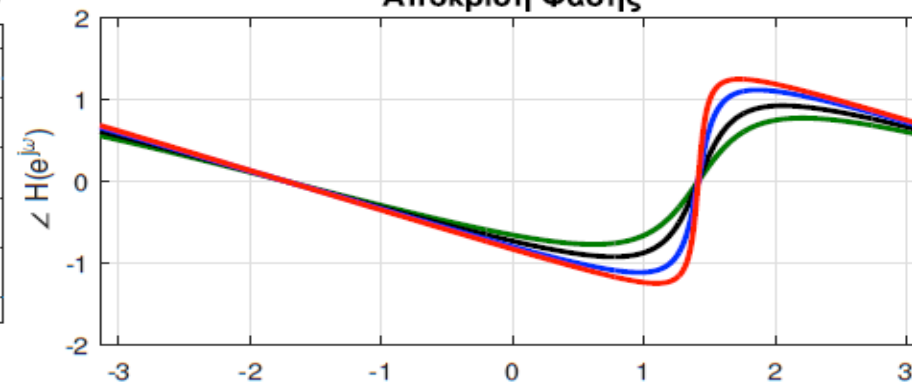
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



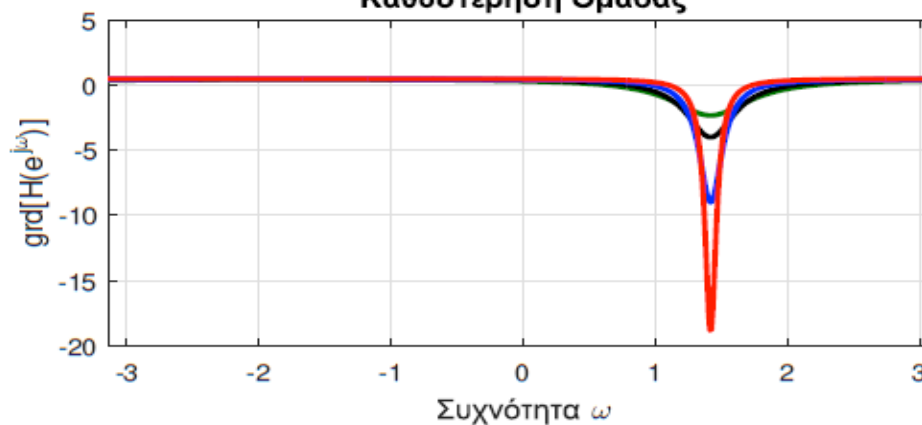
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης

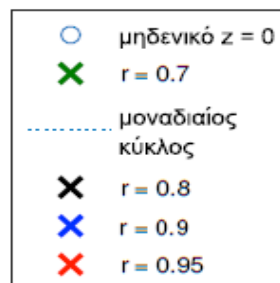


Καθυστέρηση Ομάδας

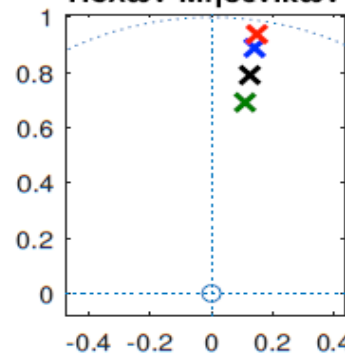


Συχνότητα  $\omega$

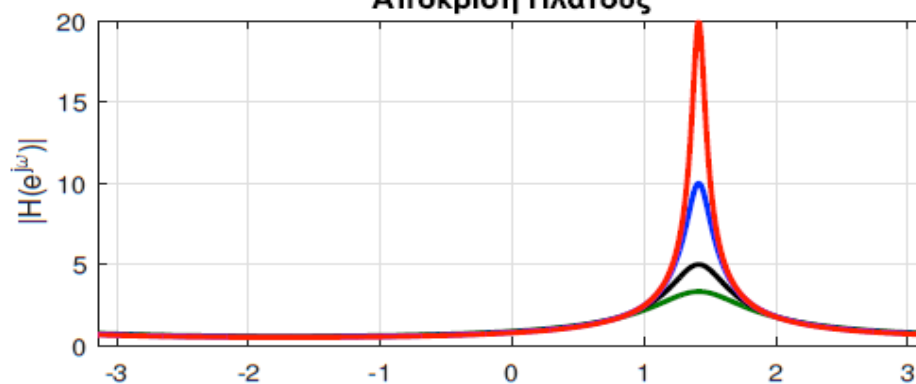
# • Διάγραμμα Διανυσμάτων



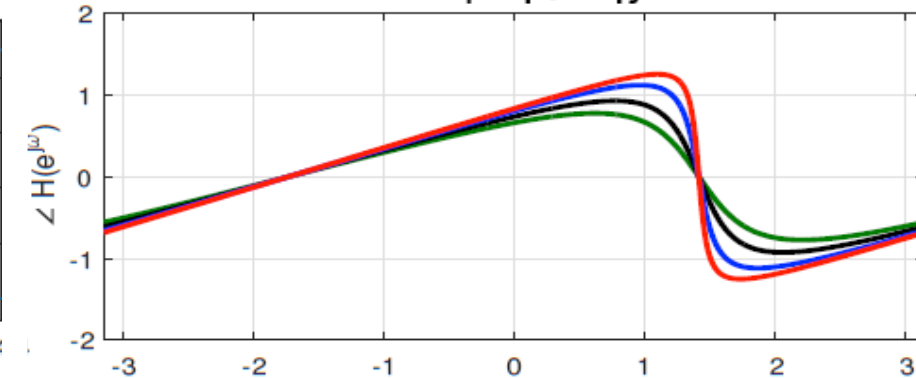
### Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



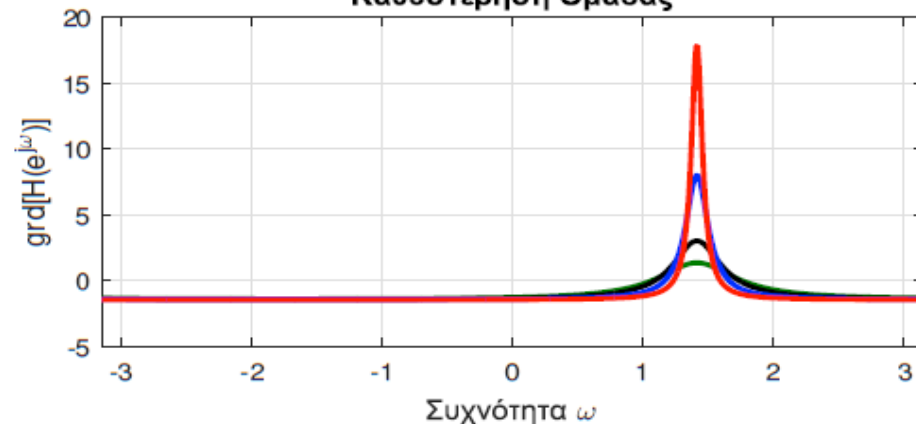
### Απόκριση Πλάτους



### Απόκριση Φάσης

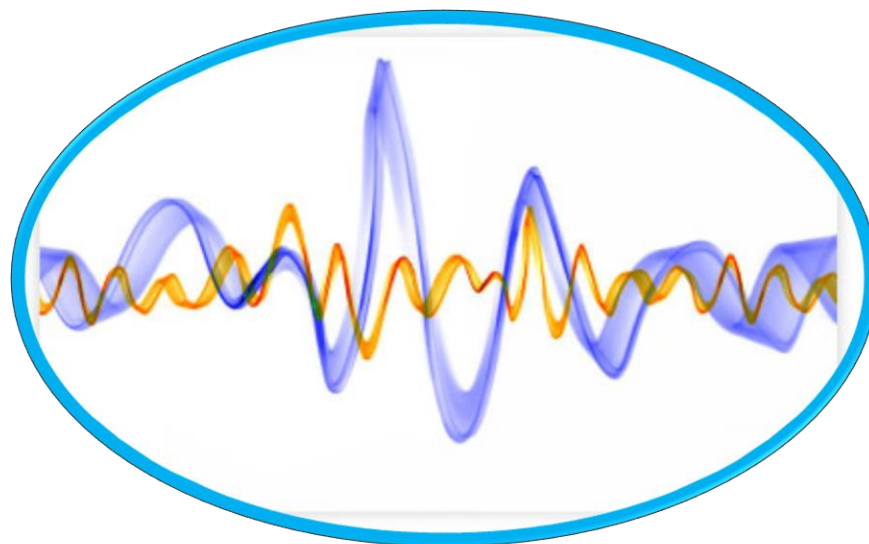


### Καθυστέρηση Ομάδας

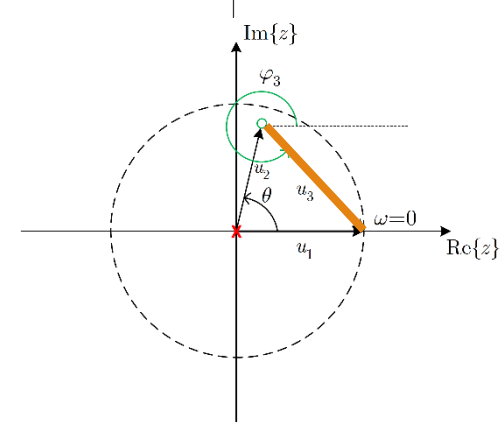
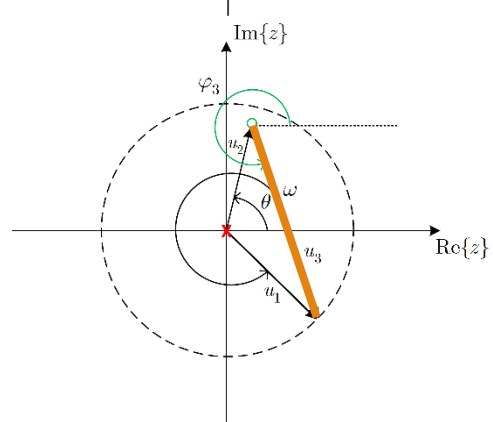
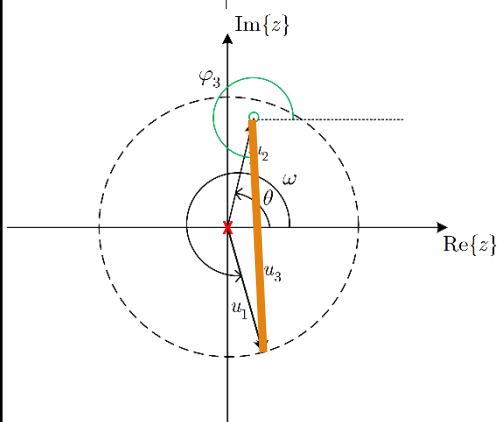
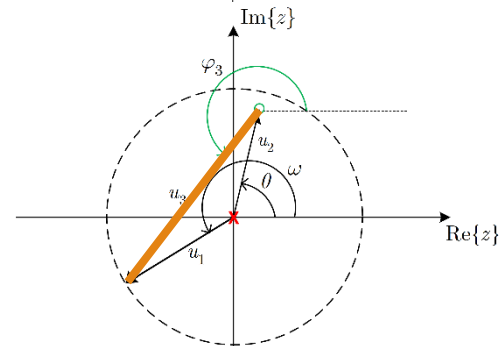
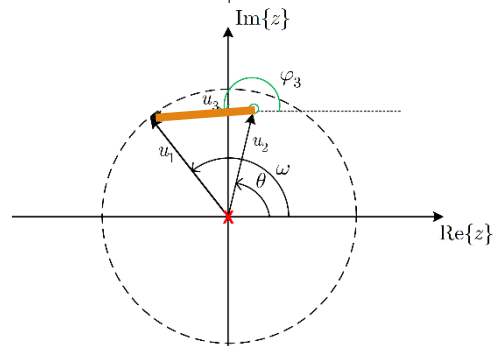
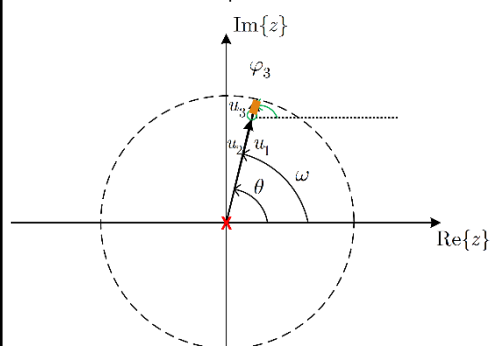
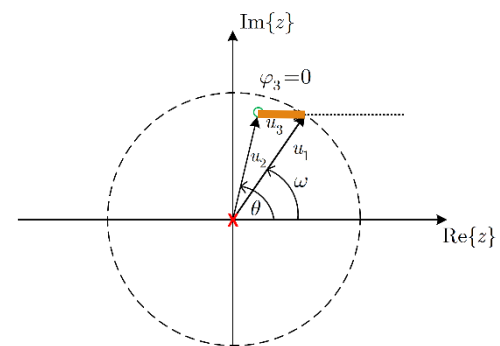
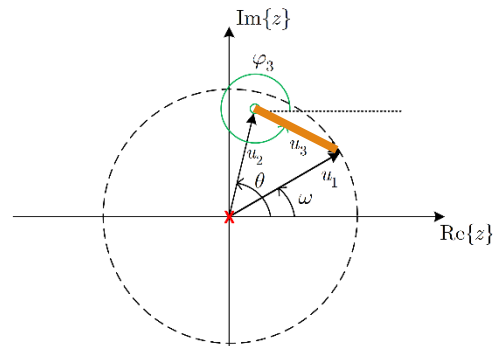
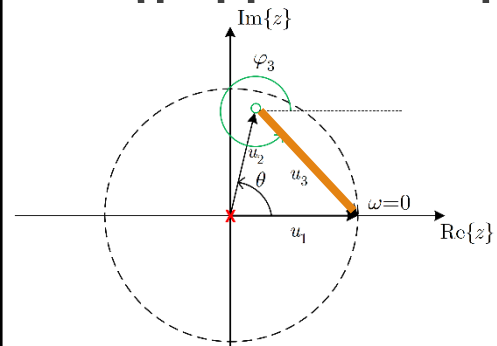




# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



• Διάγραμμα Διανυσμάτων



• Διάγραμμα Διανυσμάτων

