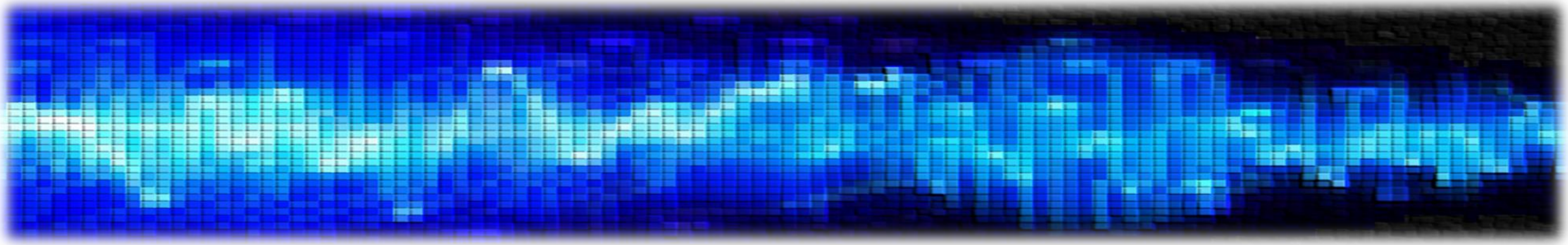
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 12Η



- Πόλοι & Μηδενικά
- Συστήματα στο χώρο του Ζ

- **Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

- **Πεδίο Σύγκλισης**: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει

- Σχέση μετασχ. Z με μετασχ. Fourier

Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

(α′) Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.

(β′) Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη "φέτα" της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.

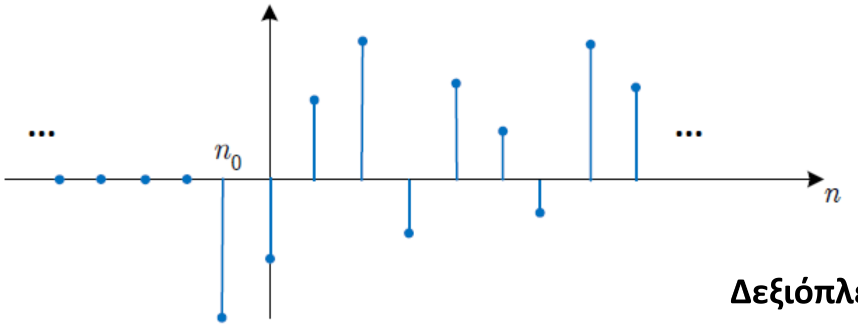
(γ′) Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά "φέτες " των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

• Ιδιότητες Μετασχ. Ζ (επανάληψη)

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

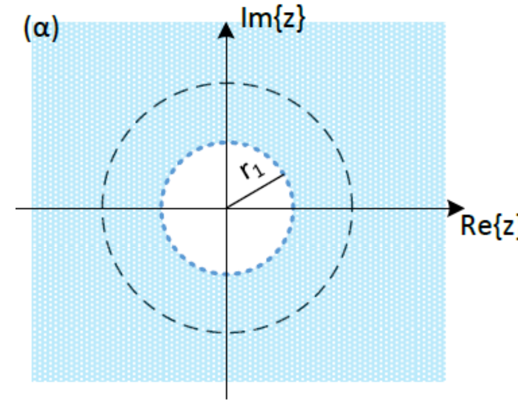
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Ζ	Πεδίο Σύγκλισης
	$\mathbf{x[n]}$ $\mathbf{y[n]}$	$\mathbf{X(z)}$ $\mathbf{Y(z)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax[n]+By[n]$	$AX(z)+BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n-n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Ζ	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|Rx$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\|>0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\|>1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n]=0,\ n<0$	$\lim_{z\to\infty} X(z)=x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n]=0,\ n<0$	$\lim_{n\to\infty} x[n]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$	

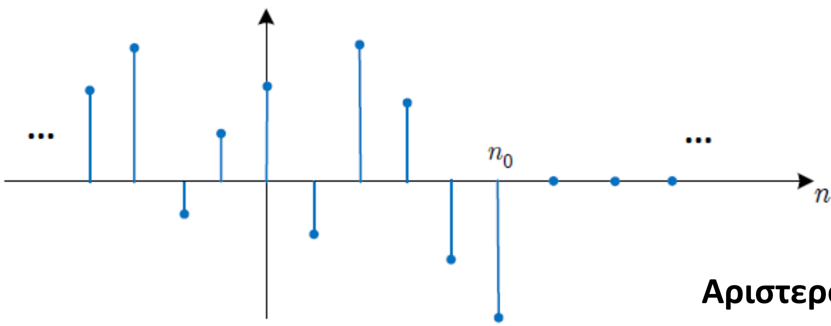
- **Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης (επανάληψη)**



$$x[n] = 0,$$
$$n < n_0$$

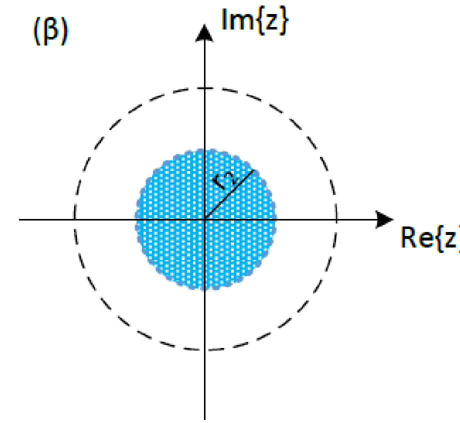
Δεξιόπλευρο → Εξωστρεφές ROC

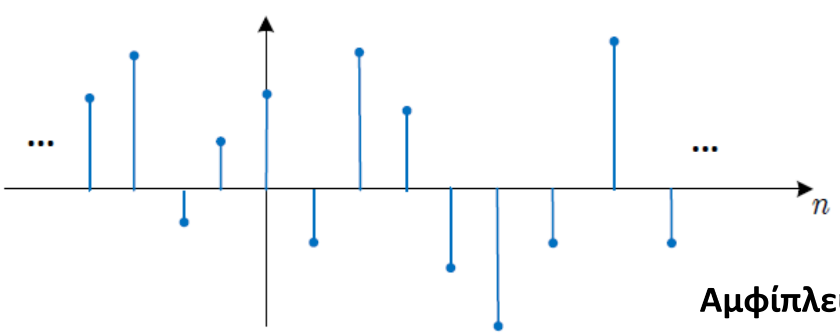




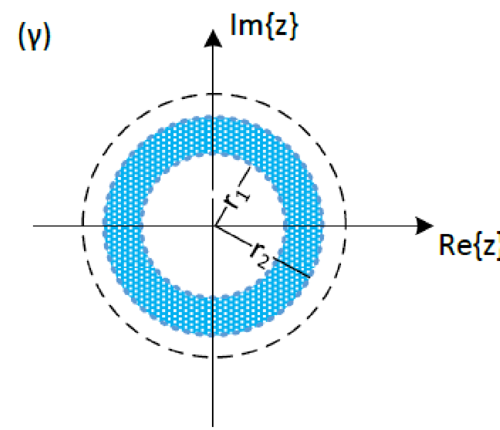
$$x[n] = 0,$$
$$n > n_0$$

Αριστερόπλευρο → Εσωστρεφές ROC

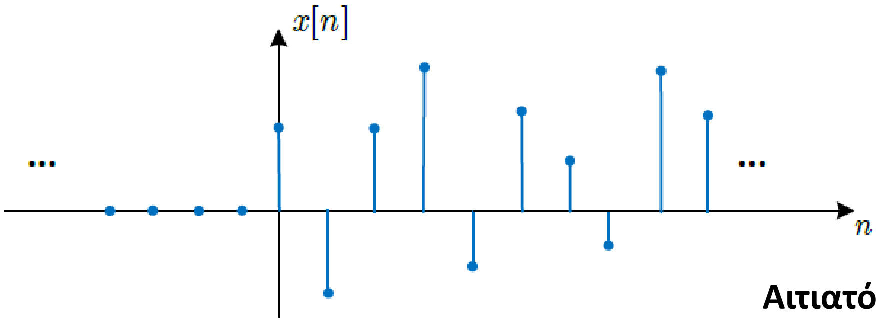




Αμφίπλευρο → Δακτυλιοειδές ROC

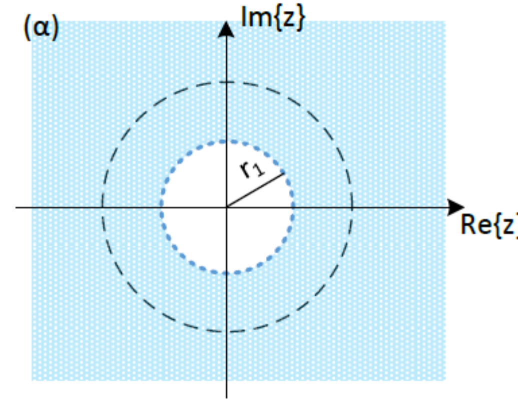


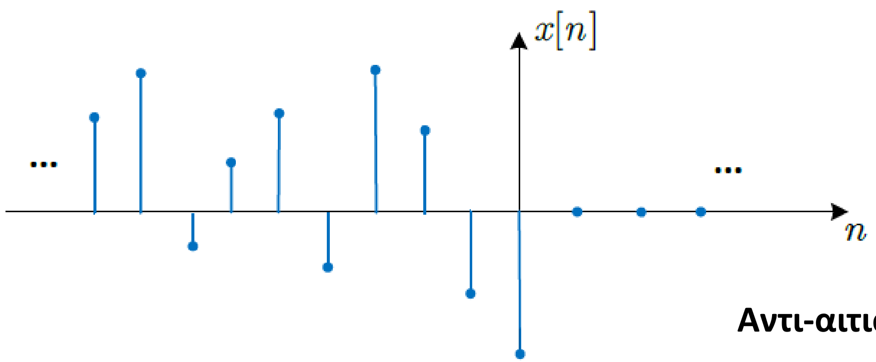
- **Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης (επανάληψη)**



$$x[n] = 0, \quad n < 0$$

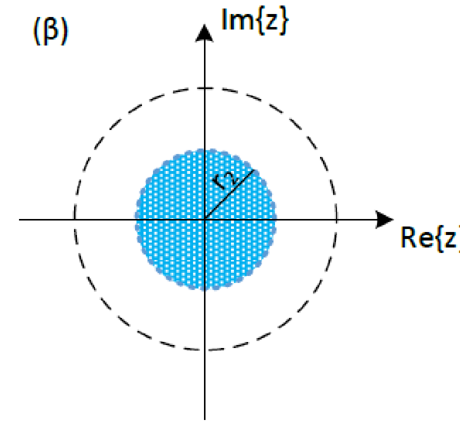
Αιτιατό → Εξωστρεφές ROC

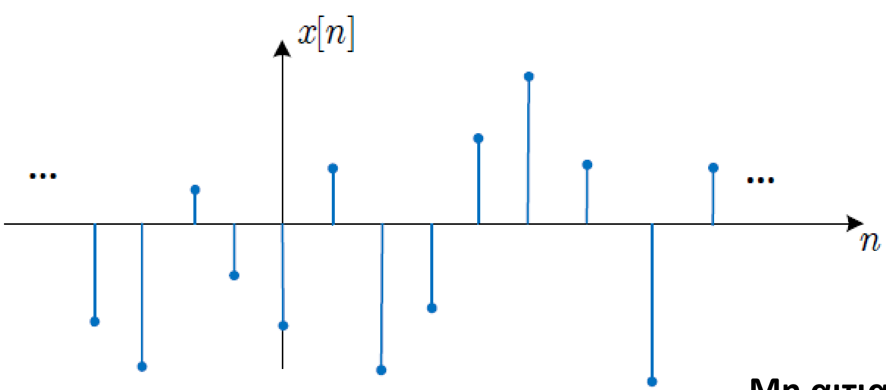




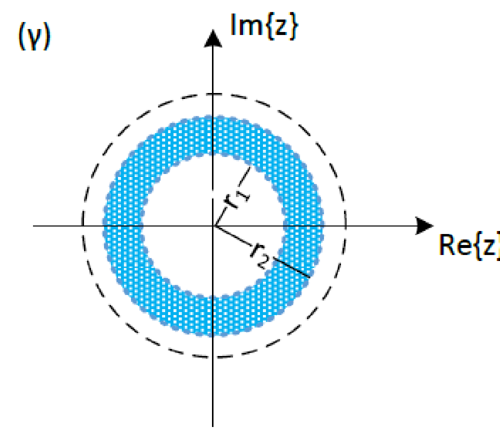
$$x[n] = 0, \quad n > 0$$

Αντι-αιτιατό → Εσωστρεφές ROC





Μη αιτιατό → Δακτυλιοειδές ROC



- Ο Μετασχ. Ζ είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αναπαράστασης σημάτων

- Η εμπειρία σας ως τώρα ίσως σας έχει αποκαλύψει τη χρήση του για ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων…
  - …μέσω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο → γινόμενο στο χώρο του Ζ

- Ας «πλεύσουμε» στο χώρο των συστημάτων με τον ίδιο τρόπο που κάναμε και στο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ξεκινάμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης και ιδιοτιμής!

  - Μπορούμε να δείξουμε εύκολα (do it! ☺) ότι το σήμα $x[n] = A(re^{j\omega})^n = Az^n$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Η ιδιοτιμή του δίνεται από την εξίσωση

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

η οποία βλέπετε ότι αποτελεί το Μετασχ. Ζ της κρουστικής απόκρισης του ΓΧΑ συστήματος

- Ο μετασχ. Ζ της κρουστικής απόκρισης

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

δε θα μπορούσε να μην έχει κι αυτός το δικό του όνομα:

συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)

- Η «έκδοση» του μετασχ. Ζ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα**, όπως ήδη γνωρίζετε

- Θα θυμάστε ίσως ότι τα ΓΧΑ συστήματα κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:
  - **Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)**
  - **Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)**

- **FIR συστήματα**
- Περιγράφονται από το ζεύγος

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n-k], \quad N_1, N_2 > 0 \leftrightarrow H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k}$$

- Βλέπετε ότι αποτελείται από θετικές και αρνητικές δυνάμεις του z
- Μπορούμε να το γράψουμε ως ($m = k + N_1$ και πολλ/σμος με $\frac{z^{N_2}}{z^{N_2}}$):

$$H(z) = \frac{1}{z^{N_2}} \sum_{m=0}^{N_1+N_2} b_{m-N_1} z^{N_1+N_2-m} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}}$$

$$= \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} z \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)}{z^{N_2}}$$

$$= \frac{b_{-N_1} z^{N_1+N_2} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)}{z^{N_2}}$$

$$= z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- **Παρατηρήστε ότι έχει N_2 πόλους στο $z = 0$ και N_1 πόλους στο άπειρο**
  - **ROC:** $\{0 < |z| < \infty\}$
- **Επίσης έχει $N_1 + N_2$ μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο**

- **FIR συστήματα**

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Αν $N_1 = 0$, τότε έχουμε ένα **αιτιατό** FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = b_0 \prod_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- **Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_2 πόλους στο $z = 0$**
  - **ROC:** $\{|z| > 0\}$
- **Επίσης έχει N_2 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο**
- Αν $N_2 = 0$, τότε έχουμε ένα **αντι-αιτιατό** FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{0} b_k z^{-k} = b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} (z - c_k) = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- **Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_1 πόλους στο $z = \infty$**
  - **ROC:** $\{|z| < \infty\}$
- **Επίσης έχει N_1 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο**

- **FIR συστήματα**

- **Συμπεράσματα**

  - Ένα **αιτιατό** FIR σύστημα **δεν** έχει **πόλους** στο **άπειρο** (παρά **μόνο στο μηδέν**)
    - **Πεδίο σύγκλισης της μορφής** $\{|z| > 0\}$

  - Ένα **αντι-αιτιατό** FIR σύστημα **δεν** έχει **πόλους** στο **μηδέν** (παρά **μόνο στο άπειρο**)
    - **Πεδίο σύγκλισης της μορφής** $\{|z| < \infty\}$

  - Ένα **μη-αιτιατό** FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
    - **Πεδίο σύγκλισης της μορφής** $\{0 < |z| < \infty\}$

- **IIR συστήματα**
- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι:

- Ένα **αιτιατό** IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο **άπειρο**
  - **Πεδίο σύγκλισης της μορφής** $\{|z| > \max_k |c_k|\}$

- Ένα **αντι-αιτιατό** IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο **μηδέν**
  - **Πεδίο σύγκλισης της μορφής** $\{|z| < \min_k |c_k|\}$

- Ένα **μη-αιτιατό** IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
  - **Πεδίο σύγκλισης της μορφής** $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}$$

- Έτσι

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:
- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2] \overset{Z}{\longleftrightarrow}$$

$$Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) - 3z^{-2}X(z)$$

$$Y(z) = X(z)\left(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}, \quad |z| > 0$$

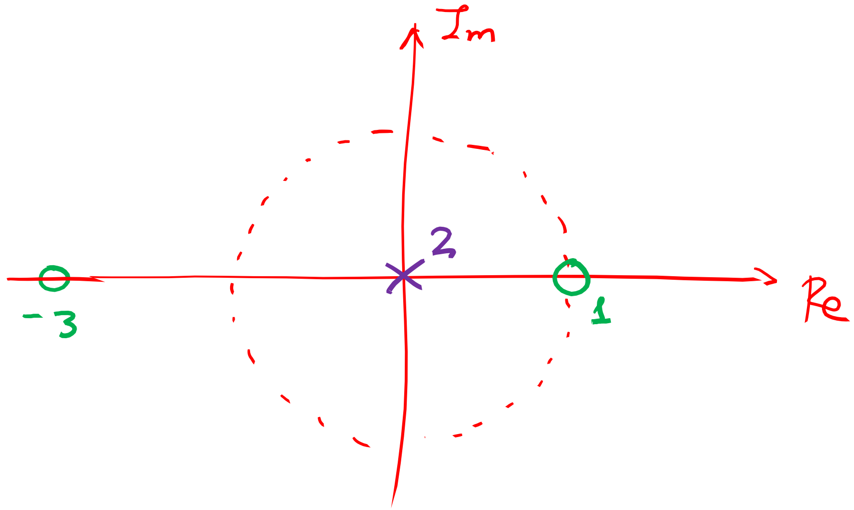
Είναι $H(z) = \frac{z^2}{z^2}\left(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}\right) = \frac{z^2 + 2z - 3}{z^2}$

Πόλοι $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$, διπλός πόλος

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

Μηδενικά: $z^2+2z-3=0 \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2}$

$= \dfrac{-2\pm 4}{2}$ → $z_1=-3$, → $z_2 = 1$



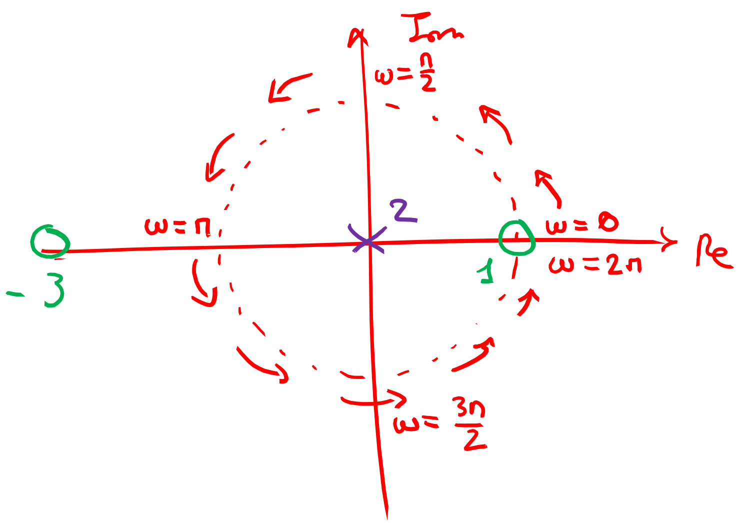
Απόκριση πλάτους: επειδή ο μοναδ. κύκλος ∈ ROC, μπορώ να βρω το μετασχ. Fourier θέτοντας $z=e^{j\omega}$.

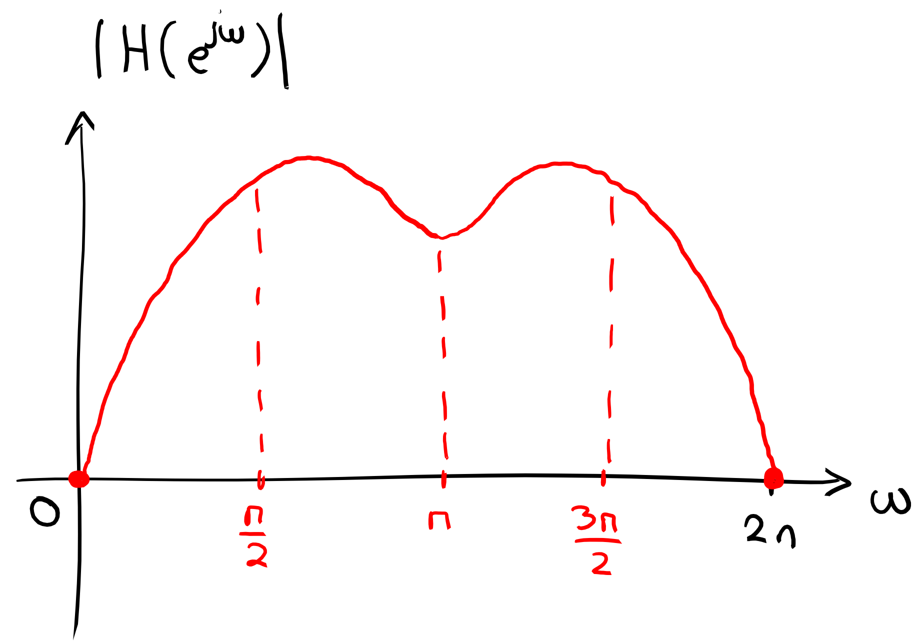
Άρα $H(e^{j\omega}) = 1+2e^{-j\omega}-3e^{-j2\omega}$: απόκριση σε συχνότητα

και $|H(e^{j\omega})| = |1+2e^{-j\omega}-3e^{-j2\omega}|$

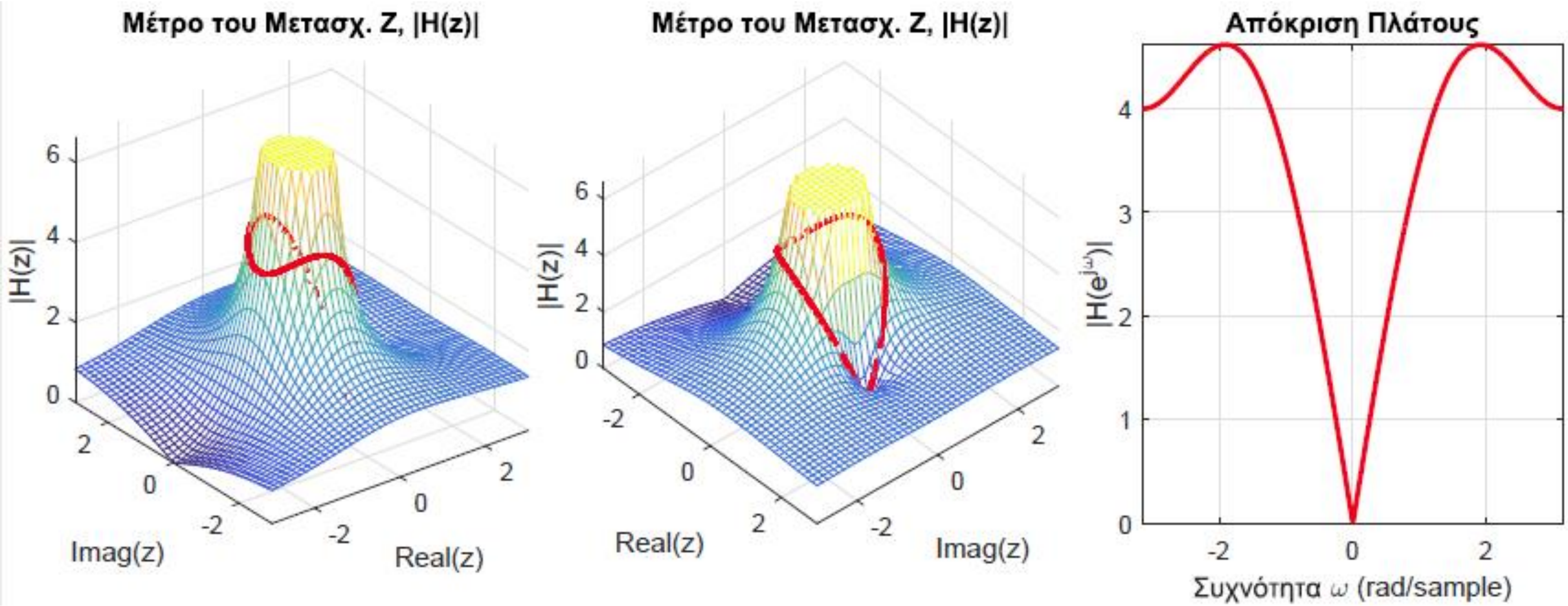
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

Η απόκριση πλάτους μπορεί να σχεδιαστεί "χονδρικά" αν "περπατήσαμε" πάνω στο μοναδιαίο κύκλο από τη συχνότητα $\omega = 0$ ως τη συχνότητα $\omega = 2\pi$, ελέγχοντας αν "εκεί γύρω" υπάρχουν πόλοι ή μηδενικά!

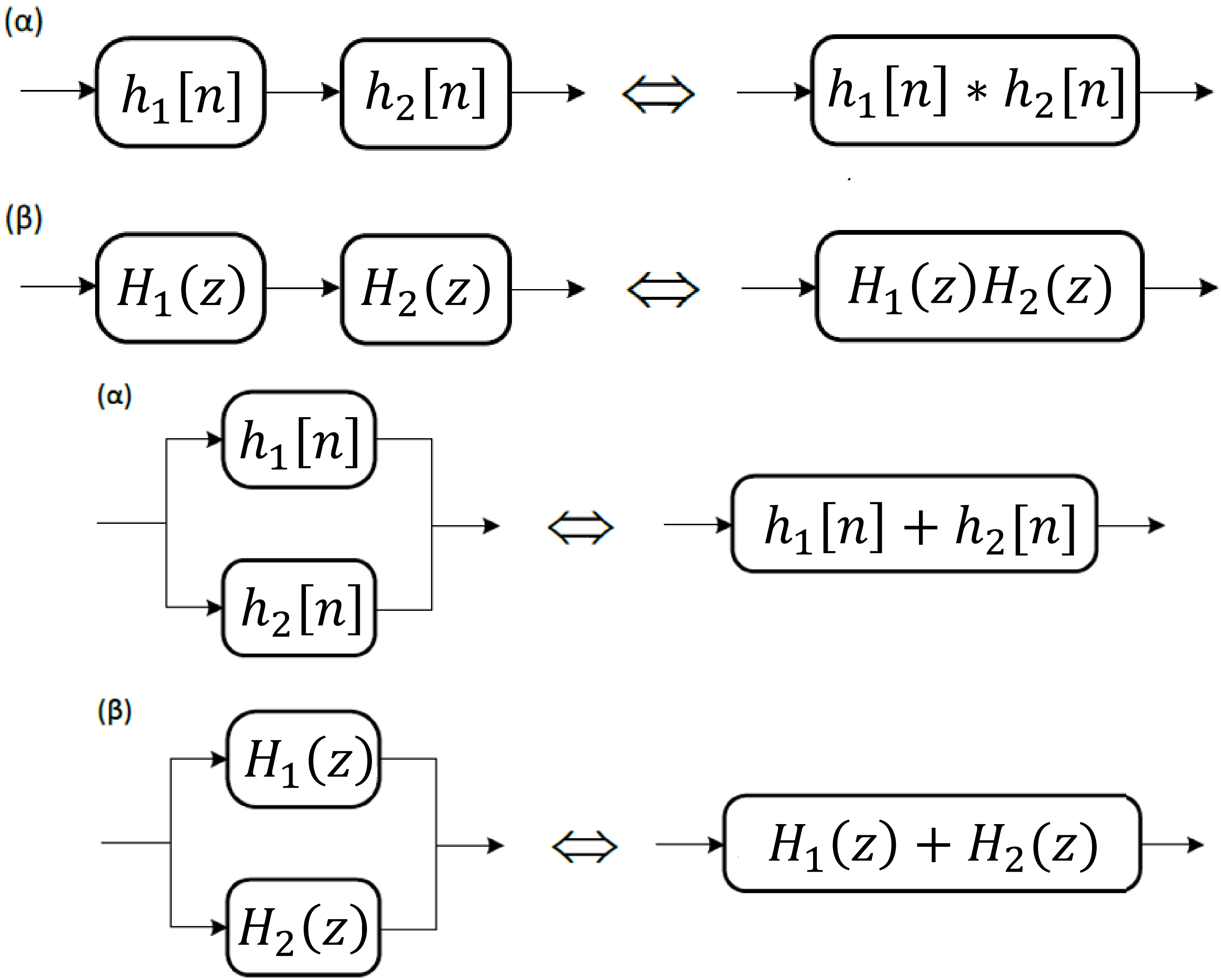




- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Διατάξεις Συστημάτων**



- **Ευστάθεια στο χώρο του Z**
- Έχουμε δείξει ότι αν $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$ τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$\Updownarrow$

- Αν $|\gamma_i| < 1, \ \forall\, i$, όπου γ_i οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$\Updownarrow$

- Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$\Updownarrow$

- Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του $h[n]$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall\ \omega$

$\Updownarrow$

- Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Z, αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

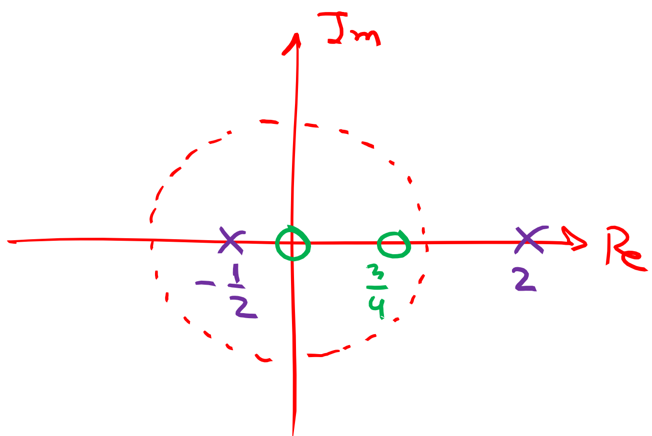
$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Είναι $H(z) = \dfrac{2z^2 - \frac{3}{2}z}{(z-2)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{z\left(2z - \frac{3}{2}\right)}{(z-2)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$

Πόλοι: $(z-2)\left(z+\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow z_1 = 2$, $\rightarrow z_2 = -\frac{1}{2}$

Μηδενικά: $z\left(2z - \frac{3}{2}\right) = 0 \rightarrow z_1 = 0$, $\rightarrow z_2 = \frac{3}{4}$

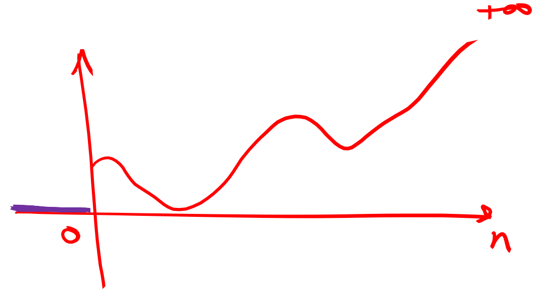


Πιθανά πεδία σύγκλισης: α) $|z| > 2$ β) $\frac{1}{2} < |z| < 2$ γ) $|z| < \frac{1}{2}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Ευστάθεια**
  - Παράδειγμα:

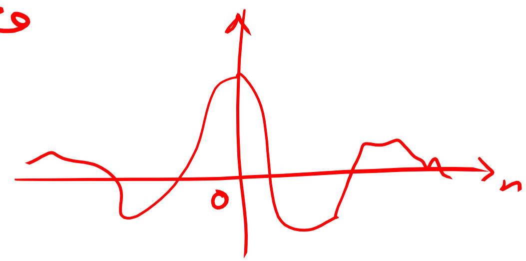
~ $|z| > 2$: ασταθές, αιτιατό

Αναμένω $h[n]$ ως



~ $\frac{1}{2} < |z| < 2$: ευσταθές, γιατί ο μοναδ. κύκλος $\in$ ROC,
μη αιτιατό

Αναμένω $h[n]$ ως



~ $|z| < \frac{1}{2}$: ασταθές, αντιαιτιατό

Αναμένω $h[n]$ ως

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Ευστάθεια**
  - Παράδειγμα:

Αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα το $H(z)$:

$$H(z) = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \text{ με } \quad A = H(z)(1-2z^{-1})\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = 1$$

$$B = H(z)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z^{-1}=-2} = 1$$

οπότε

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

α) Για να είναι ευσταθές, πρέπει $\frac{1}{2} < |z| < 2$, δηλ. $|z| < 2$ και $|z| > \frac{1}{2}$

Άρα από πίνακες, $h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

β) Για να είναι αιτιατό, πρέπει $|z| > 2$, δηλ. $|z| > 2$ και $|z| > \frac{1}{2}$

Άρα από πίνακες, $h[n] = 2^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Ευστάθεια**
  - Παράδειγμα:

Τέλος, μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα προκύπτει ως:

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2} z^{-1}}{1 - \frac{3}{2} z^{-1} - z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Leftrightarrow$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{3}{2} z^{-1} - z^{-2}\right) = X(z)\left(2 - \frac{3}{2} z^{-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$Y(z) - \frac{3}{2} z^{-1} Y(z) - z^{-2} Y(z) = 2X(z) - \frac{3}{2} z^{-1} X(z)$$

και από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, παίρνουμε

$$y[n] - \frac{3}{2} y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2} x[n-1].$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ