Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

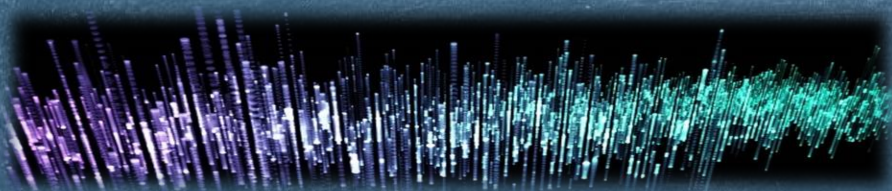
ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Μετασχηματισμός Z

Τι περιέχει το ΗΥ370?

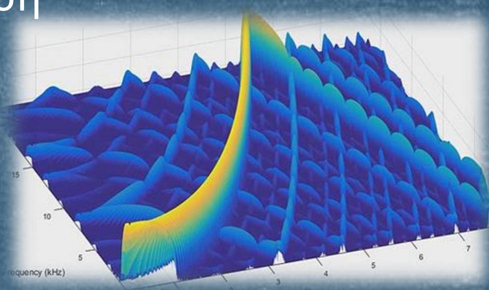
1^{o} Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Ζ
- Συστήματα στο χώρο του Ζ
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας

- Παρ’ όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:

  1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  2. Υπάρχουν συστήματα (a.k.a κρουστικές αποκρίσεις) που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα

- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!

- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι’ αυτό?

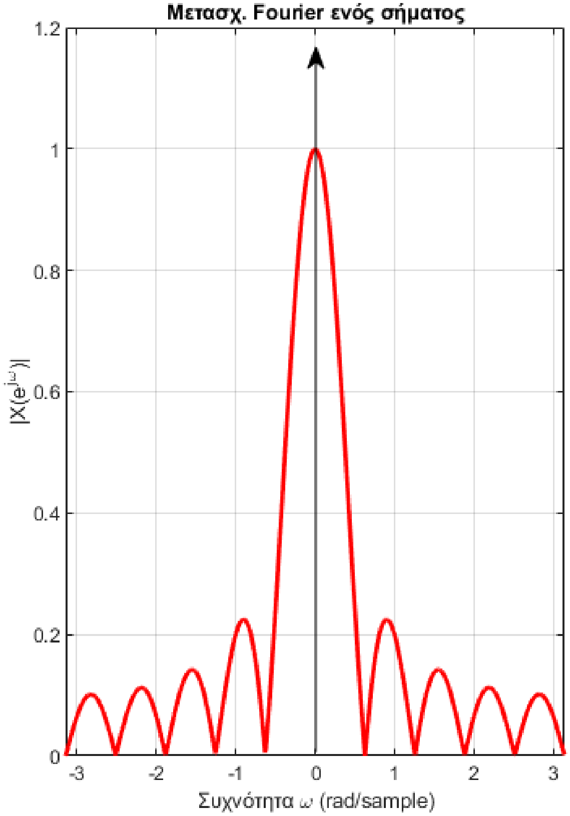
- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

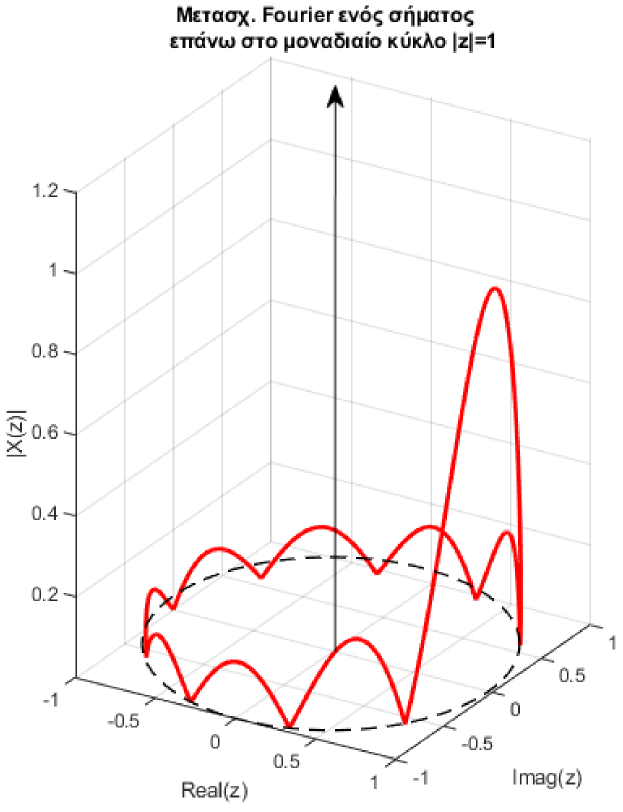
- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους $e^{-j\omega n}$

- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον *μοναδιαίο* κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου

- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα

- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
  - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?





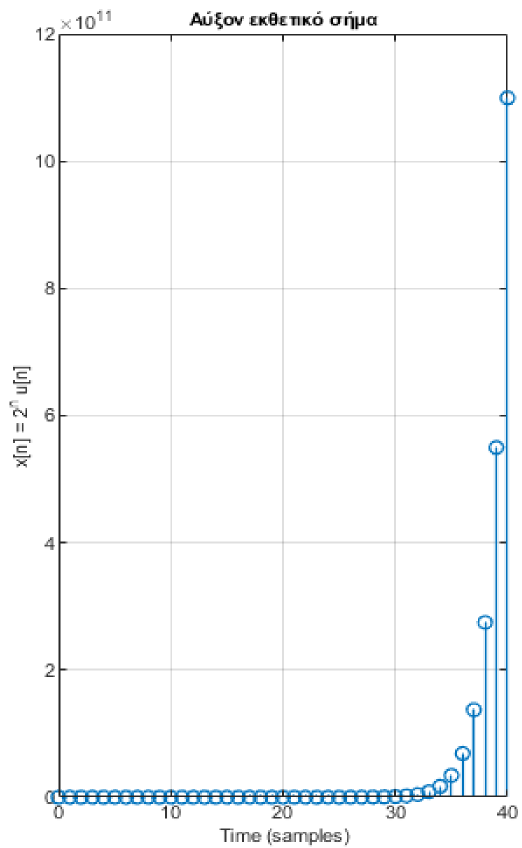
- Έστω το σήμα

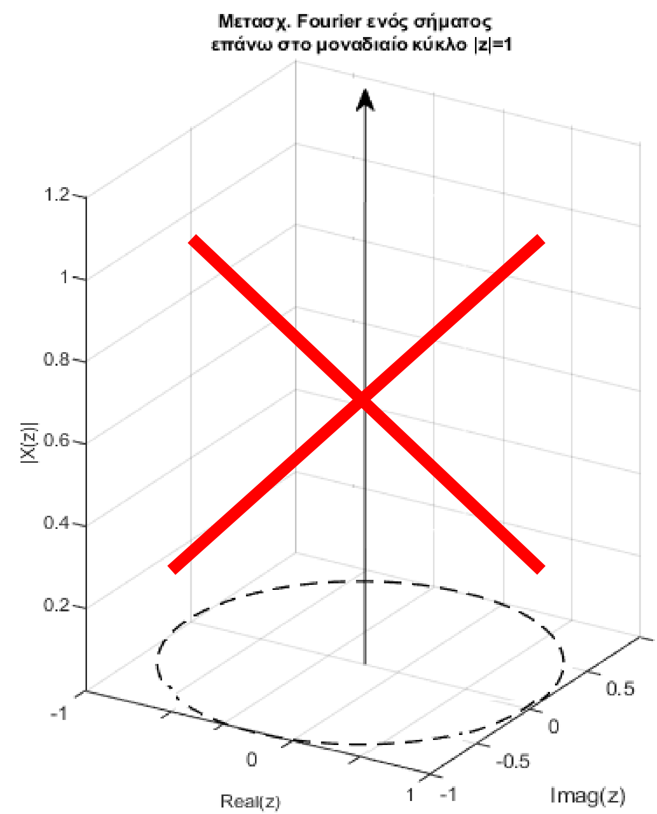
$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier

- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους

- Διαφορετικού πλάτους ίσως?





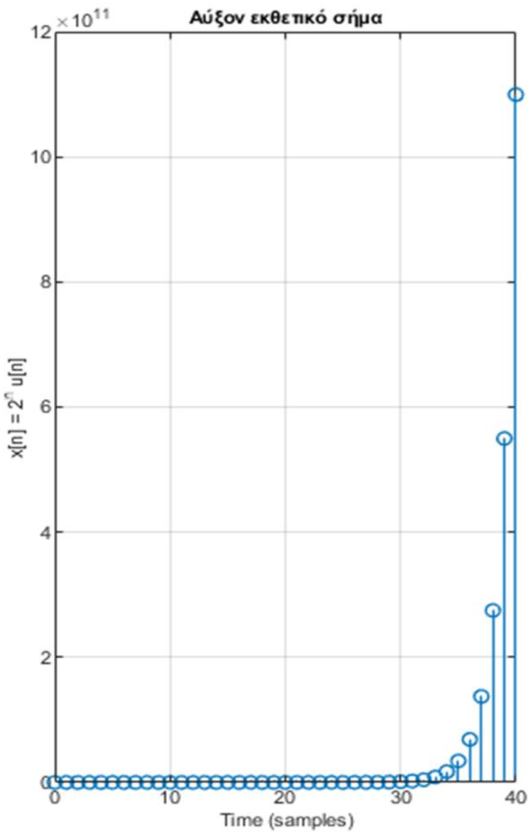
- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

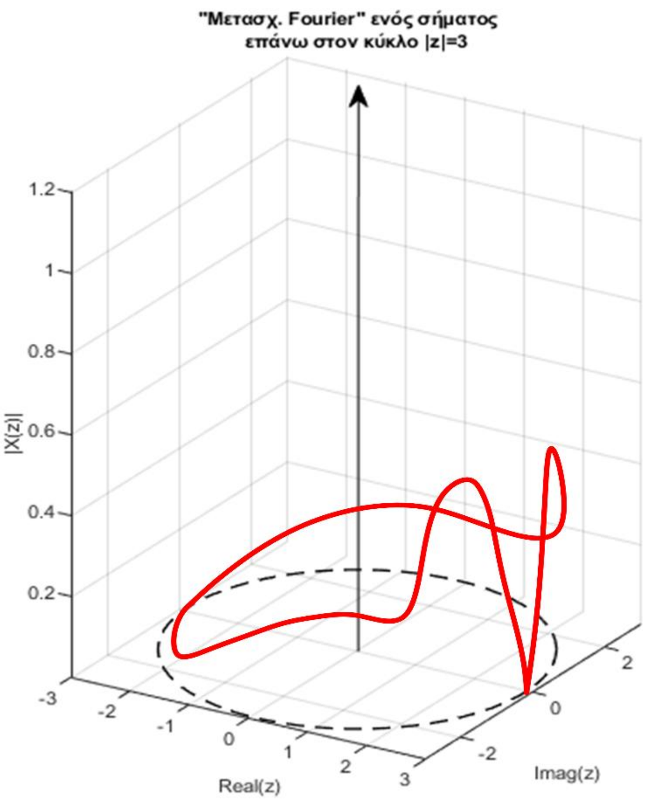
$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r





- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προφανώς όταν

$$\left|X\left(re^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]r^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| < +\infty$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση
  - Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη
- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n] = 2^n u[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2^n}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2}{r}\right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

- Θέτοντας

$$z = re^{j\omega}, \qquad r \in \Re_+$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$|z| > 2$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο νέος αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

  - Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, |z| > 2$$

- Παράδειγμα:

  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\underbrace{a z^{-1}}_{<1})^n$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ όταν } |az^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |a||z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a|/|z| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z| > |a|. \leftarrow \text{Π.Σ. ROC}$$

Άρα

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

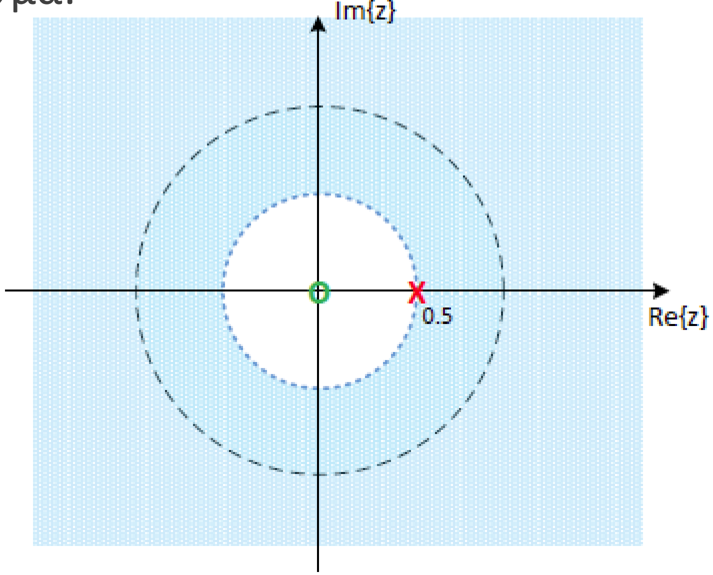
$$\frac{z}{z-a} = X(z)$$

Ρίζες αριθμητή : μηδενικά : $z = 0$

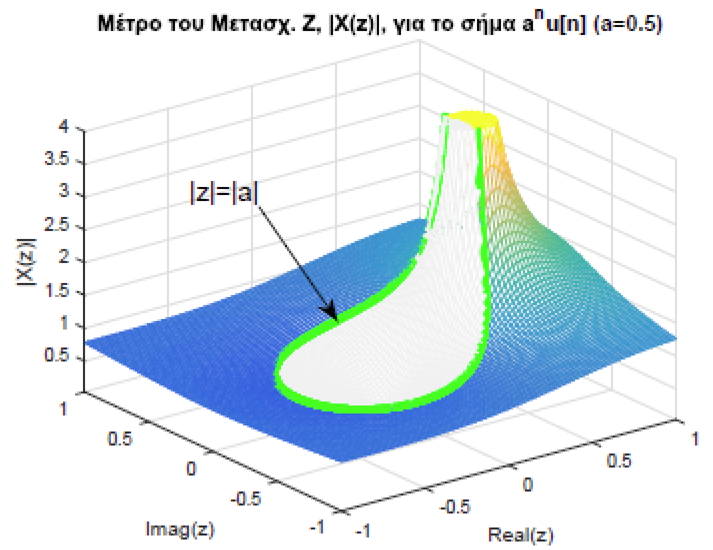
Ρίζες παρονομαστή : πόλοι : $z - a = 0 \Leftrightarrow z = a$.

- Παράδειγμα:

$a = \frac{1}{2}$



(α′) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β′) Μέτρο μετασχ. Z.

- Παράδειγμα:

  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-a^n u[-n-1]\right) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-a^n z^{-n}\right) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(a z^{-1}\right)^n \underset{n=-k}{=} -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(a z^{-1}\right)^{-k}$$

$$= -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(a^{-1} z\right)^k = -\frac{a^{-1} z}{1-a^{-1} z}, \text{ όταν } |a^{-1} z| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a^{-1}| \cdot |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a| \leftarrow \text{ROC}$$

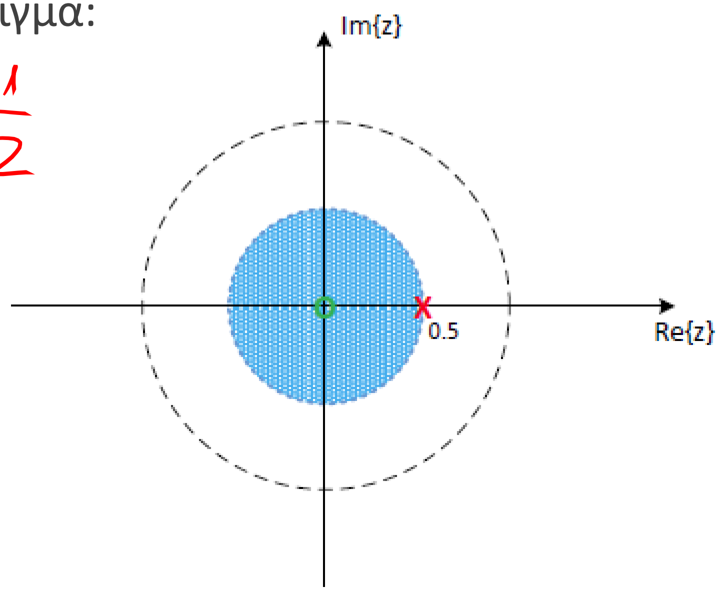
Είναι

$$X(z) = \frac{-a^{-1} z}{1-a^{-1} z} = \frac{-\cancel{a^{-1} z}}{-\cancel{a^{-1} z}\left(-a z^{-1}+1\right)} = \frac{1}{1-a z^{-1}}.$$

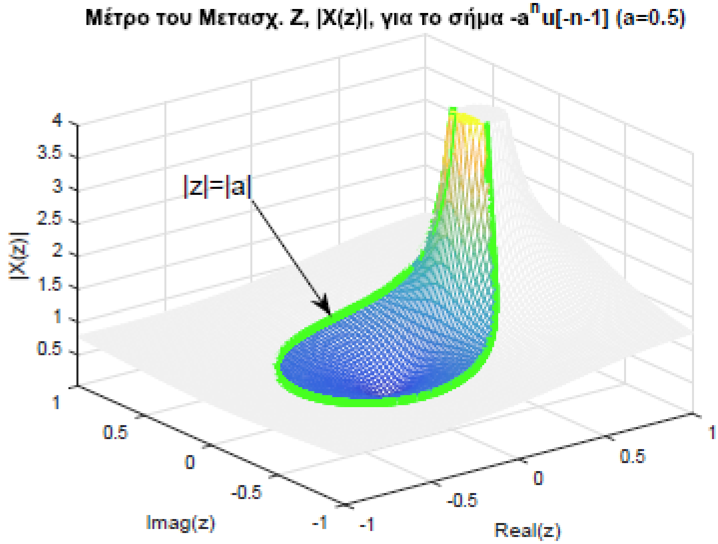
$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} a^n = \frac{a^{N_1}}{1-a}, \quad |a| < 1$$

- Παράδειγμα:

$a = \frac{1}{2}$



(α′) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β′) Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|.$$

Μηδενικά: $z = 0$

Πόλοι: $z - a = 0 \Leftrightarrow z = a$.

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a^n u[n] - b^n u[-n-1] \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-b^n u[-n-1] \right) z^{-n}$$

από προηγ. παραδ.

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

$$|z|>|a| \qquad |z|<|b|$$

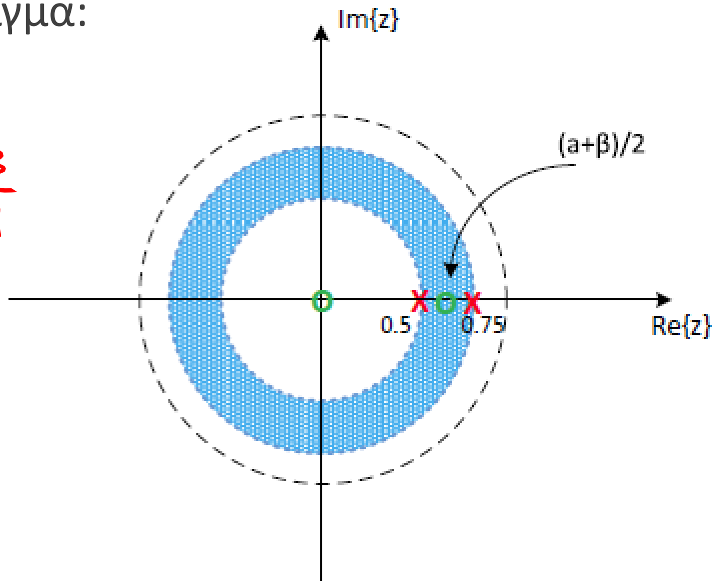
Πεδίο σύγκλισης: ~ $|a|>|b|$, η τομή των δύο περιοχών σύγκλισης είναι το κενό σύνολο. $ROC = \varnothing$

~ $|a|<|b|$, τότε η τομή τους είναι $|a|<|z|<|b|$ και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης.

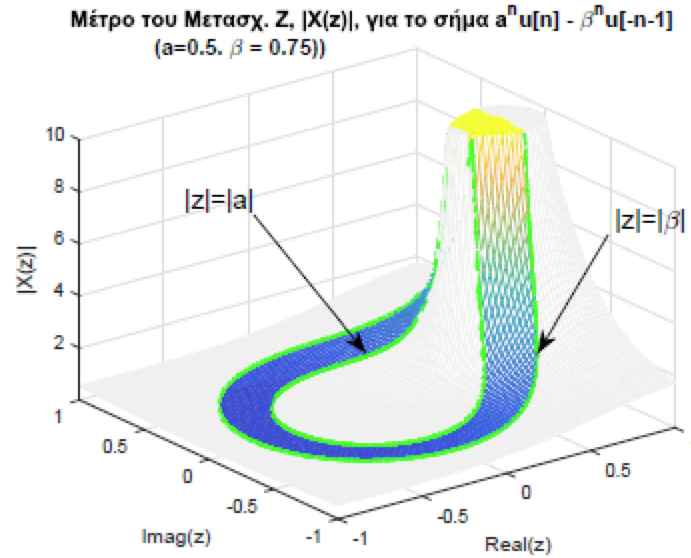
- Παράδειγμα:

$a = \frac{1}{2}$

$b = \frac{3}{4}$



(α′) Πεδίο σύγκλισης, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



(β′) Μέτρο μετασχ. Z με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

Είναι

$$X(z) = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{z^2}{z^2}\,\frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} =$$

$$= \frac{2z^2-(a+b)z}{(z-a)(z-b)}$$

Μηδενικά: $2z^2-(a+b)z = 0 \Rightarrow z=0$ και $z = \frac{a+b}{2}$.

Πόλοι: $(z-a)(z-b) = 0 \Rightarrow z = a$ και $z = b$.

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = u[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ αν}$$

$$|z^{-1}| < 1 \iff |z| > 1 \leftarrow \text{ROC}$$

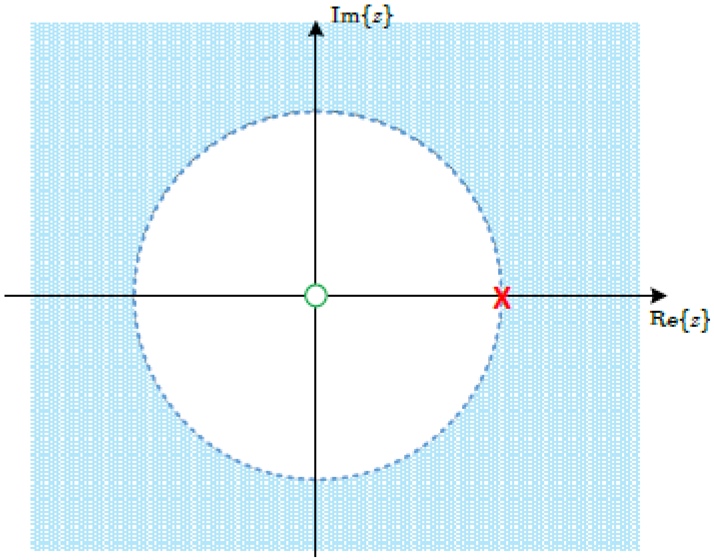
Άρα

$$u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}, \ |z| > 1$$

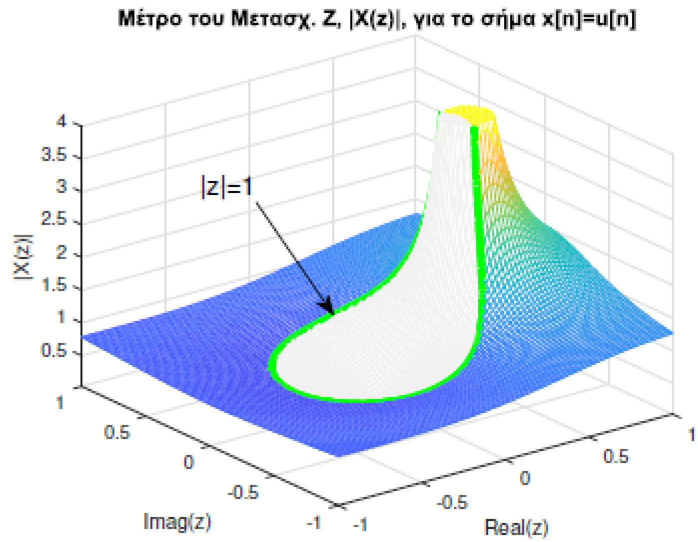
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

$$|a| < 1$$

- Παράδειγμα:



(α′) Περιοχή σύγκλισης.



(β′) Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = u[n]$.

Είναι $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

Μηδενικά: $z = 0$

Πόλοι: $z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$.

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$

Είναι

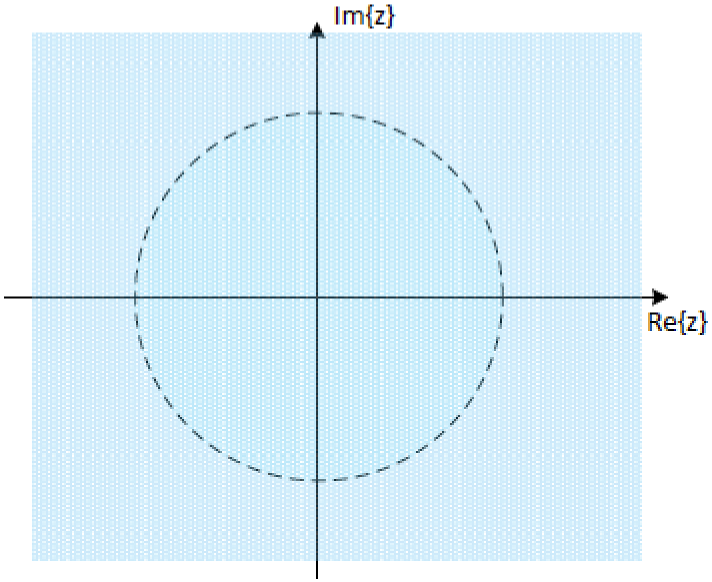
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

$$\begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

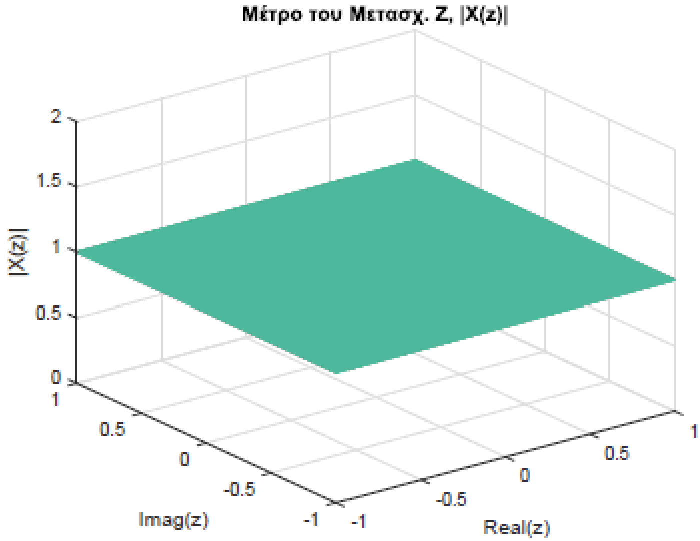
Άρα

$$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1, \ \forall z$$

- Παράδειγμα:



(α΄) *Πεδίο σύγκλισης.*



(β΄) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n]$.

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0] z^{-n}$$

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$= z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}} = \frac{1}{\underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n_0 \text{ φορές}}}$$

~ αν $n_0 > 0$, $X(z) = \frac{1}{z^{n_0}}$, έχει πόλο στο $z = 0$ και μηδενικά στο άπειρο γιατί $\lim_{z \to \infty} X(z) = 0$

ROC: $|z| > 0$

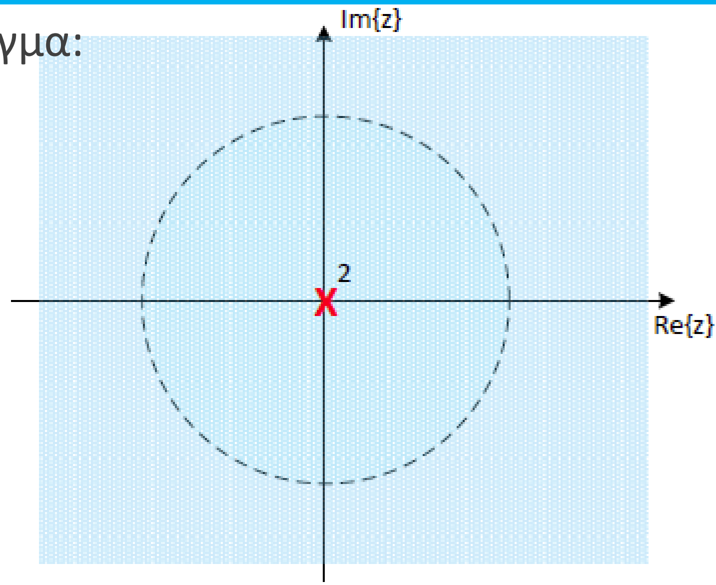
~ αν $n_0 < 0$, $X(z) = z^{n_0}$, έχει πόλο στο άπειρο και μηδενικά στο $z = 0$.

$z^{n_0} = 0 \Rightarrow \underbrace{z = 0,}_{n_0 \text{ φορές}}$

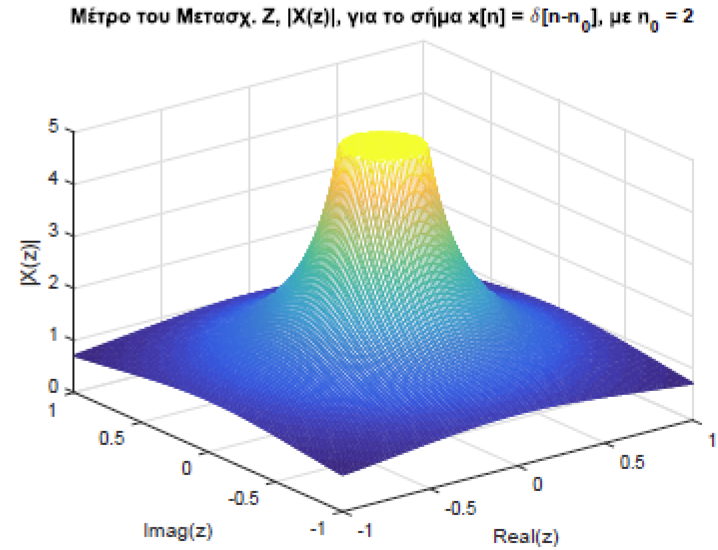
ROC: $|z| < \infty$

- Παράδειγμα:

$n_0 = 2$

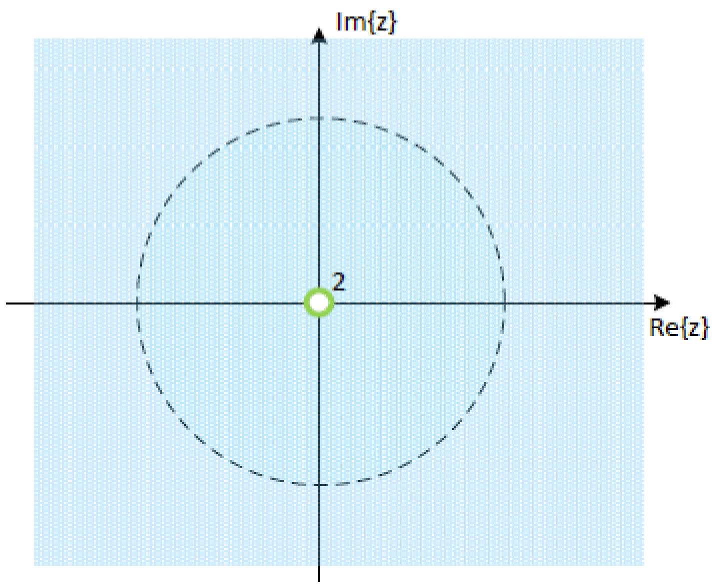


(α′) Πεδίο σύγκλισης.

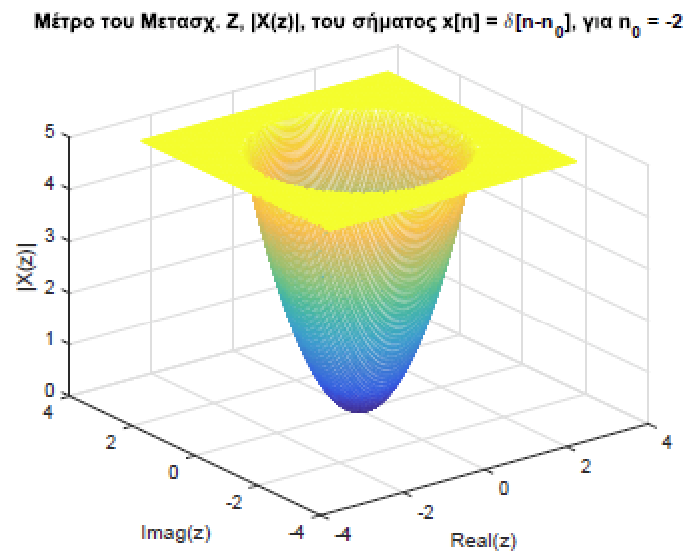


(β′) Μέτρο μετασχ. Ζ σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = 2$.

$n_0 = -2$



(α′) Πεδίο σύγκλισης.



(β′) Μέτρο μετασχ. Ζ σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = -2$.

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Ζ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
  - ΌΧΙ!
  - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

  - Για το σήμα $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ δείξαμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

  - Ας βάλουμε τιμές στον πόλο α, κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών

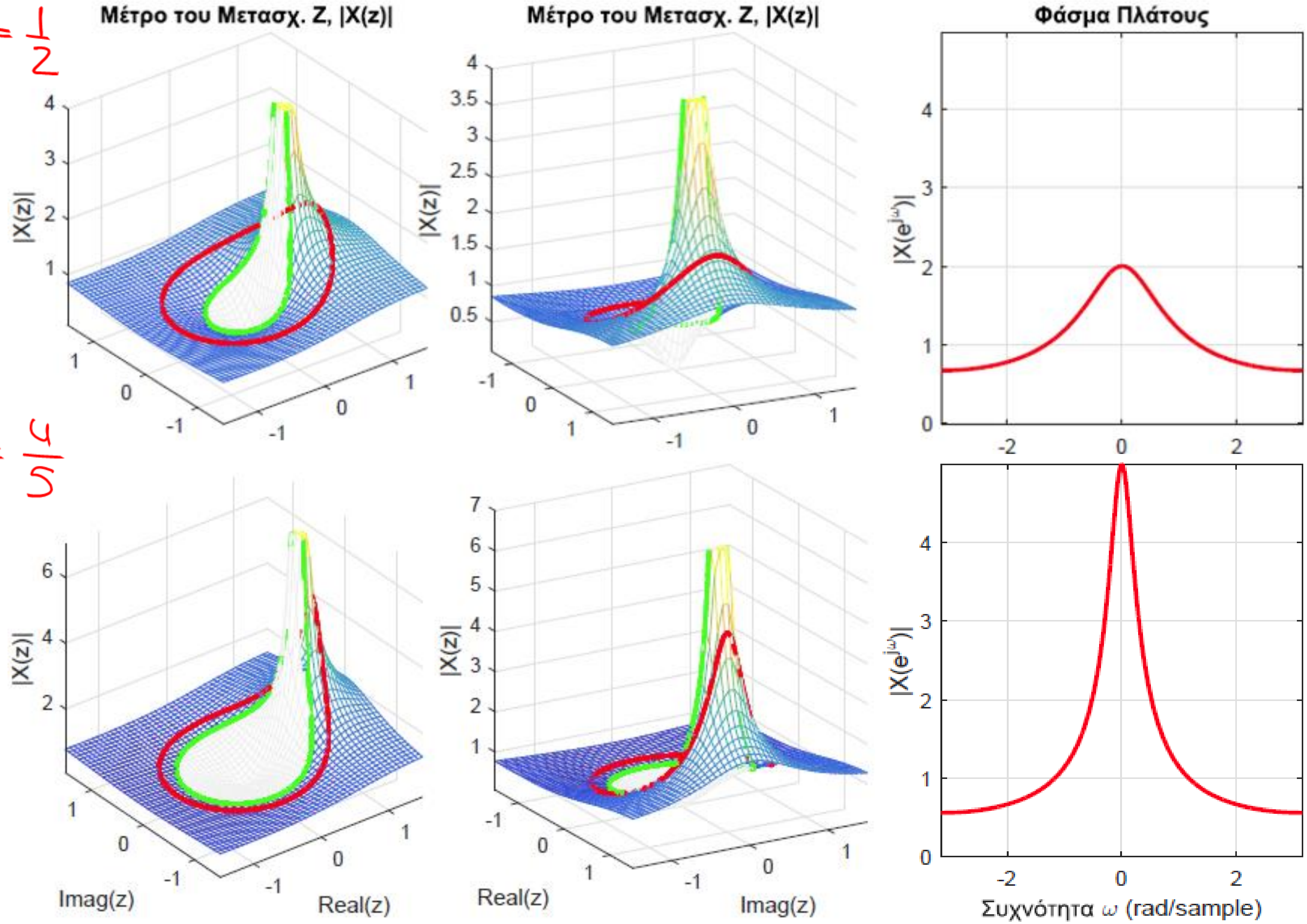
  - Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$

  - Δείτε τι συμβαίνει…

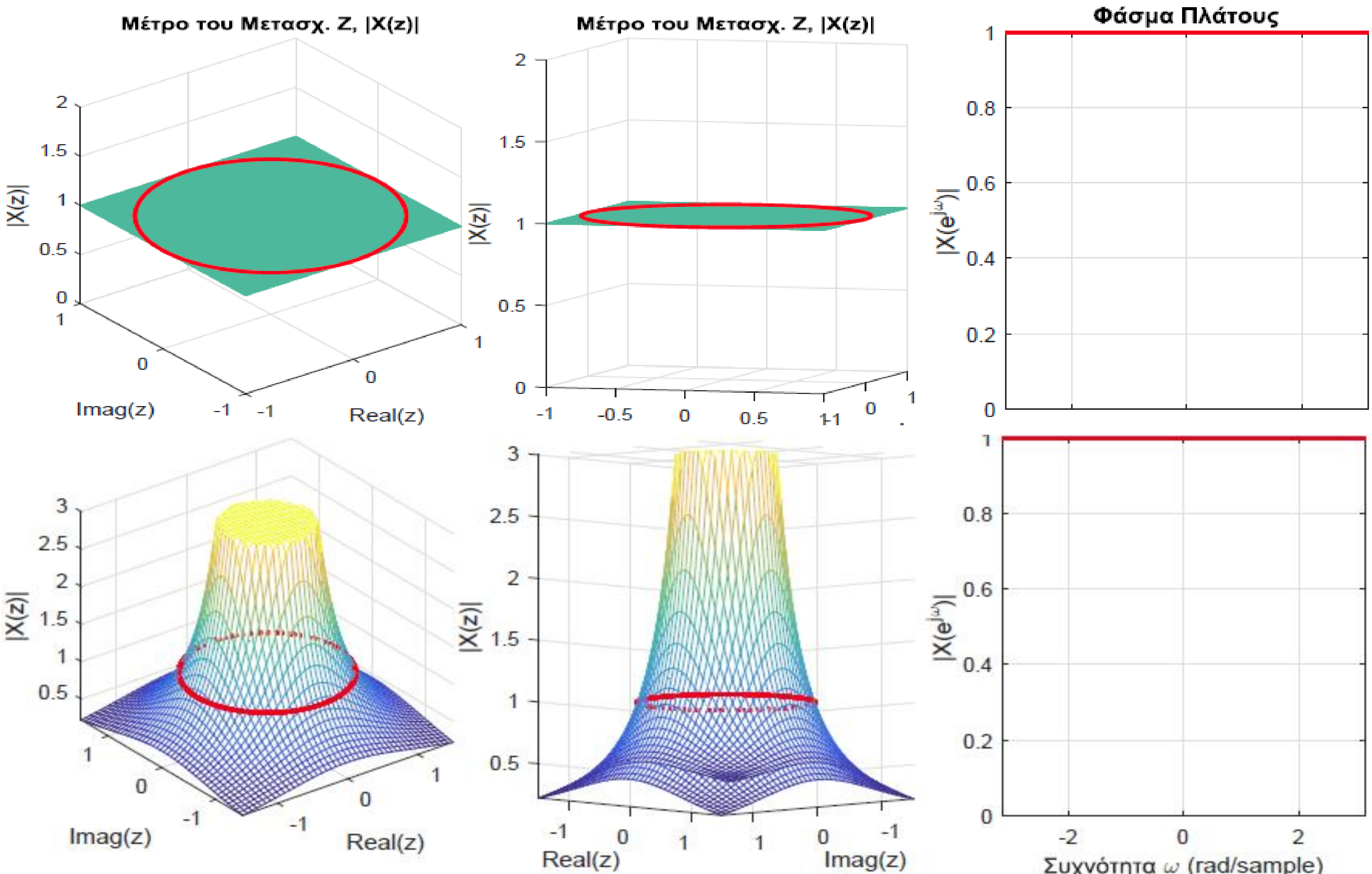
- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

$a = \frac{1}{2}$

$a = \frac{4}{5}$



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n],\ x[n] = \delta[n-2]$?



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

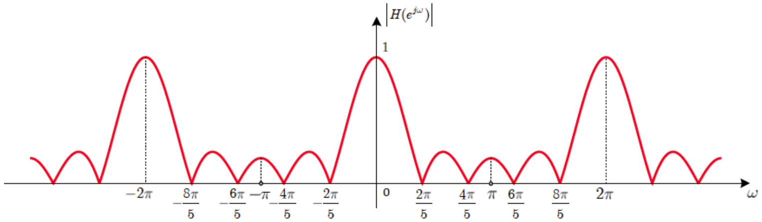
Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

(α′) Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.

(β′) Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη "φέτα" της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.

(γ′) Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά "φέτες " των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Μελετήστε τι συμβαίνει στο σήμα



$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} z^{-n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1-z^{-(M_2+1)}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{z^{M_2+1}}{z^{M_2+1}} \cdot \frac{1-z^{-(M_2+1)}}{1-z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{z^{M_2+1}-1}{z^{M_2+1}(1-z^{-1})} = \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{z^{M_2+1}-1}{z^{M_2+1}-z^{M_2}}$$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

Μηδενικά: $z^{M_2+1} = 1 \Leftrightarrow \left(|z| e^{j\varphi}\right)^{M_2+1} = e^{j2\pi k} \Leftrightarrow$

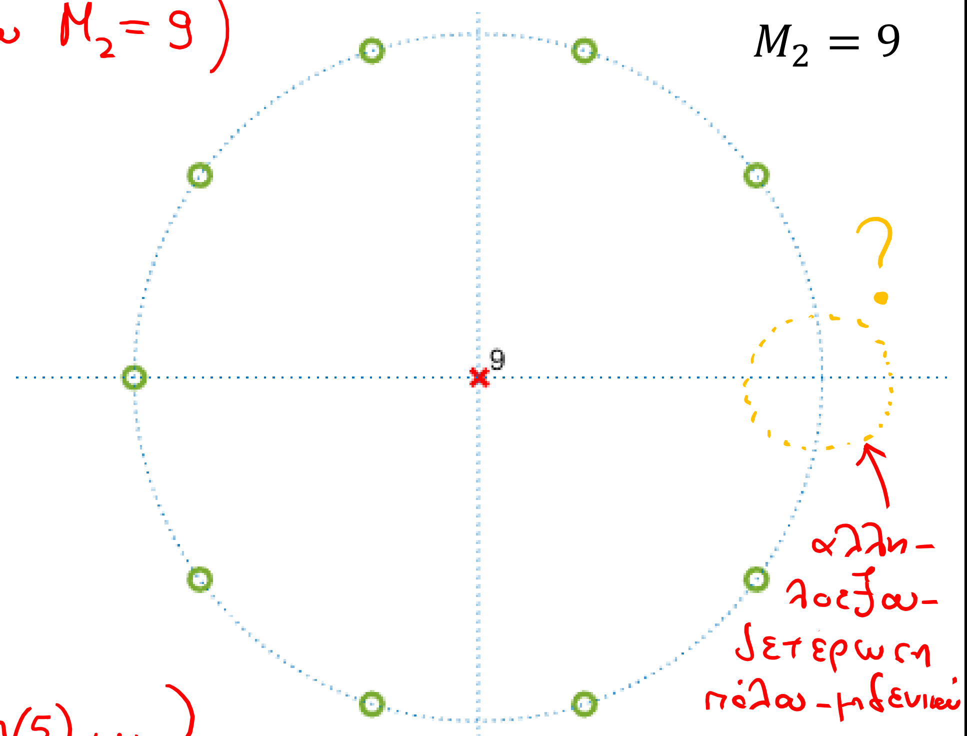
$$\Leftrightarrow |z|^{M_2+1} e^{j\varphi(M_2+1)} = e^{j2\pi k} \Rightarrow \begin{cases} |z|^{M_2+1} = 1 \Rightarrow |z| = 1 \\ \varphi_k = \dfrac{2\pi k}{M_2+1} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, M_2$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:

Πόλοι: $z^{M_2+1} - z^{M_2} = 0 \Leftrightarrow z^{M_2}(z-1) = 0 \Rightarrow M_2$ πόλους στο $z=0$ και έναν πόλο στο $z=1$. Συνολικά M_2+1 πόλους στο μιγαδικό επίπεδο.

Άρα θα έχουμε συνολικά: (έστω $M_2 = 9$)



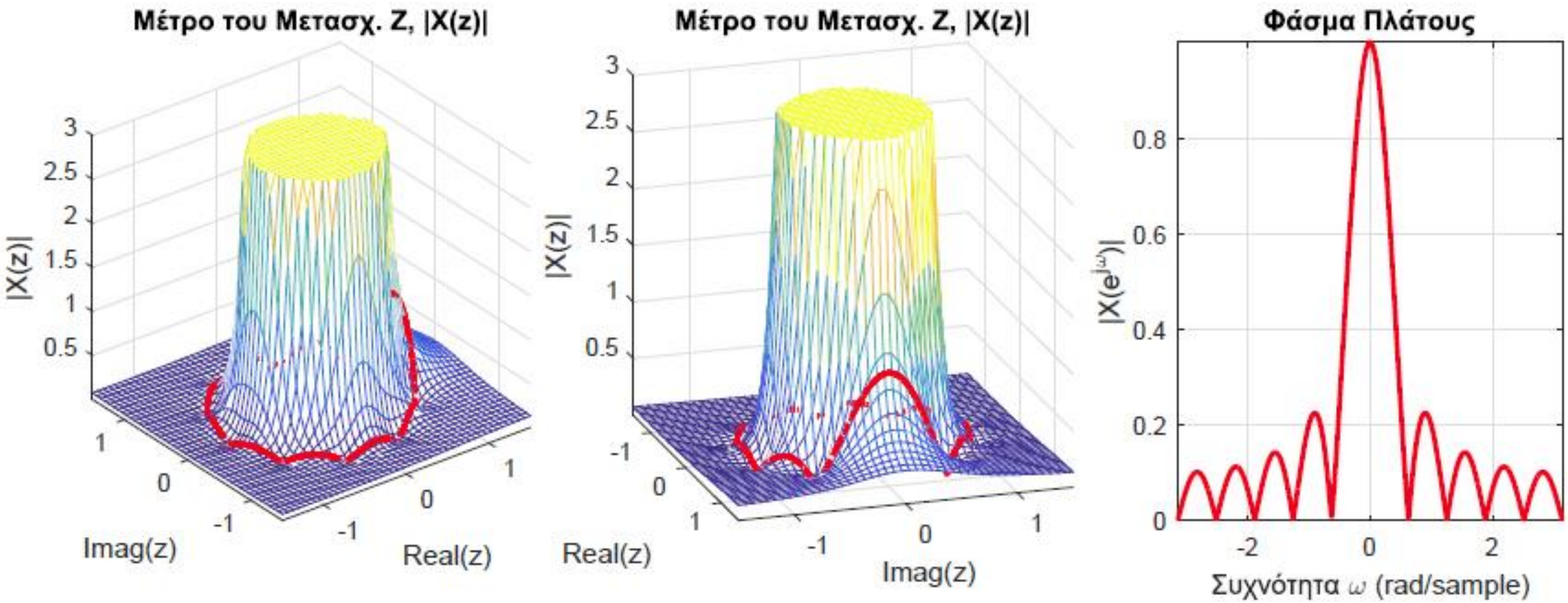
→ 10 πόλους
- ένας στο $z=1$
- εννιά στο $z=0$

→ 10 μηδενικά
- όλα στις θέσεις

$$z_k = e^{j\frac{2\pi k}{10}}, \quad k=0,\dots,9.$$

$\left(z_0 = 1,\ z_1 = \exp(j2\pi/10),\ z_2 = \exp(j2\pi/5),\ \dots\right)$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:



• Ιδιότητες Μετασχ. Ζ

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Ζ	Πεδιο Σύγκλισης
	$\mathbf{x[n]}$ $\mathbf{y[n]}$	$\mathbf{X(z)}$ $\mathbf{Y(z)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Ζ	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|Rx$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$	

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Γραμμικότητα: Βρείτε τον μετασχ. Ζ του σήματος

$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

με

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}, \qquad Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \qquad |z| > 1/2$$

Είναι

$$W(z) = X(z) + Y(z) = \frac{3/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1/2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right) - \frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\cancel{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad \begin{array}{l} \to |z| > \frac{1}{3} \\ \to |z| < \frac{1}{3} \end{array} \quad \longrightarrow |z| > \frac{1}{3}$$

υπερσύνολο της τομής

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Μετατόπιση στο χρόνο: Έστω το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$. Υπολογίστε το Μετασχ. Ζ του.

Ξέρουμε ότι $a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|>|a| \leftarrow R_x$

και η ιδιότητα $x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} X(z)\, z^{-n_0}$, ταλάιχ. R_x.

Είναι

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] = 9 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]}_{y[n+2]}$$

με $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

Άρα $X(z) = 9 \cdot Y(z)\, z^2 = 9 \dfrac{z^2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \ |z| > \dfrac{1}{3}$.

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Συζυγία στο χρόνο: Έστω ένα σήμα $x[n] \in \Re$ με ρητό μετασχ. Z που έχει
    - Ακριβώς δυο πόλους, με τον έναν στη θέση $z = \exp\left(-\frac{j\pi}{8}\right)$
    - Ακριβώς δυο μηδενικά, με το ένα στη θέση $z = \sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$

  Βρείτε μια μορφή για το $X(z)$

Αφού το $x[n] \in \mathbb{R}$, τότε $x^*[n] = x[n]$, κι αφού $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$

και $x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$, θα έχουμε $\boxed{X(z) = X^*(z^*)}$ (1)

Αν z_0 είναι πόλος, τότε $X(z_0) \to \infty$ και λόγω (1) θα είναι

πόλος και το z_0^*!

Αν z_0 είναι μηδενικό του $X(z)$, τότε $X(z_0) = 0$ και λόγω (1),

το z_0^* θα είναι επίσης μηδενικό του $X(z)$!

Άρα αν $z = e^{-j\frac{\pi}{8}}$ είναι πόλος του $X(z)$, τότε και το $z^* = e^{j\frac{\pi}{8}}$ θα

είναι πόλος του, και το ίδιο θα ισχύει για τα μηδενικά.

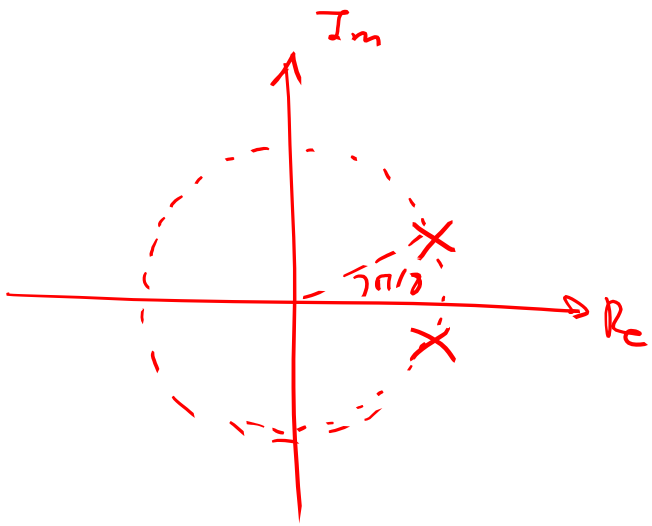
- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**

Οπότε

$$X(z) = A\,\frac{\left(z-\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(z-e^{j\frac{\pi}{8}}\right)\left(z-e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)}$$

$$= A\,\frac{\left(1-\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}{\left(1-e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1}\right)}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Η σταθερά δεν αλλάζει την συνάρτηση για πόλους & μηδενικά!



$|z| > 1$

ή

$|z| < 1$

Δεν έχουμε πληροφορία για να ξέρουμε ποιό από τα δύο πεδία είναι το σωστό

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**

Ίδια συζήτηση ισχύει και για τους πολους!

Σημείωση: // Για ένα σήμα $x[n] \in \mathbb{R}$ //

Αν $X(z_0) = 0$ (A), το z_0 είναι μηδενικό του $X(z)$.

Δείξαμε ότι και το z_0^* θα είναι μηδενικό του $X(z)$,

γιατί

$$X(z_0) = X^*(z_0^*) \longleftarrow$$ λόγω του ότι $x[n] = x^*[n]$, για $x[n] \in \mathbb{R}$

εφαρμόζω συζυγία και στα δύο μέλη

$$\left(X(z_0)\right)^* = \left(X^*(z_0^*)\right)^*$$

$$\left(X(z_0)\right)^* = X(z_0^*)$$

βάλαμε τον τελεστή της συζυγίας εντός της παρένθεσης στο 2ο μέλος μόνο

λόγω (A) $\longrightarrow$ $0^* = X(z_0^*)$

$$0 = X(z_0^*) \Longrightarrow$$ το z_0^* είναι μηδενικό του $X(z)$!

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Συνέλιξη στο χρόνο: Έστω τα σήματα $x[n] = (2)^n u[n]$, $y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Βρείτε τη συνέλιξή τους

Είναι

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z), \quad R \geq R_x \cap R_y$$

Άρα

$$x[n] = 2^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z| > 2 = R_x$$

$$y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} = R_y$$

Οπότε

$$C(z) = X(z)Y(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$= \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad \mu\varepsilon:$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**

$$A = C(z)(1-2z^{-1})\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

$$B = C(z)(1+\frac{1}{4}z^{-1})\Big|_{z^{-1}=-4} = \frac{1}{1-2z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-4} = \frac{1}{1+8}.$$

Άρα

$$C(z) = \frac{8}{9}\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

- $|z|>2$
- $|z|<2$

Z^{-1}

- $|z|>\frac{1}{4}$
- $|z|<\frac{1}{4}$

$\rightsquigarrow R = \{|z|>2\} = R_x \cap R_y$

κι από πινακάκια,

$$c[n] = \frac{8}{9}2^n u[n] + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ