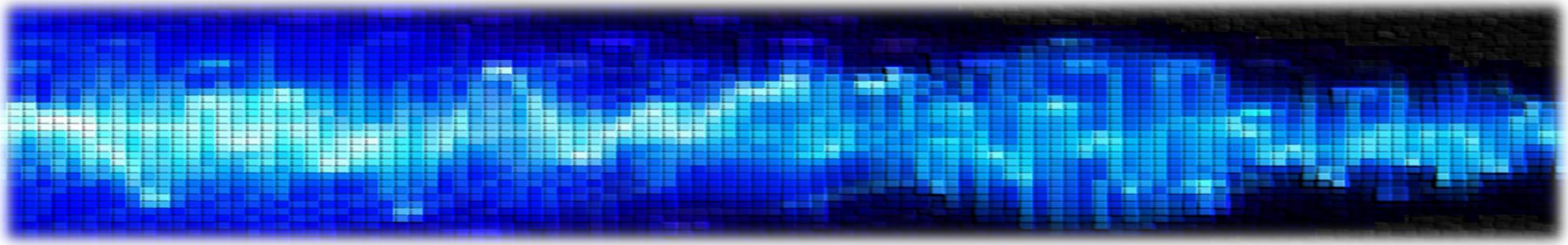
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 9Η



- Συστήματα στο χώρο του Fourier
- Καθυστέρηση φάσης και καθυστέρηση ομάδας

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας (επανάληψη…)**

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\updownarrow$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi_Y\left(e^{j\omega}\right)} = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\left(\varphi_X\left(e^{j\omega}\right)+\varphi_H\left(e^{j\omega}\right)\right)}$$

- Οπότε

$$\left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$$
$$\varphi_Y\left(e^{j\omega}\right) = \varphi_X\left(e^{j\omega}\right) + \varphi_H\left(e^{j\omega}\right)$$

- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H\left(e^{j\omega}\right)$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\updownarrow$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

- Για να μπορούμε να εφαρμόζουμε το μετασχ. Fourier σε μια εξίσωση διαφορών, υποθέτουμε ότι το σύστημα **έχει** μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, ότι η απόκριση σε συχνότητα υπάρχει μέσω της σύγκλισης του μετασχηματισμού
  - Δεν είναι πάντα αληθές αυτό
- Για να υπάρχει η απόκριση σε συχνότητα αρκεί (όπως δείξαμε στη θεωρία του DTFT)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

- Η παραπάνω συνθήκη αποτελεί συνθήκη ευστάθειας του συστήματος!
- Άρα πρέπει να έχουμε **ευσταθές σύστημα** για να μπορούμε να πάρουμε το μετασχ. Fourier του!

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Όσον αφορά την επίδραση της απόκρισης πλάτους ενός ΓΧΑ συστήματος στην είσοδό του, τα πράγματα είναι σχετικά ξεκάθαρα
    - Η απόκριση πλάτους πολλαπλασιάζεται με το φάσμα πλάτους της εισόδου
    - That's it. ☺
  - **Φαινομενικά** και η επίδραση της απόκρισης φάσης δε συνιστά κάτι πολύπλοκο
    - Η απόκριση φάσης προστίθεται στο φάσμα φάσης της εισόδου
  - Υπενθυμίζεται ότι η φάση σχετίζεται με τη χρονική δομή ενός σήματος
    - Φάση = μετατόπιση
  - Οπότε η επίδραση της απόκρισης φάσης διατηρεί ή όχι την αρχική χρονική δομή του σήματος στην έξοδο του συστήματος
  - Όμως τελικά τα πράγματα δεν είναι τα όσο απλά για την απόκριση φάσης. Γιατί?
  - Γιατί η φάση ενός μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα!
    - Η πρόσθεση οποιουδήποτε ακέραιου πολλαπλάσιου του 2π διατηρεί την ίδια τιμή στη φάση

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

- Όταν υπολογίζουμε τη φάση μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης, το αποτέλεσμα είναι πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$
  - Αυτή η τιμή ονομάζεται πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal phase value)

$$-\pi < ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] \leq \pi$$

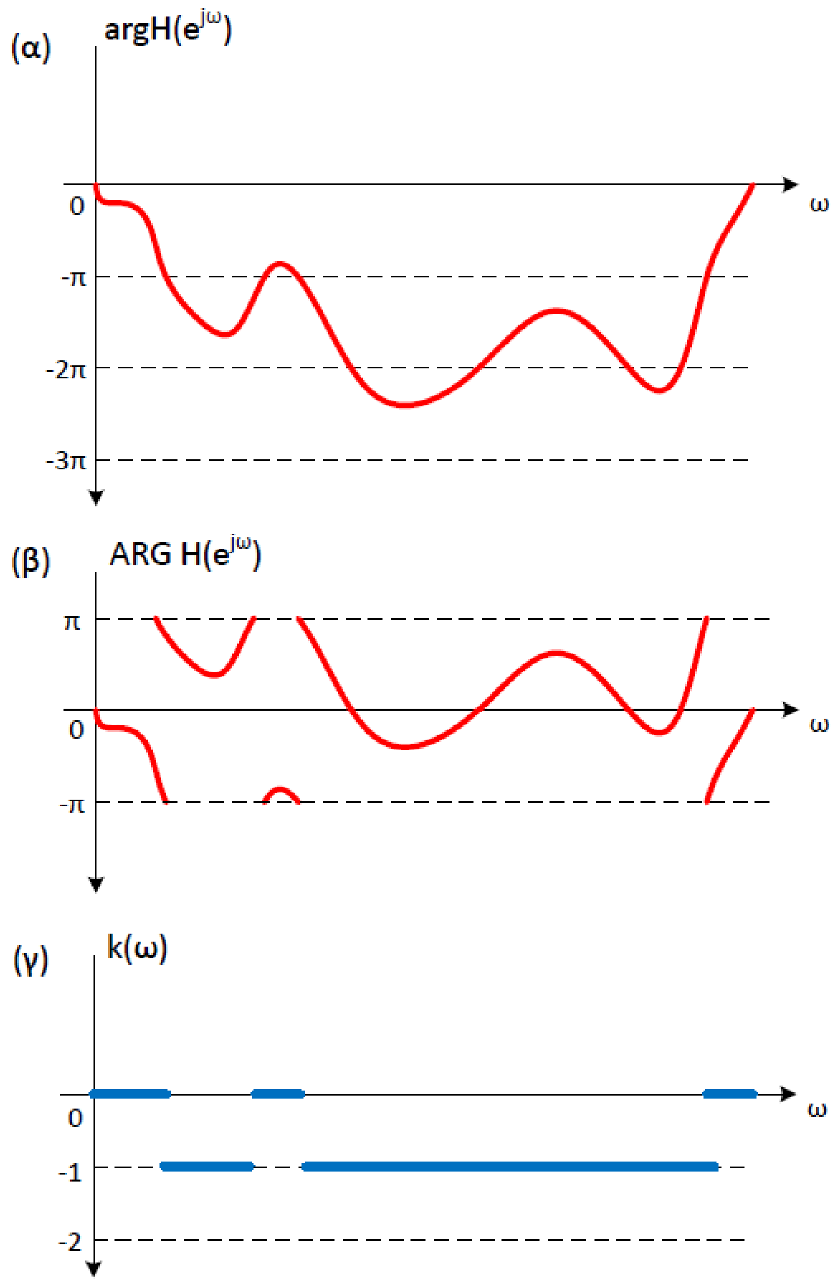
  - Οποιαδήποτε άλλη γωνία μπορεί να γραφεί με βάση την πρωτεύουσα φάση ως

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H\left(e^{j\omega}\right) = \arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] + 2\pi \boxed{k(\omega)} \rightarrow \in Z$$

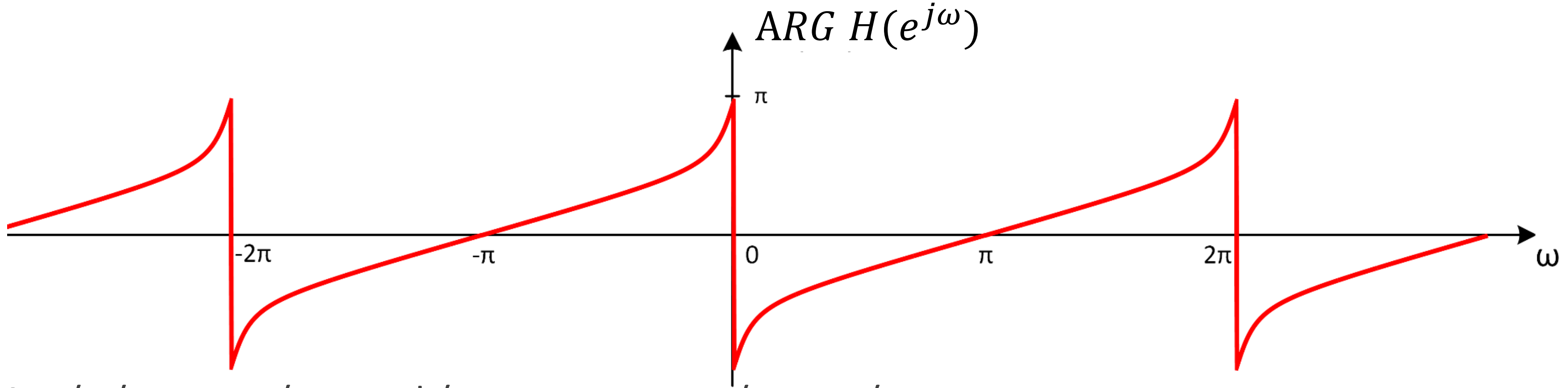
- Η διαδικασία εύρεσης της συνεχούς (ως προς ω) συνάρτησης φάσης από την πρωτεύουσα φάση που παίρνουμε από την αντίστροφη εφαπτομένη ονομάζεται **ξετύλιγμα φάσης (phase unwrapping)**

- Δείτε το ακόλουθο σχήμα

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**



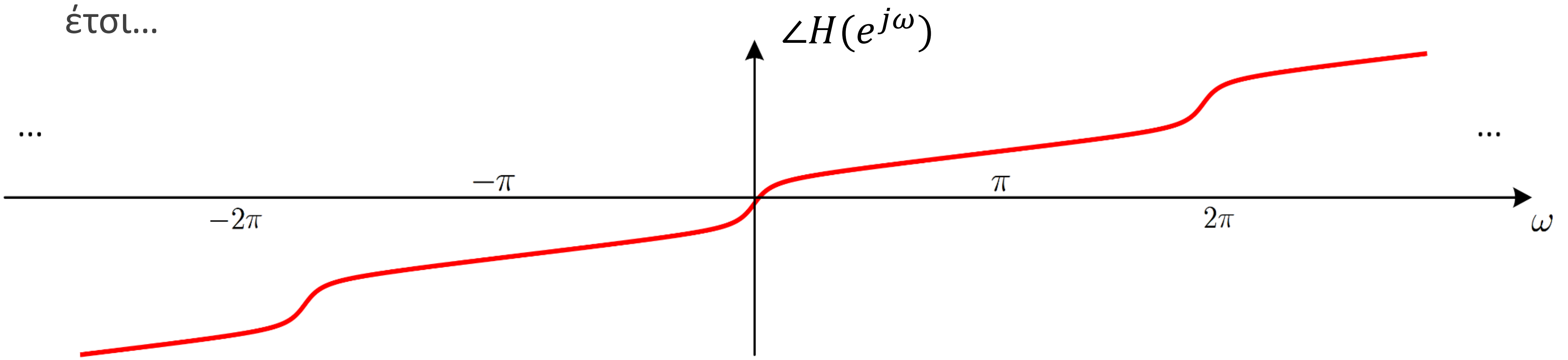
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα από το παρελθόν ☺



  - Αυτή είναι η απόκριση φάσης του γνωστού σας σήματος

$$h[n] = -a^n u[-n-1], |a| > 1$$

  - Αν την «ξετυλίξουμε» θα είναι κάπως έτσι…



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

- Έχουμε δει πως ερμηνεύεται η απόκριση φάσης, όσον αφορά την επίδρασή της σε ένα **απειρης διάρκειας** ημιτονοειδές σήμα που εμφανίζεται στην είσοδο του συστήματος
  - Αν το σήμα έχει συχνότητα ω_0 τότε η απόκριση φάσης σε αυτή τη συχνότητα προστίθεται στην υπάρχουσα φάση της εισόδου…
  - …κι έτσι η έξοδος θα έχει εν γένει διαφορετική φάση σε σχέση με την είσοδο

- Το πρόβλημα είναι ότι τα **άπειρης διάρκειας** αυτά σήματα δεν υπάρχουν στην πράξη

- Επιπλέον, τα περισσότερα πραγματικά (δηλ. υπαρκτά «εκεί έξω») σήματα είναι όχι μόνο πεπερασμένης διάρκειας αλλά και μη σταθερού πλάτους
  - …δηλ. το **ακριβώς αντίθετο** με ένα σήμα της μορφής $A\cos(\omega_0 n + \phi)$!!! ☺

- Πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε την απόκριση φάσης σε τέτοια συστήματα?
  - Ας πάμε βήμα-βήμα… ☺

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{\boxed{|H(e^{j\omega})|}}_{\text{Απόκριση πλάτους}} e^{j\underbrace{\boxed{\phi_H(e^{j\omega})}}_{\text{Απόκριση φάσης}}}$$

Απόκριση πλάτους

Απόκριση φάσης

- Ένα σήμα εισόδου $x[n]$ μπορεί να γραφεί συχνοτικά μέσω του μετασχ. Fourier του:

$$X(e^{j\omega}) = \boxed{|X(e^{j\omega})|} e^{j\boxed{\phi_X(e^{j\omega})}}$$

Φάσμα πλάτους εισόδου

Φάσμα φάσης εισόδου

- Ξέρουμε ότι στην έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{j\omega})| e^{j\phi_Y(e^{j\omega})} = \boxed{|H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})|} e^{j\boxed{\left(\phi_X(e^{j\omega})+\phi_H(e^{j\omega})\right)}}$$

Φάσμα πλάτους εξόδου

Φάσμα φάσης εξόδου

- Έστω μια ημιτονοειδής μορφή εισόδου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi_x)$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος για ημιτονοειδή είσοδο της μορφής

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi_x) = A\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0}\right)\right), \quad \boxed{-\infty < \boldsymbol{n} < +\infty}$$

δίνεται ως

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0 n + \phi_x + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

- Προσέξτε:

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0} + \frac{\phi_x}{\omega_0}\right)\right)$$

- Η ποσότητα

$$-\frac{\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}$$

μας δείχνει τη **χρονική καθυστέρηση σε δείγματα** του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

- Η συνάρτηση

$$\tau_p\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{\varphi_H\left(e^{j\omega}\right)}{\omega}$$

ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης (phase delay)**

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}\right)\right)$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα πρόσθεσε μια **επιπλέον καθυστέρηση φάσης**!

- Για παράδειγμα, αν για ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}(n-2)\right)$$

η απόκριση φάσης του ΓΧΑ συστήματος ήταν της μορφής $\phi_H\left(e^{j\omega}\right) = -2\omega$, τότε το σύστημα εισάγει στην είσοδο φάση ίση με

$$\phi_H\left(e^{j\pi/3}\right) = [-2\omega]_{\omega=\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\pi}{3}$$

- Άρα η **καθυστέρηση φάσης** του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου ισούται με

$$\tau_p\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\phi_H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{-\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}\right)\right)$$

- Άρα η **καθυστέρηση φάσης** του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου ισούται με

$$\tau_p\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right) = -\frac{\phi_H\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right)}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{-\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2$$

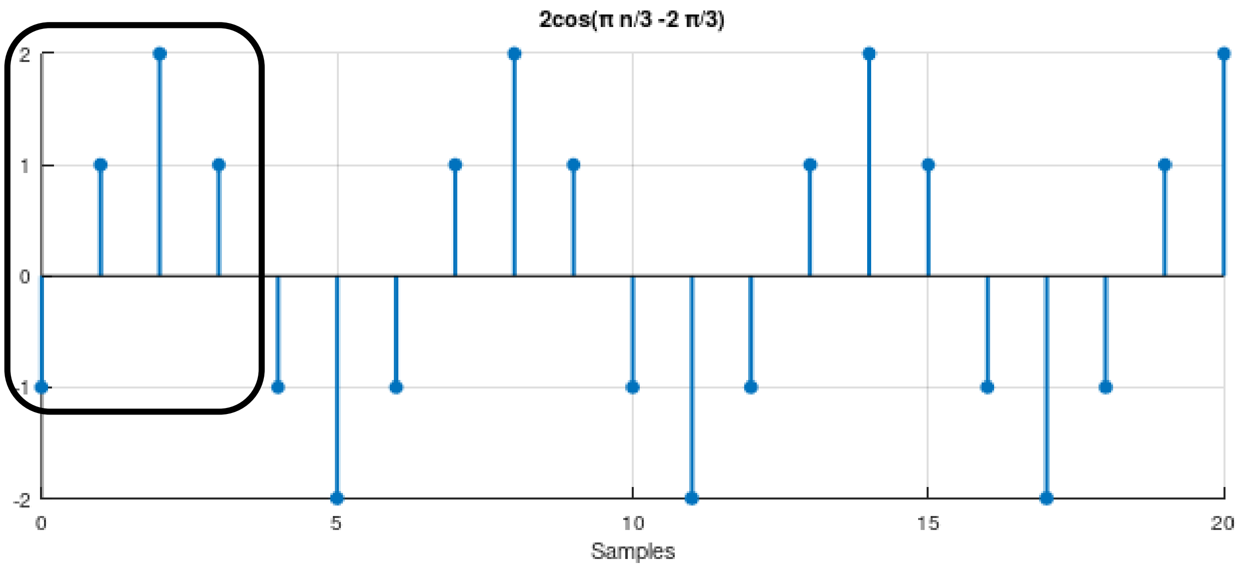
- Άρα η έξοδος **καθυστέρησε 2 δείγματα σε σχέση με την είσοδο**
  - … που ήταν ήδη καθυστερημένη κατά 2 δείγματα σε σχέση με το σημείο αναφοράς (0,0)☺
  - Συνολικά, η έξοδος έχει καθυστερήσει 4 δείγματα σε σχέση με το σημείο αναφοράς

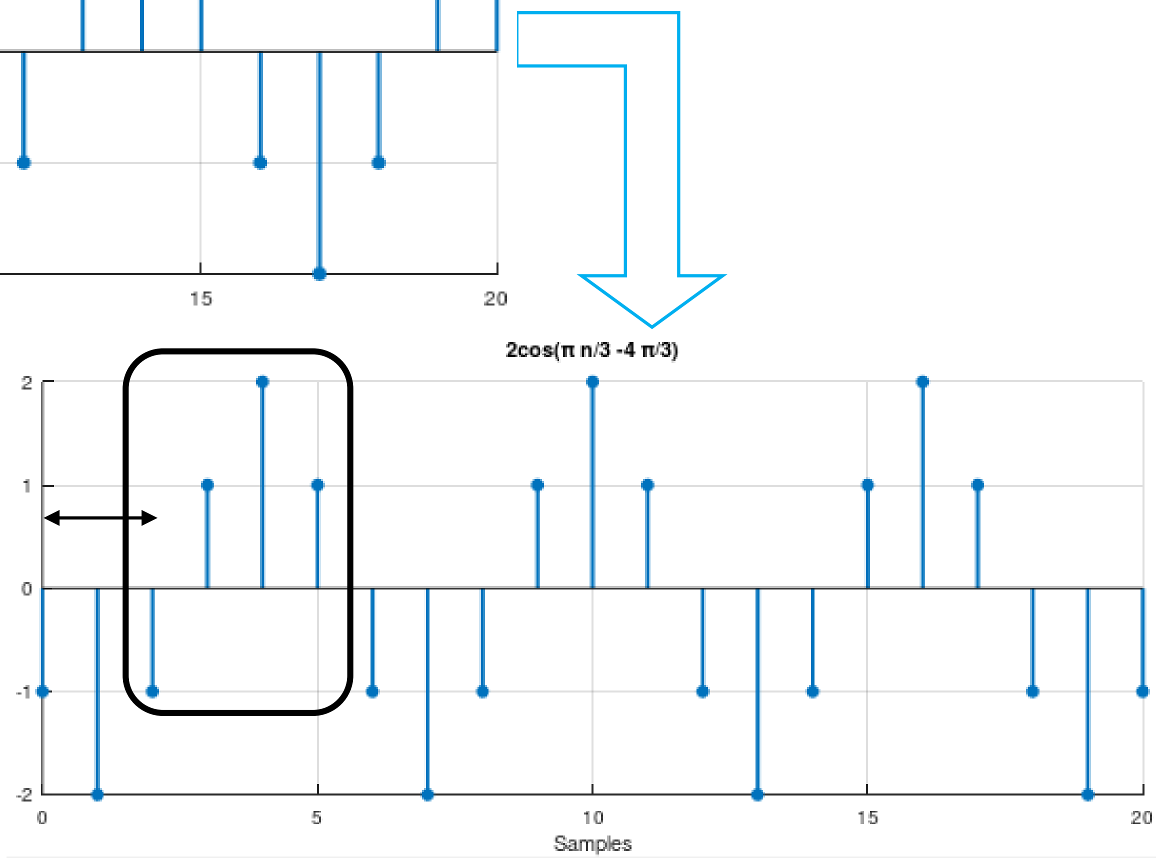
- Επιβεβαίωση:

$$y[n] = 2\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(n - \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} - 2\right)\right) = 2\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-4)\right)$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Η καθυστέρηση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος ισούται με το πλήθος των δειγμάτων που καθυστερεί ένα **<u>άπειρης</u> διάρκειας** ημιτονοειδές σήμα εισόδου όταν περάσει στην έξοδο





- Αγνοήσαμε σκόπιμα την επίδραση της απόκρισης πλάτους
    - …η οποία μπορεί να αλλοιώνει το πλάτος του σήματος εισόδου

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Όμως είναι αυτή η *πραγματική* καθυστέρηση ενός σήματος στην έξοδο ενός συστήματος?
  - Έστω το σήμα

$$\boxed{2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)}$$

$$x[n] = A\,\underbrace{\boxed{\cos(\omega_0 n)}}_{\text{περιβάλλουσα}}\,\underbrace{\boxed{\cos(\omega_c n)}}_{\text{φέρον σήμα}} = \frac{A}{2}\cos(\boldsymbol{\omega_l} n) + \frac{A}{2}\cos(\boldsymbol{\omega_u} n)$$

Ξανά άπειρης διάρκειας!

με χρήση Euler/τριγωνομετρίας και με

$$\omega_l = \omega_c - \omega_0$$

και

$$\omega_u = \omega_c + \omega_0$$

με

$$\omega_c \gg \omega_0$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
- Αν περάσουμε το σήμα από ένα σύστημα

$$\boxed{\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos(a)\cos(b)}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\phi_h\left(e^{j\omega}\right)}$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n]=\frac{A\left|H\left(e^{j\omega_l}\right)\right|}{2}\cos\left(\omega_l n+\phi_h\left(e^{j\omega_l}\right)\right)+\frac{A\left|H\left(e^{j\omega_u}\right)\right|}{2}\cos\left(\omega_u n+\phi_h\left(e^{j\omega_u}\right)\right)$$

- Αν η απόκριση πλάτους είναι περίπου μοναδιαία (γενικότερα, σταθερή) γύρω από τις συχνότητες ω_u, ω_l τότε

$$y[n]=\frac{A}{2}\cos\left(\omega_l n+\phi_h\left(e^{j\omega_l}\right)\right)+\frac{A}{2}\cos\left(\omega_u n+\phi_h\left(e^{j\omega_u}\right)\right)$$

$$=A\cos\left(\omega_0 n+\frac{\phi_h\left(e^{j\omega_u}\right)-\phi_h\left(e^{j\omega_l}\right)}{2}\right)\cos\left(\omega_c n+\frac{\phi_h\left(e^{j\omega_u}\right)+\phi_h\left(e^{j\omega_l}\right)}{2}\right)$$

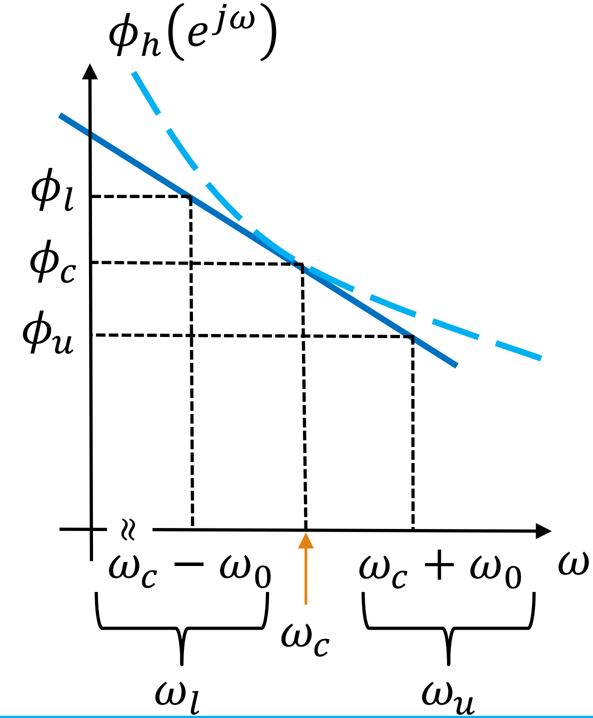
- Επαναφέραμε το άθροισμα σε γινόμενο για να βρούμε πόσο καθυστερεί η περιβάλλουσα και πόσο το φέρον σήμα

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(e^{j\omega_u}) - \phi_h(e^{j\omega_l})}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(e^{j\omega_u}) + \phi_h(e^{j\omega_l})}{2}\right)$$

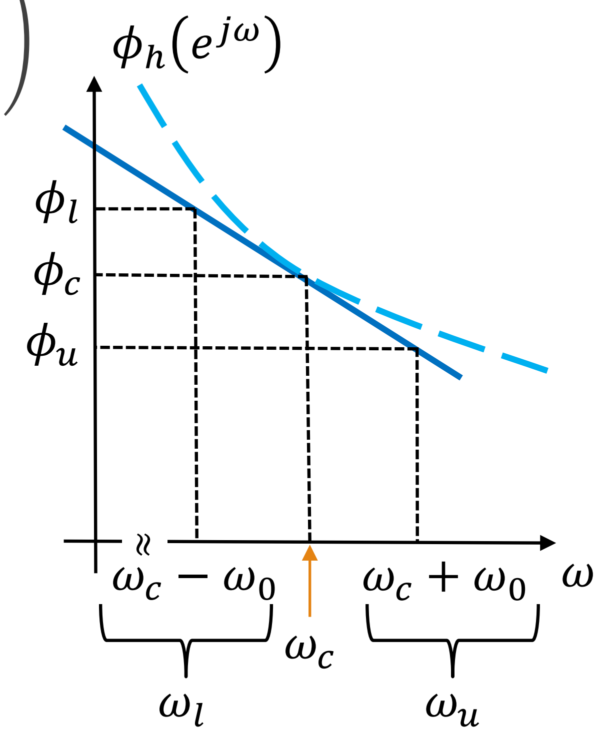
- Αφού υποθέσαμε ότι $\omega_c \gg \omega_0$, τότε $\omega_u \approx \omega_c$ και $\omega_l \approx \omega_c$
- Υποθέτουμε ότι η απόκριση φάσης είναι **περίπου γραμμική** γύρω από το ω_c

- Αφού όλες οι τιμές της φάσης στην παραπάνω σχέση εξαρτώνται από την απόκριση φάσης του συστήματος, ας συμβολίσουμε *για ευκολία*:
  - $\phi_l = \phi_h(e^{j\omega_l}) = \phi_h(e^{j(\omega_c-\omega_0)})$
  - $\phi_u = \phi_h(e^{j\omega_u}) = \phi_h(e^{j(\omega_c+\omega_0)})$
  - $\phi_c = \phi_h(e^{j\omega_c})$



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0\left(n+\frac{\phi_u-\phi_l}{2\omega_0}\right)\right)\cos\left(\omega_c\left(n+\frac{\phi_u+\phi_l}{2\omega_c}\right)\right)$$



- Με χρήση του παραπάνω, η καθυστέρηση φάσης του δεύτερου όρου του γινομένου θα είναι

$$-\frac{\phi_u+\phi_l}{2\omega_c} \approx -\frac{\phi_c}{\omega_c} = -\frac{\phi_h(e^{j\omega_c})}{\omega_c}$$

- Για τον πρώτο όρο, η καθυστέρηση φάσης θα είναι

$$-\frac{\phi_u-\phi_l}{2\omega_0} = -\frac{\phi_u-\phi_l}{\omega_u-\omega_l} \approx -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega_c})$$

που ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας (group delay)** $\tau_g(e^{j\omega_c})$ στη συχνότητα ω_c

- Η **καθυστέρηση ομάδας** ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega})}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

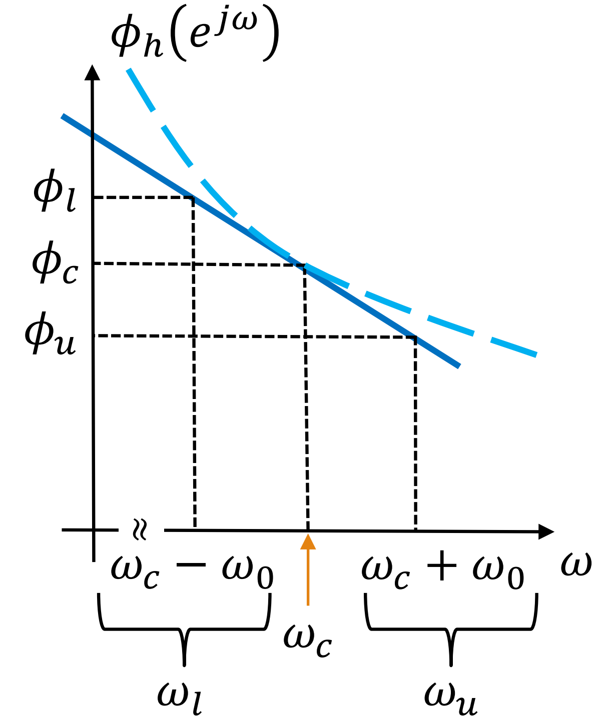
- Έτσι το σήμα εξόδου γράφεται ως

$$y[n] \approx A \underbrace{\boxed{\cos(\omega_0(n - \boldsymbol{\tau_g}(\boldsymbol{e^{j\omega_c}})))}}_{\text{περιβάλλουσα}} \underbrace{\boxed{\cos(\omega_c(n - \boldsymbol{\tau_p}(\boldsymbol{e^{j\omega_c}})))}}_{\text{φέρον σήμα}}$$

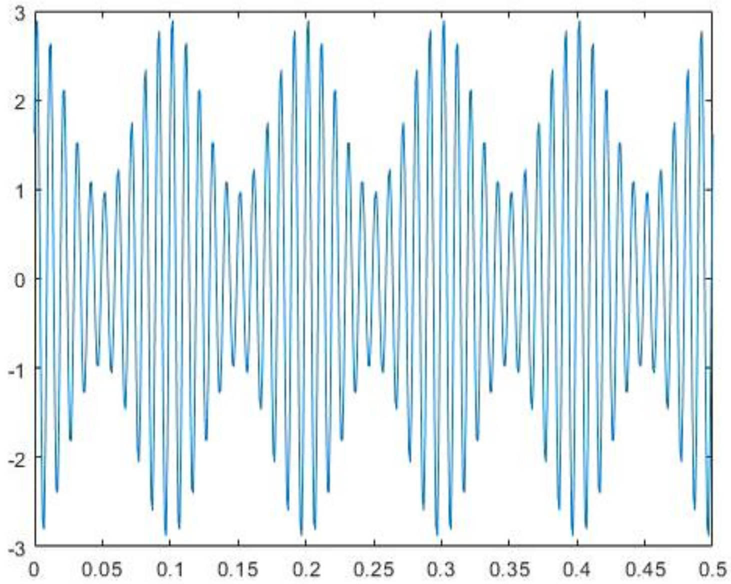
- Παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα καθυστερεί διαφορετικό χρόνο στην έξοδο από το φέρον σήμα!

- Παρατηρήστε ότι οι δυο καθυστερήσεις εξαρτώνται από την **κεντρική συχνότητα** ω_c της **ομάδας** των τριών συχνοτήτων!

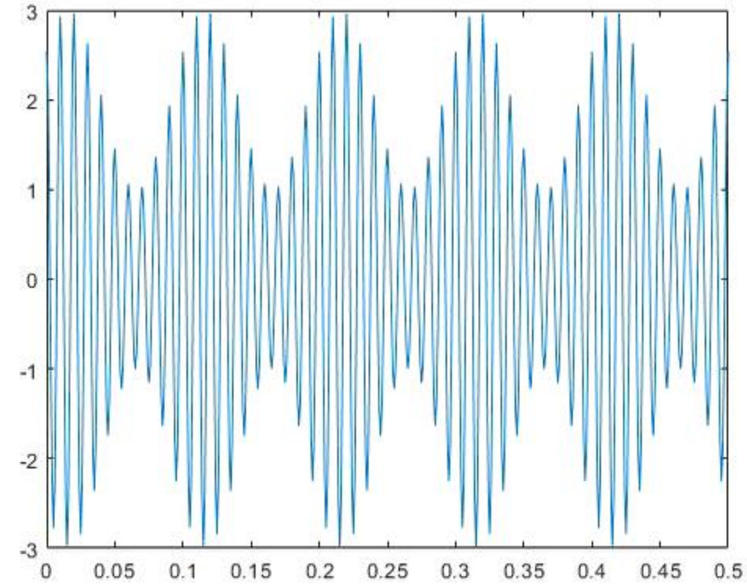
- Κάναμε **δυο** υποθέσεις:
  1. Το φάσμα πλάτους είναι (σχεδόν) σταθερό γύρω από τη συχνότητα ω_c
  2. Η απόκριση φάσης είναι (σχεδόν) γραμμική γύρω από τη συχνότητα ω_c



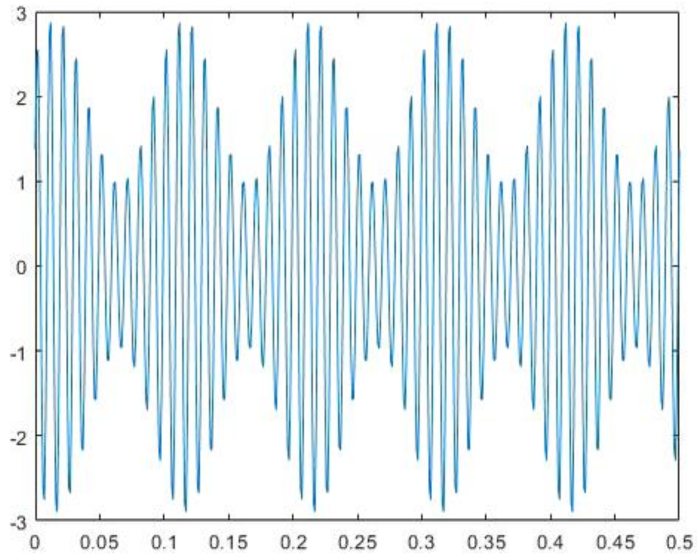
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



Phase Delay

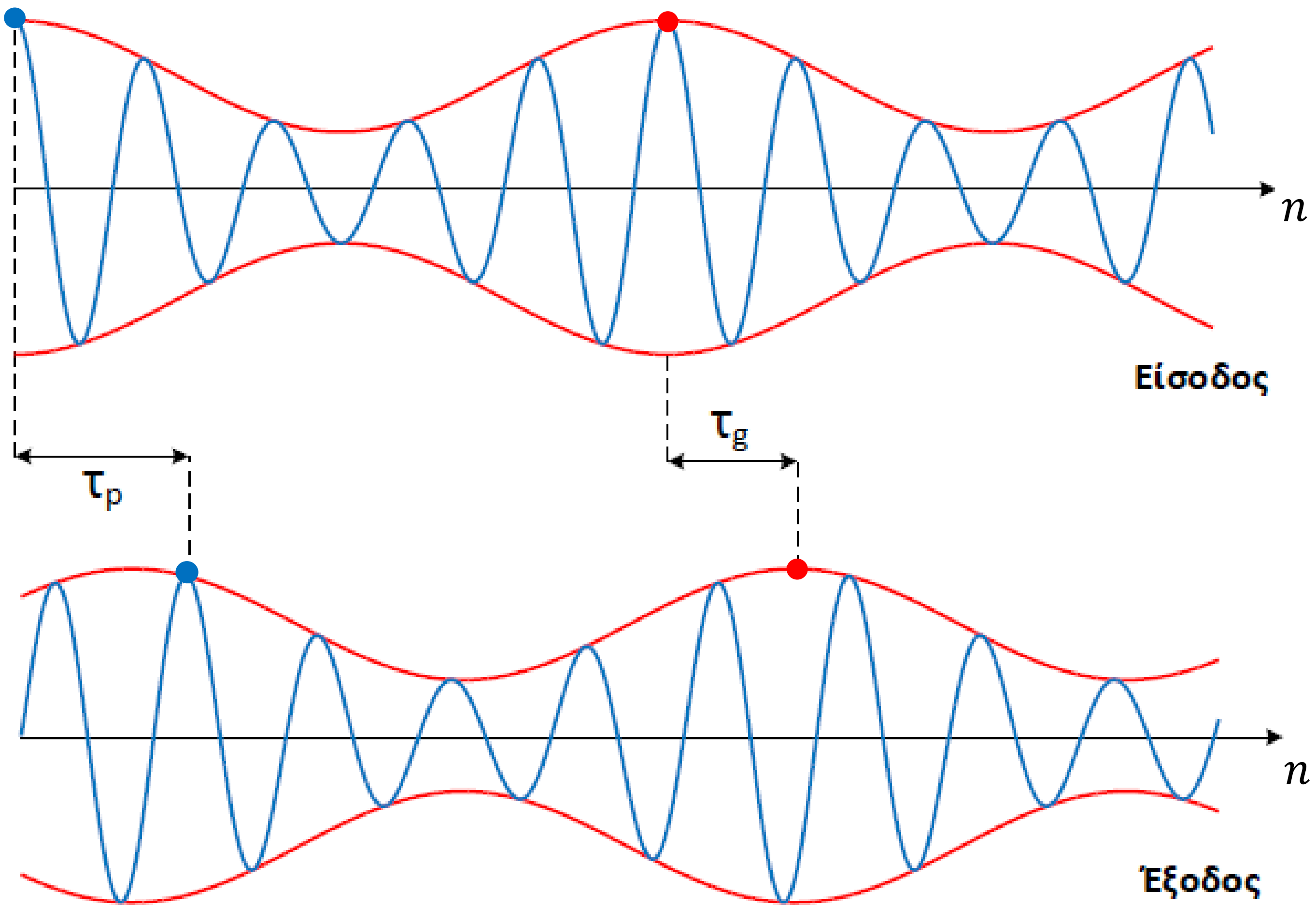


Group Delay



Phase & Group Delay

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



- Ποια από τις δυο μετρικές εκφράζει την καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του συστήματος;

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσετε ότι το σήμα εισόδου αποτελούνταν από ένα group (ομάδα) δυο συχνοτήτων, **όλες πολύ κοντά και γύρω** από μια:

- Την $\omega = \omega_c$ (δηλ. τη φέρουσα συχνότητα)

- Η ομάδα αποτελούνταν από τις $\omega_c \pm \omega_0$

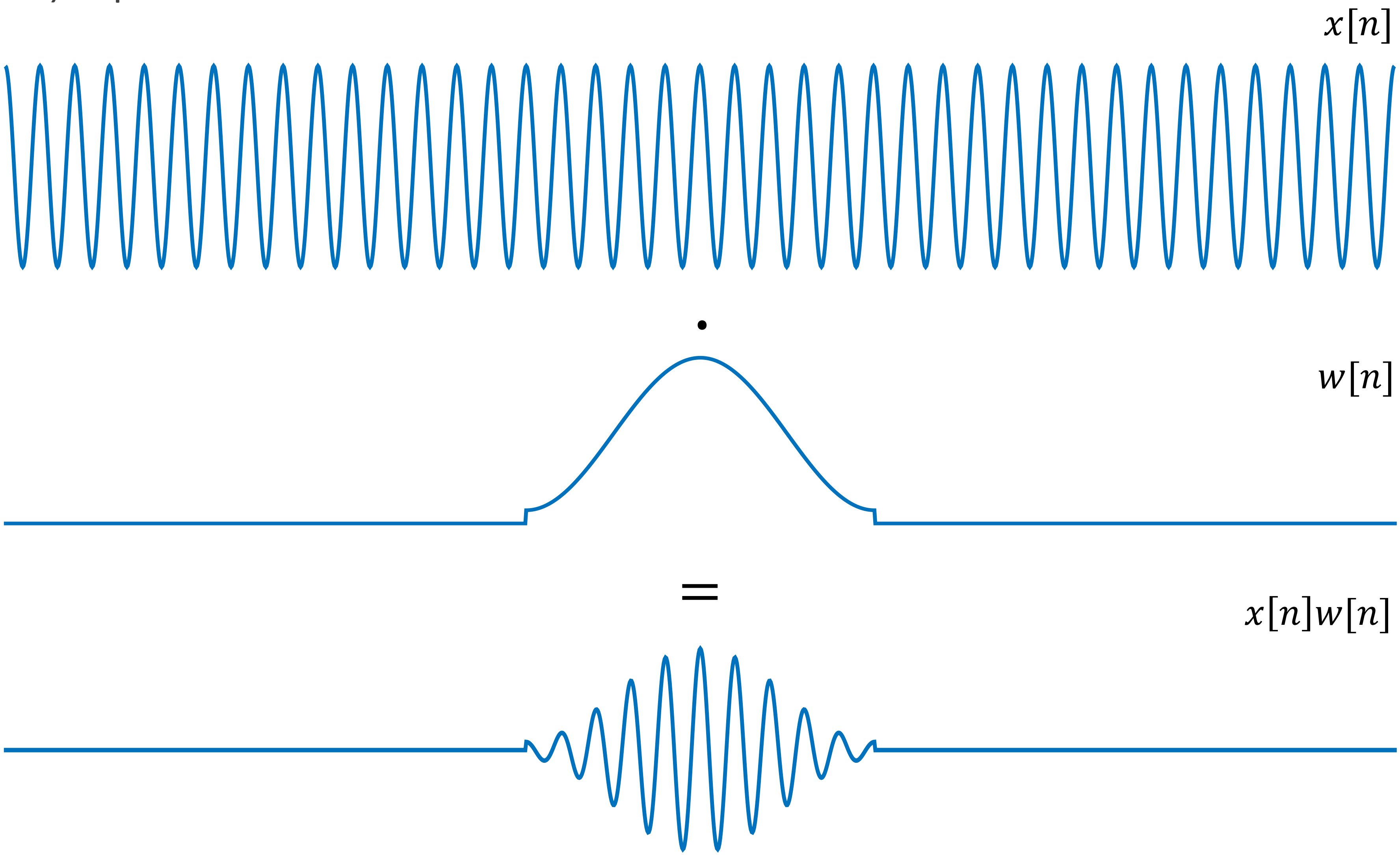
- Η καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του ΓΧΑ συστήματος καθορίστηκε από την καθυστέρηση ομάδας γύρω από τη συχνότητα ω_c, δηλ. από την καθυστέρηση που έλαβαν οι δυο αυτές συχνότητες, υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε

- Όλα τα παραπάνω είχαν μια **ισχυρή υπόθεση**: $-\infty < \boldsymbol{n} < +\infty$

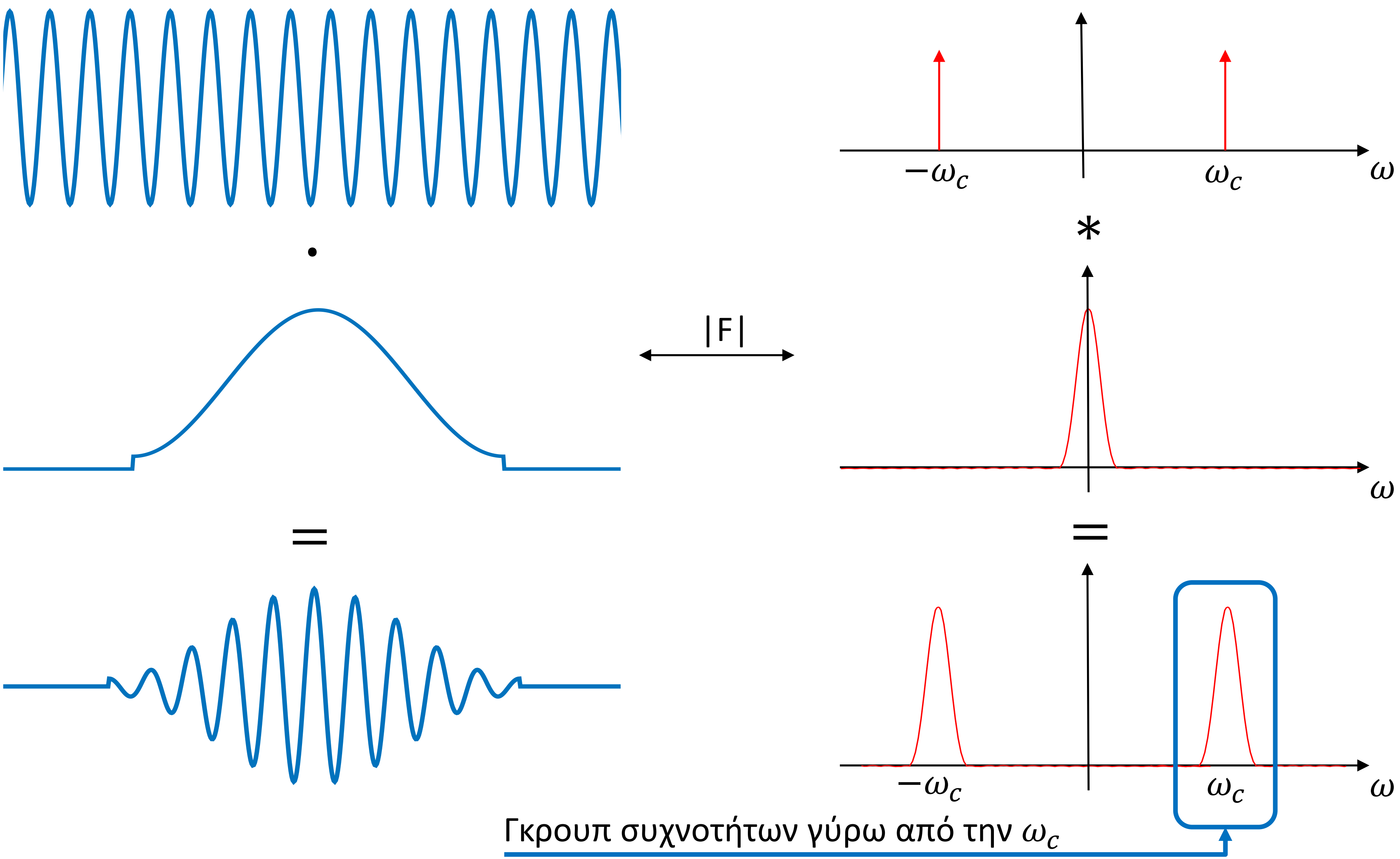
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
- Όλα τα παραπάνω είχαν μια **ισχυρή υπόθεση**: $-\infty < \boldsymbol{n} < +\infty$
- Στην πραγματικότητα δεν έχουμε τέτοιες διάρκειες σημάτων
  - Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα **πεπερασμένο τμήμα από ένα άπειρης διάρκειας σήμα**
- **Ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα άπειρης διάρκειας σήμα <u>πολλαπλασιασμένο</u> με ένα "παράθυρο"**
- Ξέρουμε – και θα δούμε ξανά ξεκάθαρα – ότι οι συχνότητες ενός τέτοιου σήματος θα καθορίζονται από το μετασχ. Fourier του παραθύρου
  - Αυτό είναι το **group συχνοτήτων** μας! ☺
- Ας θεωρήσουμε ένα παράθυρο Hanning κι ας δούμε τι συμβαίνει…

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

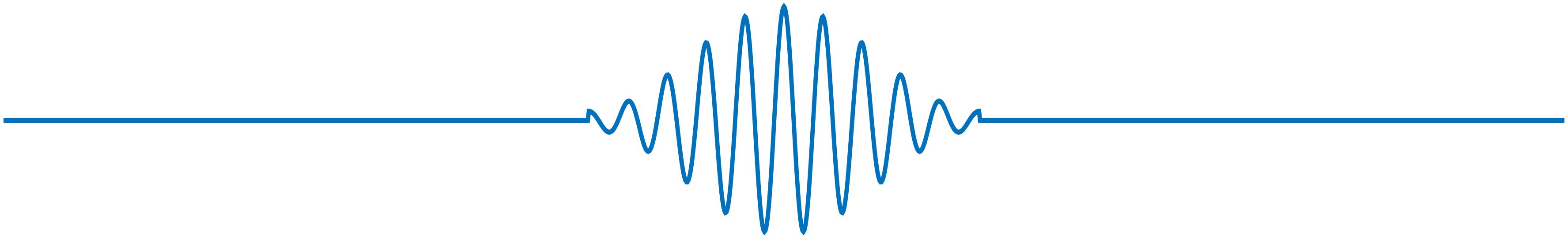
- Το ημίτονο εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, οπότε θα προκύπτει όπως παρακάτω:



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



- Παρατηρήσατε ότι ο παραπάνω ημιτονοειδής παλμός δεν έχει συχνοτικό περιεχόμενο μόνο στη συχνότητα ω_c αλλά σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από αυτή
- Γιατί;

$$w[n] \cdot A\cos(\omega_c n) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} W\left(e^{j\omega}\right) * \left(A\pi\delta(\omega - \omega_c) + A\pi\delta(\omega + \omega_c)\right)$$

$$\frac{A}{2} W\left(e^{j(\omega-\omega_c)}\right) + \frac{A}{2} W\left(e^{j(\omega+\omega_c)}\right)$$

- Άρα το εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει ο ημιτονοειδής παλμός εξαρτάται από το εύρος του μετασχηματισμού Fourier $W\left(e^{j\omega}\right)$ του σήματος της περιβάλλουσας $w[n]$!
  - Αν το εύρος συχνοτήτων του μετασχ. της είναι μικρό, τότε το σήμα ονομάζεται **στενής ζώνης συχνοτήτων**!
    - Για να ισχύει αυτό, η περιβάλλουσα $w[n]$ πρέπει να έχει «μεγάλη» διάρκεια…
      - Γιατί? Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης! $\boldsymbol{x[kn]} \leftrightarrow \boldsymbol{X\left(e^{j\frac{\omega}{k}}\right), k \in Q}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
- Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης – **<u>ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ</u>**
- Αν

$$y[n] = x[kn], k \in \mathbb{Q} \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega/k})$$

Θα είναι

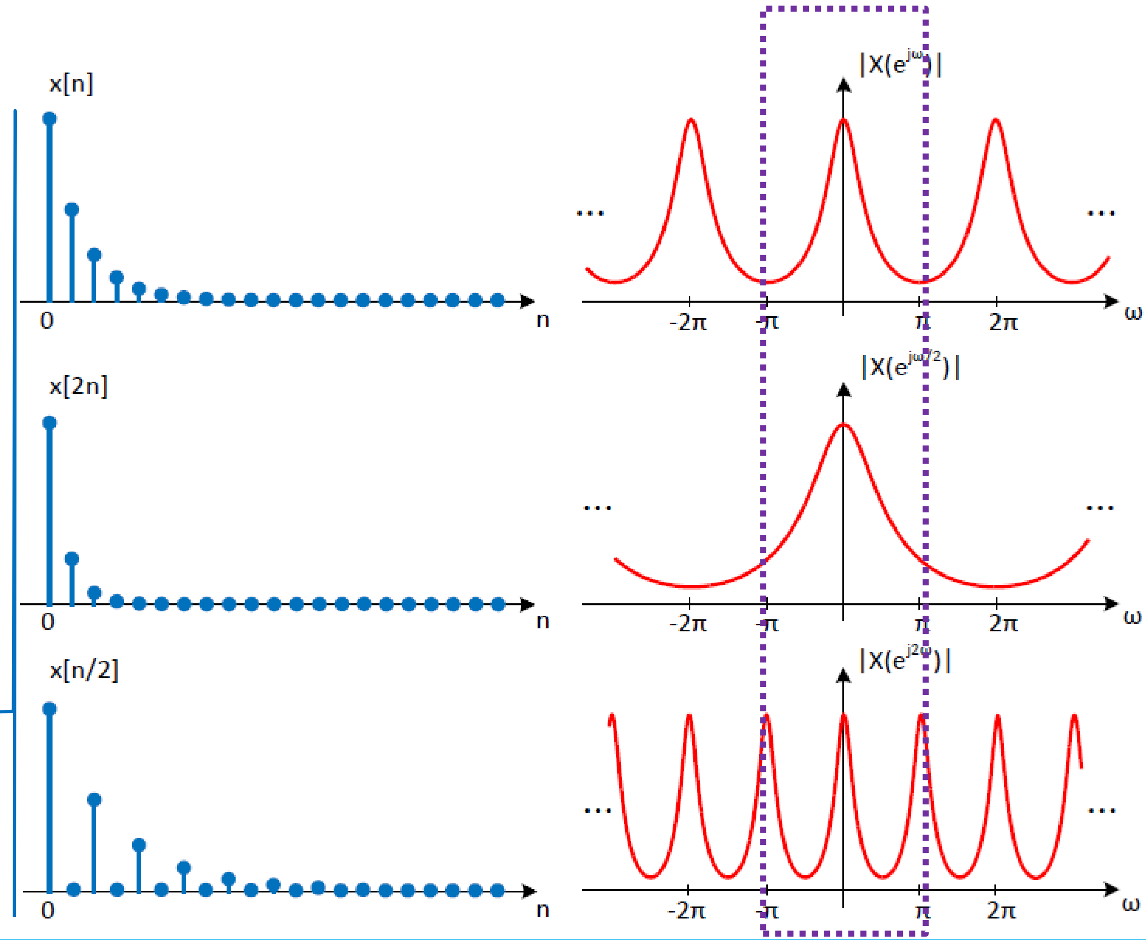
$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[kn]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j\frac{\omega}{k}m}$$

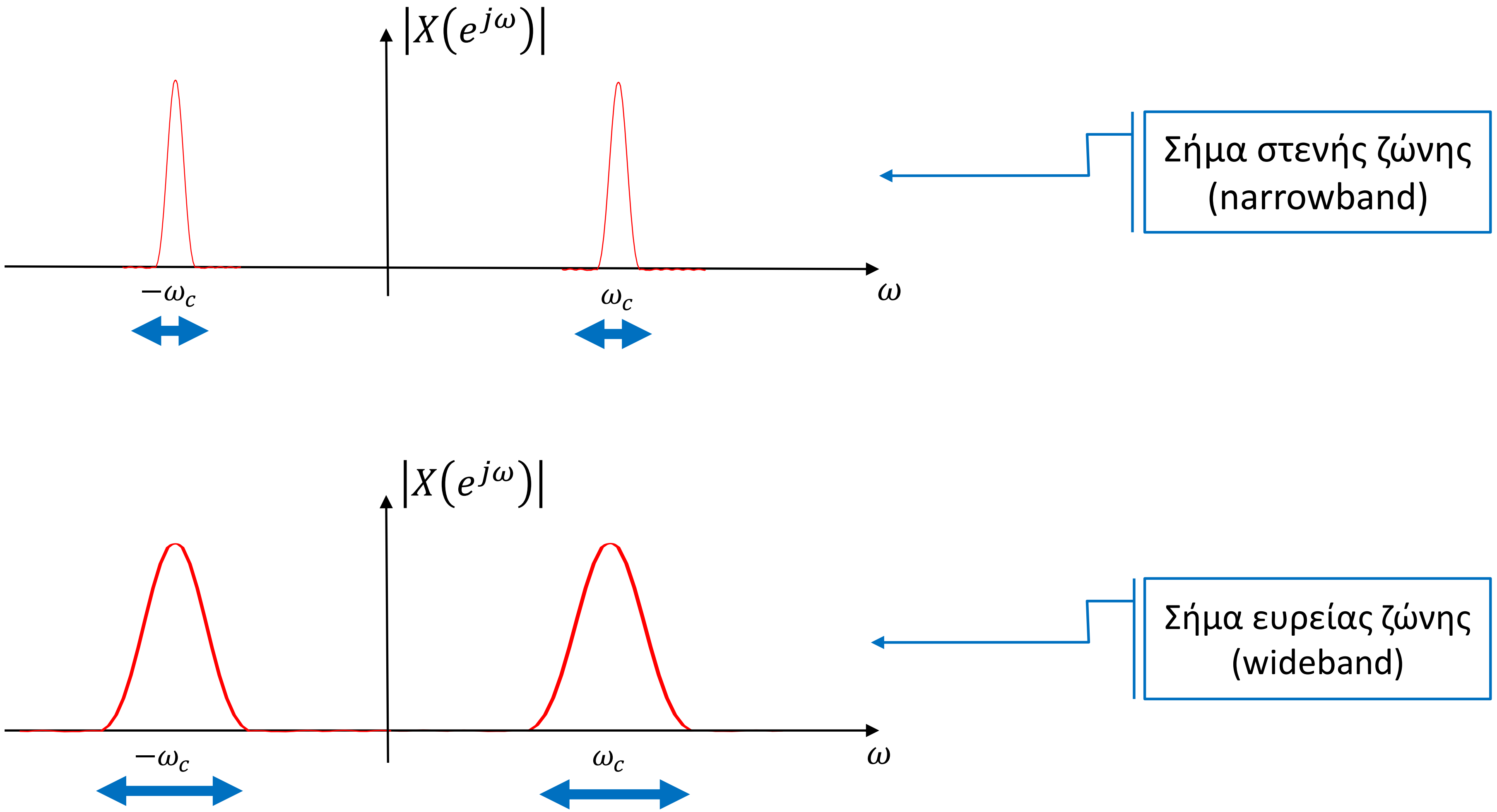
$$= X(e^{j\omega/k})$$

θέτοντας $m = kn \Rightarrow n = \frac{m}{k}$

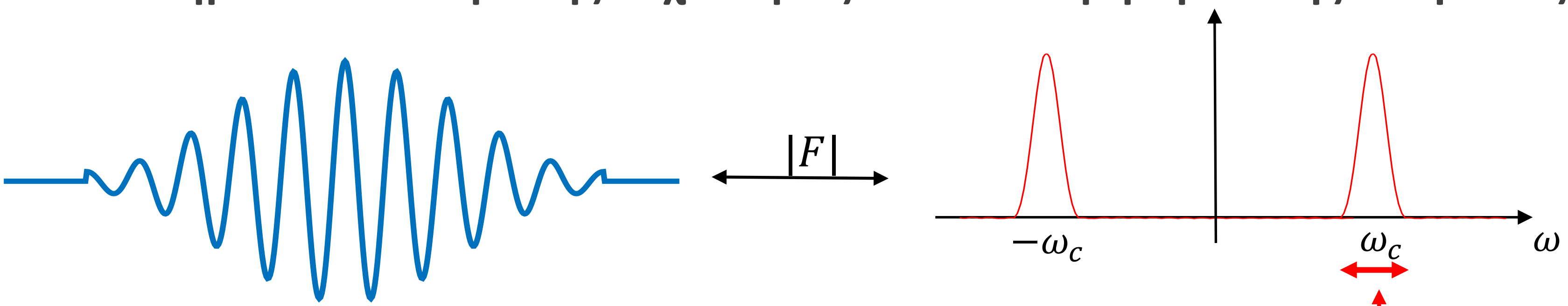
- Μικρή διάρκεια στο χρόνο → wideband signal
- Μεγάλη διάρκεια στο χρόνο → narrowband signal



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



- Παρατηρήστε ότι το ημίτονο είναι **διαμορφωμένο** (πολλαπλασιασμένο) με μια Gaussian-like περιβάλλουσα $w[n]$

- Μας ενδιαφέρει πόσο θα καθυστερήσει στην έξοδο το «πακέτο συχνοτήτων» που αποτελεί τον ημιτονοειδή παλμό!

- Αν ένα σήμα εισόδου αποτελείται από ένα άθροισμα από **διαμορφωμένα** ημίτονα διαφορετικής συχνότητας το καθένα, και αυτά είναι επιπλέον **στενής ζώνης**, δηλ. ο μετασχ. Fourier τους έχει σημαντικές τιμές μόνο γύρω από ένα **μικρό εύρος συχνοτήτων**

$$[-\omega_c - B, -\omega_c + B], [\omega_c - B, \omega_c + B]$$

με B μικρό και με ω_c τη συχνότητα του ημιτόνου, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθυστέρηση ομάδας για μια πολύ καλή προσέγγιση της καθυστέρησης κάθε «πακέτου» της εξόδου!

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
- Για να δούμε ένα τέτοιο άθροισμα διαμορφωμένων σημάτων εισόδου
- Έστω ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k[n] \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

- Έστω ότι η περιβάλλουσα $w_k[n]$ κάθε συχνότητας ω_k είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης στη συχνότητα, δηλ.

$$w_k[n] \neq 0, \qquad N_1 \leq n \leq N_2$$

$$W_k(e^{j\omega}) \approx 0, \qquad |\omega| > B_k, \qquad B_k \ll \omega_k$$

- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι τότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2} e^{j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega-\omega_k)}\right) + \frac{1}{2} e^{-j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega+\omega_k)}\right) \right)$$

- Πράγματι έχουμε ένα **άθροισμα σημάτων με φάσματα στενής ζώνης**!

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Υπό τις προϋποθέσεις που είπαμε νωρίτερα, η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος μπορεί να γραφεί ως

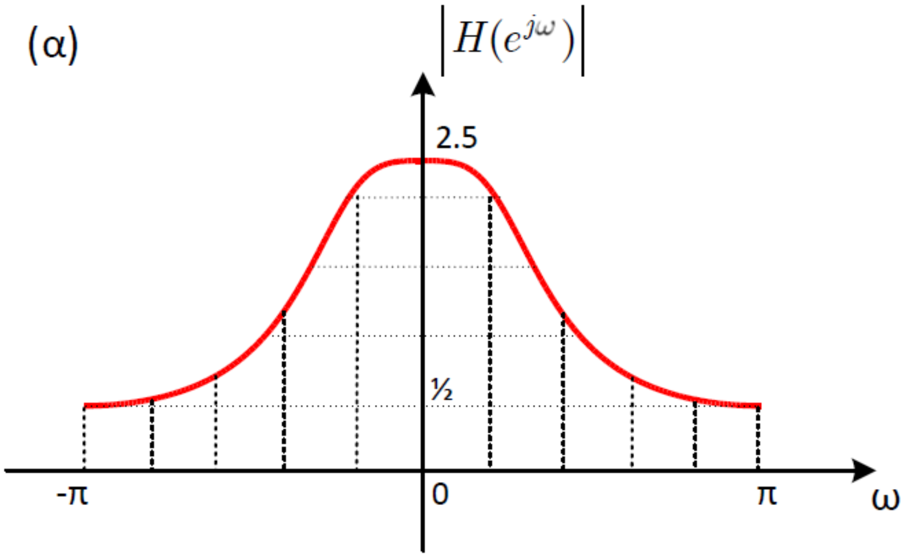
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k\left[n - \boldsymbol{\tau_g}\left(\boldsymbol{e^{j\omega_k}}\right)\right] \cos\left(\omega_k\left(n - \boldsymbol{\tau_p}\left(\boldsymbol{e^{j\omega_k}}\right)\right) + \theta_k\right)$$

- Ξεκάθαρα βλέπετε ότι κάθε διαμορφωμένο ημίτονο συχνότητας ω_k έχει καθυστερήσει κατά $\tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)$

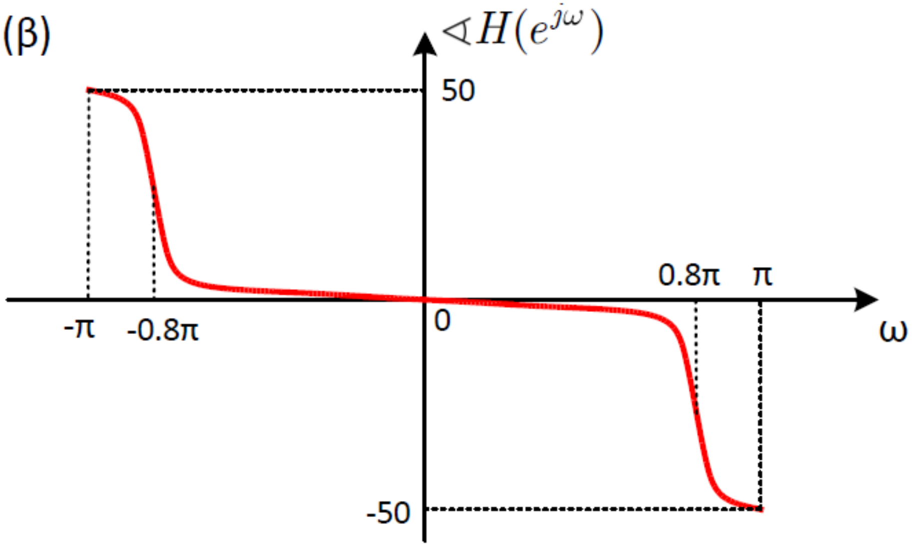
- Η ερμηνεία του group delay ως η καθυστέρηση ενός ημιτονοειδούς παλμού στην έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος είναι έγκυρη μόνον αν:
  - ❑ Η απόκριση πλάτους γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
  - ❑ Το φάσμα πλάτους της εισόδου πρέπει να είναι αρκετά narrowband (“στενής ζώνης”)
  - ❑ Η καθυστέρηση ομάδας γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
    - ❑ Δηλ. η απόκριση φάσης πρέπει να είναι σχεδόν γραμμική γύρω από αυτές

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο σχήμα.

(α)



(β)



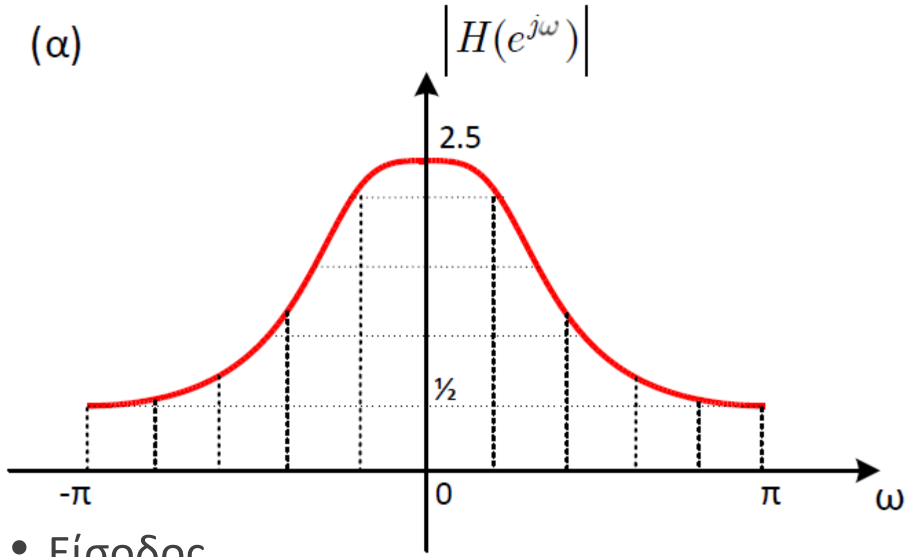
- Είσοδος

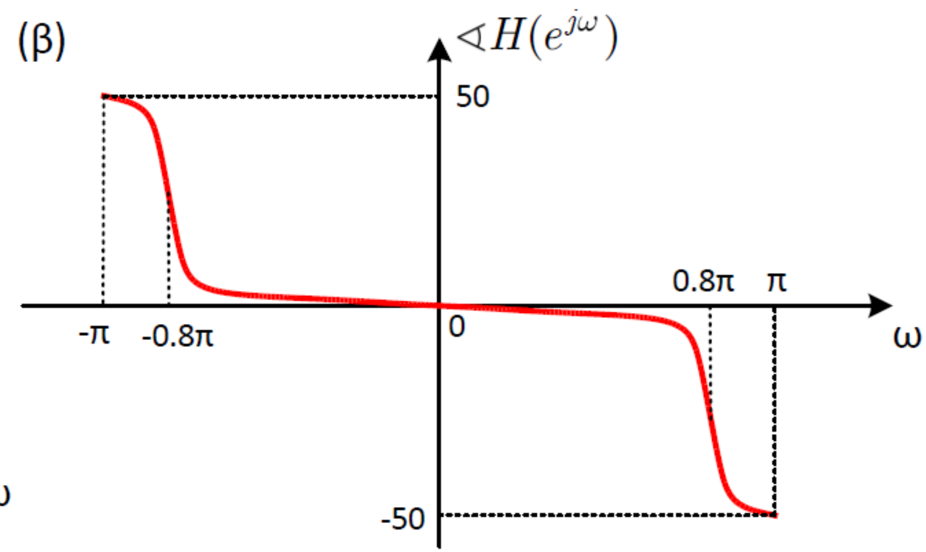
$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

$$= w[n-M]\sin(0.2\pi n) + w[n-M]\sin(0.8\pi n) + w[n-7M]\sin(0.4\pi n)$$

με $M = 50$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο σχήμα.

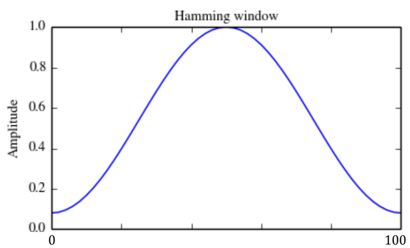




- Είσοδος

$$x[n] = w[n-50]\sin(0.2\pi n) + w[n-50]\sin(0.8\pi n) + w[n-350]\sin(0.4\pi n)$$

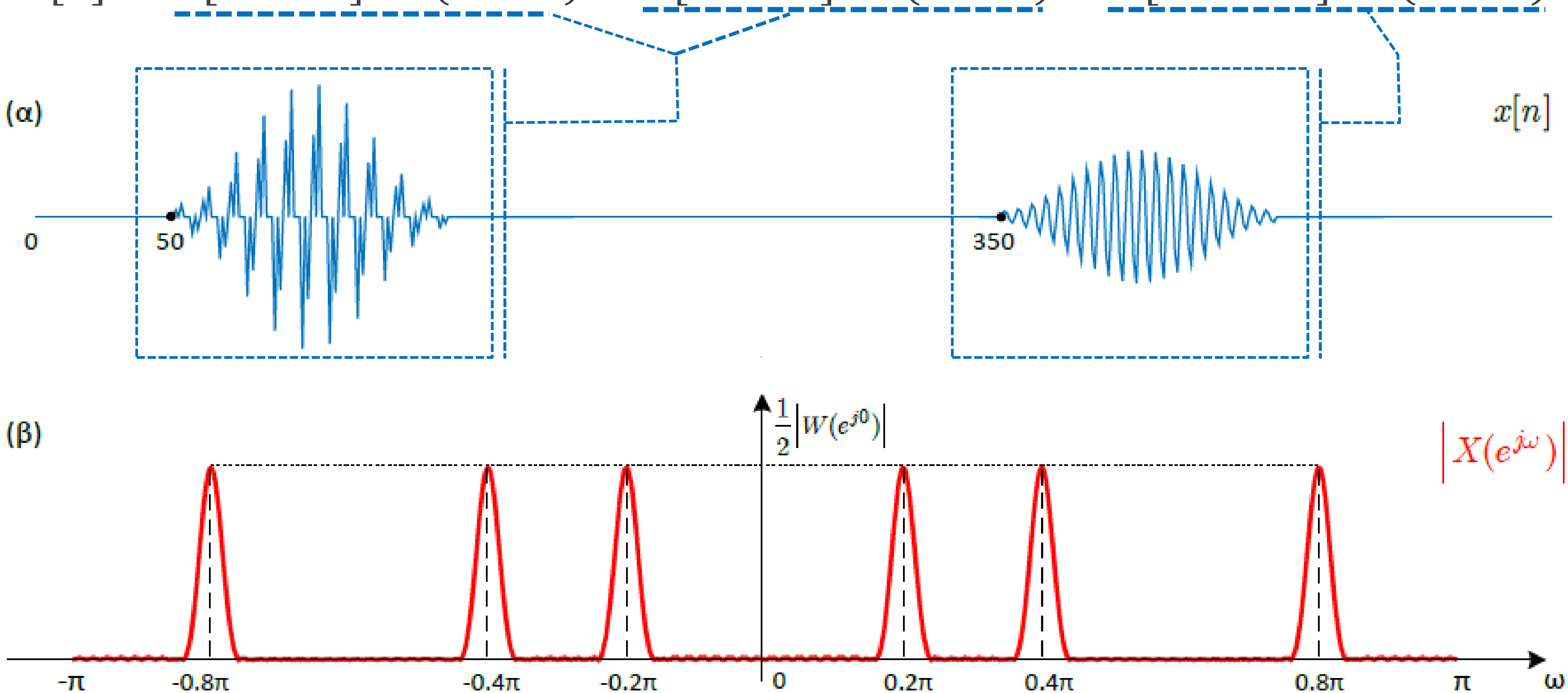
$$w[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), 0 \leq n \leq N = 100$$



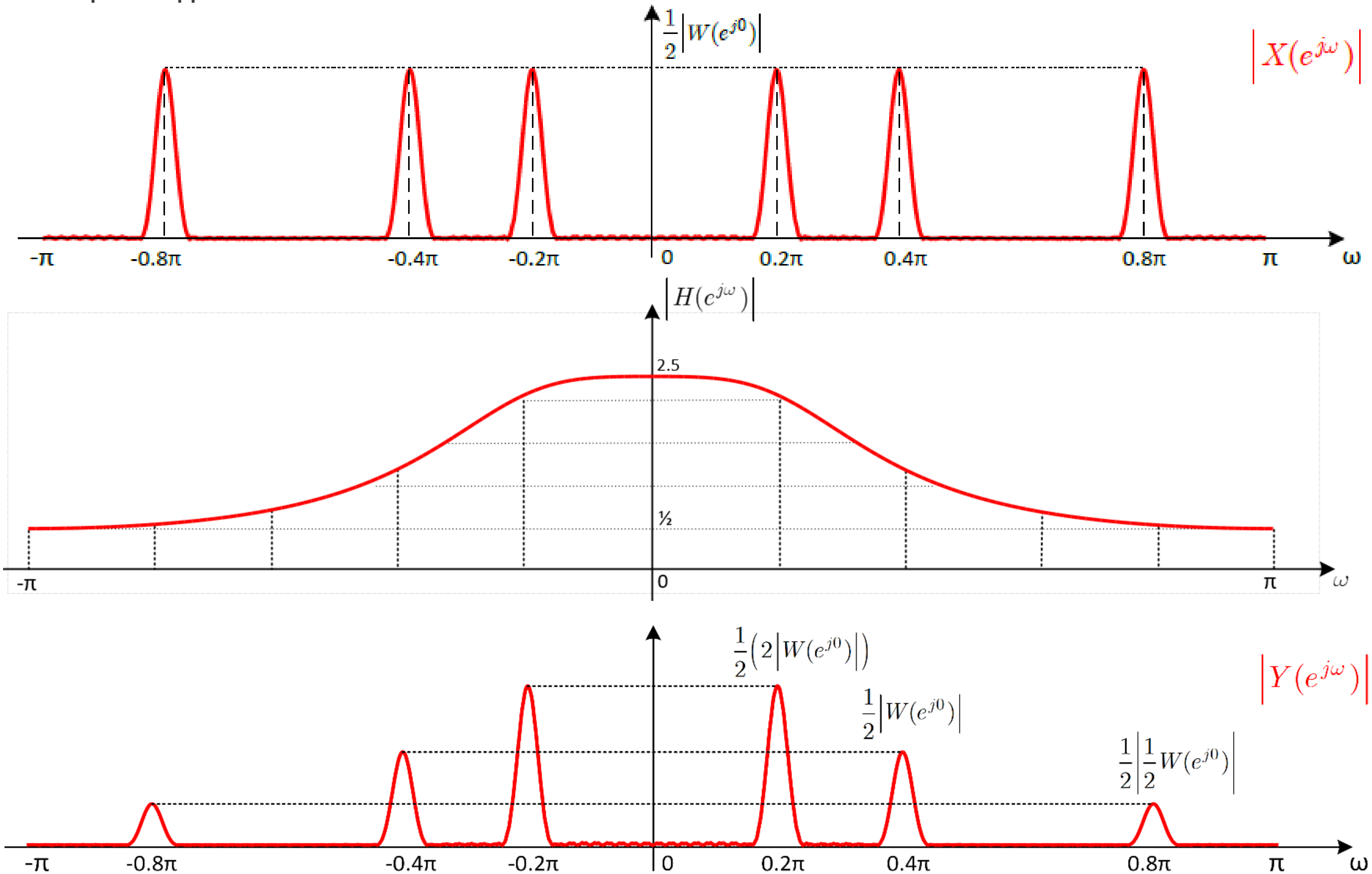
- Το σημαντικό εύρος συχνοτήτων για αυτό το $w[n]$ είναι $\sim \frac{8\pi}{100} \frac{rad}{sample}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:

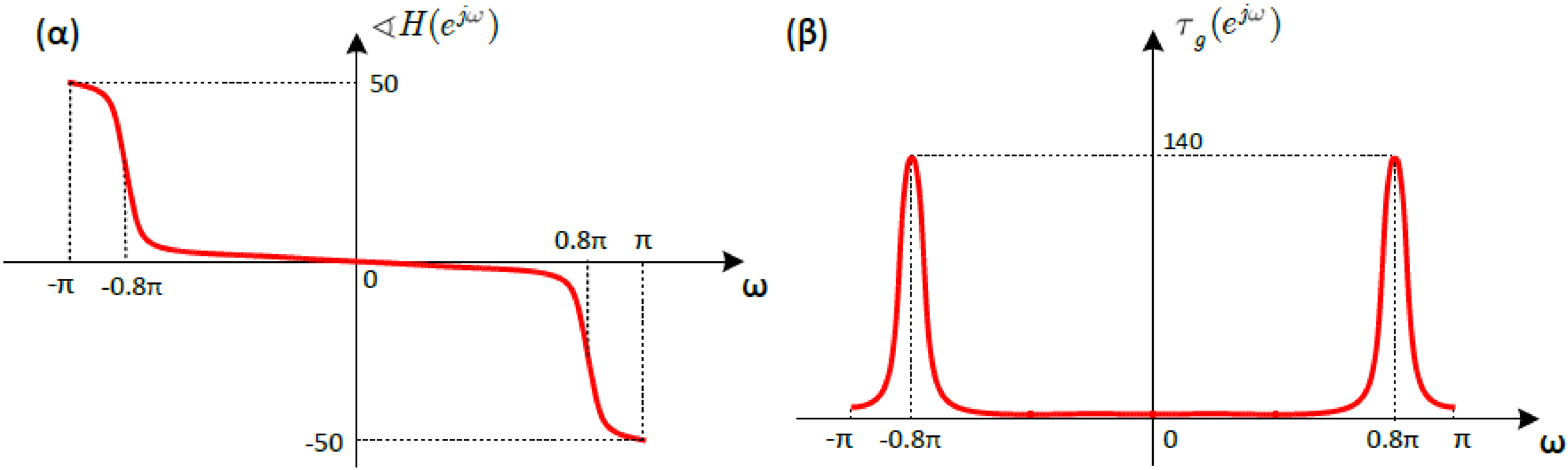
$$x[n] = w[n-50]\sin(0.2\pi n) + w[n-50]\sin(0.8\pi n) + w[n-350]\sin(0.4\pi n)$$



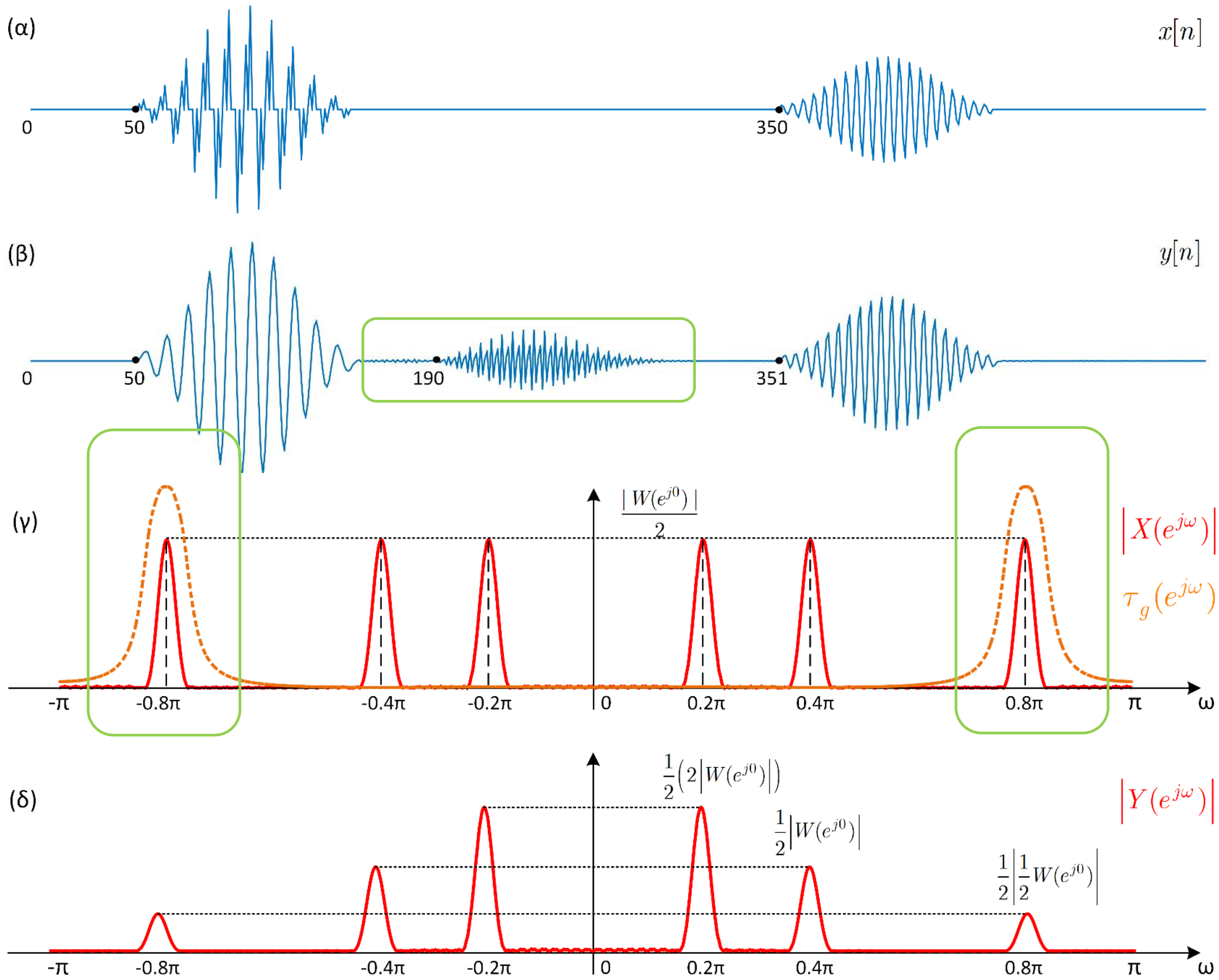
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:

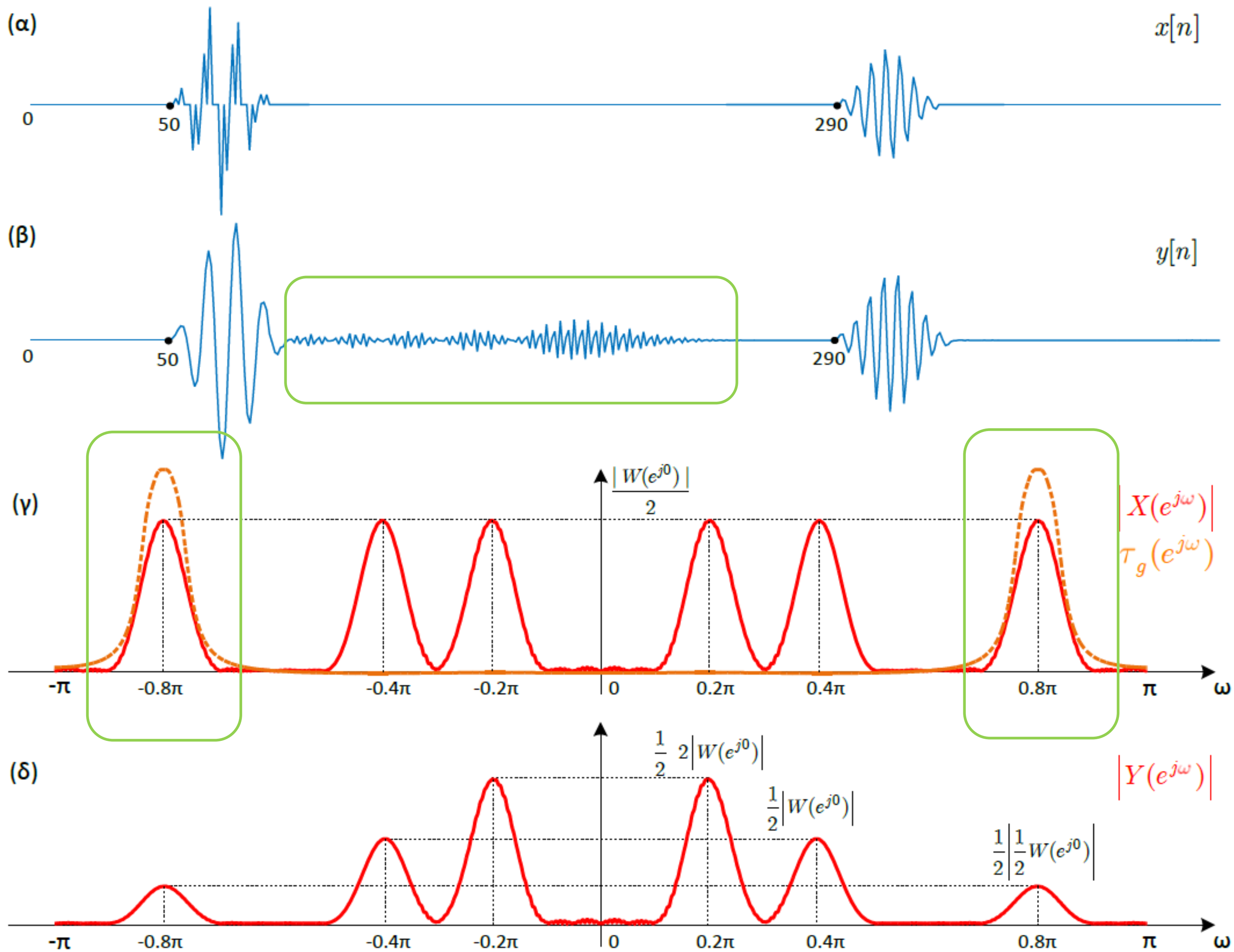


- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:

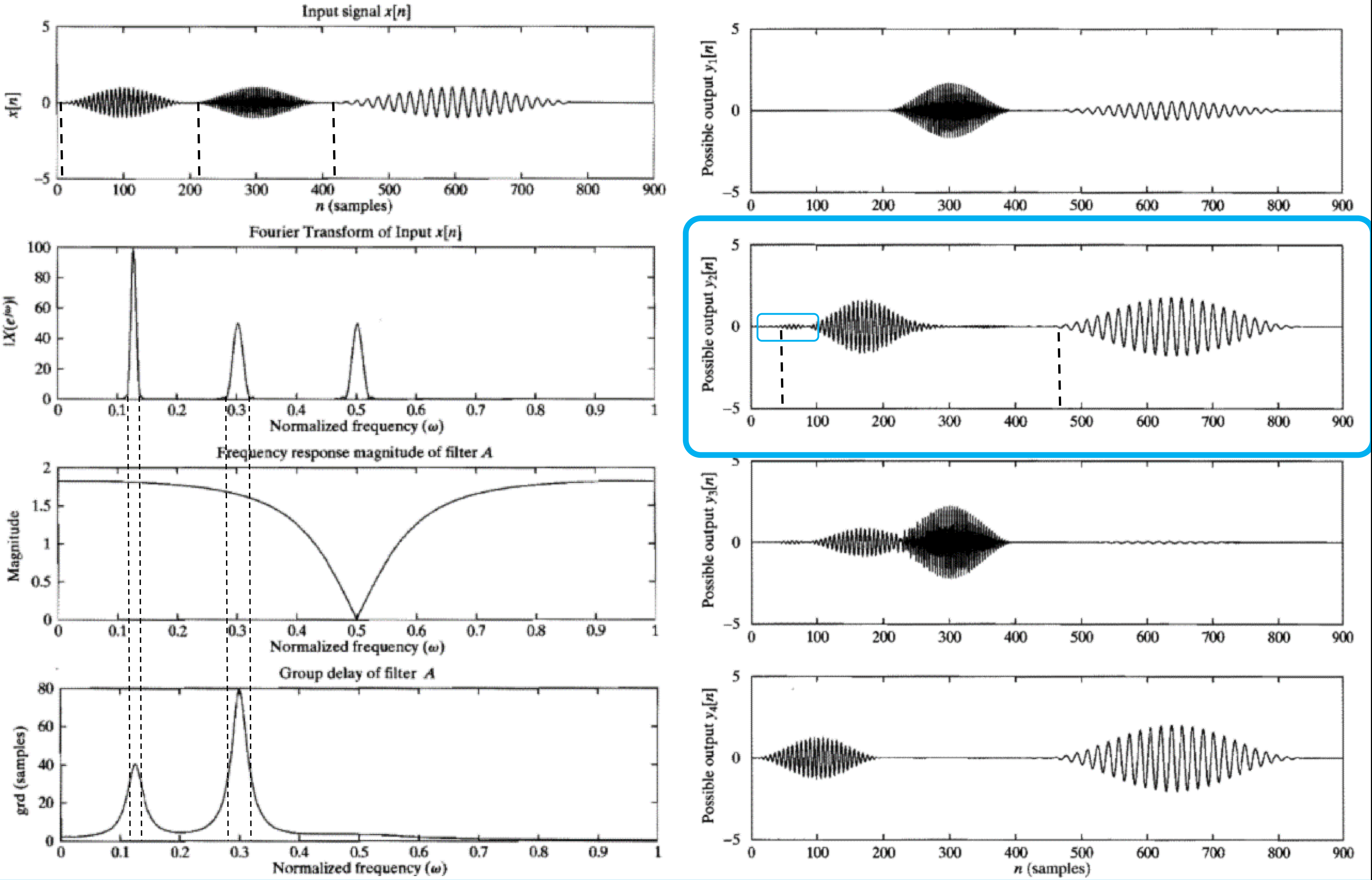


- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:

Είσοδος ευρείας ζώνης (wideband)



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ