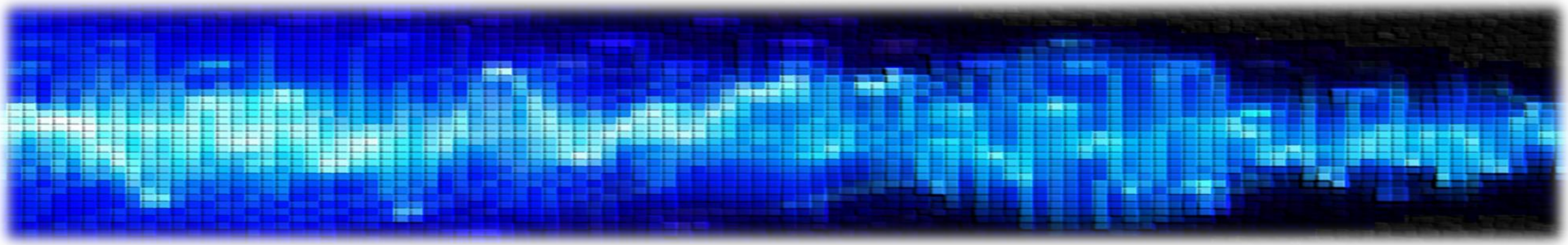
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η



- Συστήματα στο χώρο του Fourier

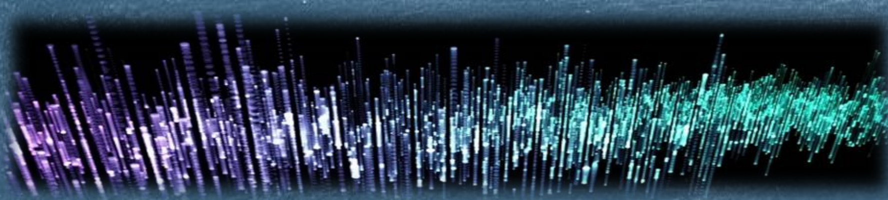
Τι περιέχει το HY370?

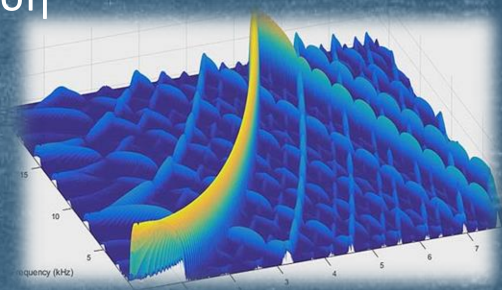
1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση





- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

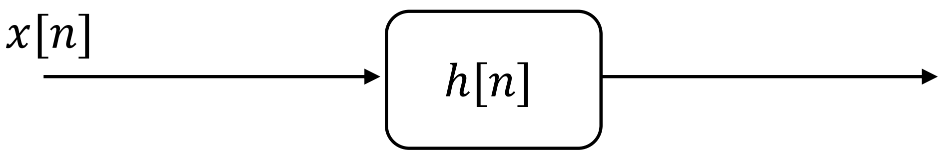
  - Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του DTFT είναι:

$$
\begin{tikzcd}
x[n] \arrow[r, "*"] \arrow[d, leftrightarrow, "F"'] & y[n] \arrow[r, "="] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] & c[n] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] \\
X(e^{j\omega}) \arrow[r, "\bullet"] & Y(e^{j\omega}) \arrow[r, "="] & C(e^{j\omega})
\end{tikzcd}
$$

  - Αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



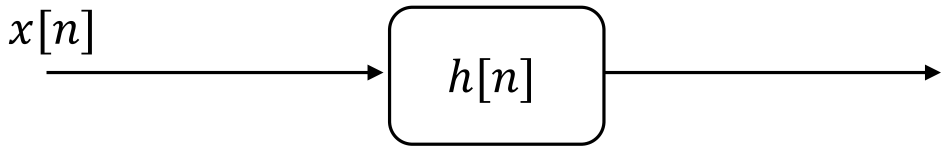
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

- Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\Updownarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$\left|Y(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = \left|X(e^{j\omega})\right|\left|H(e^{j\omega})\right| e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

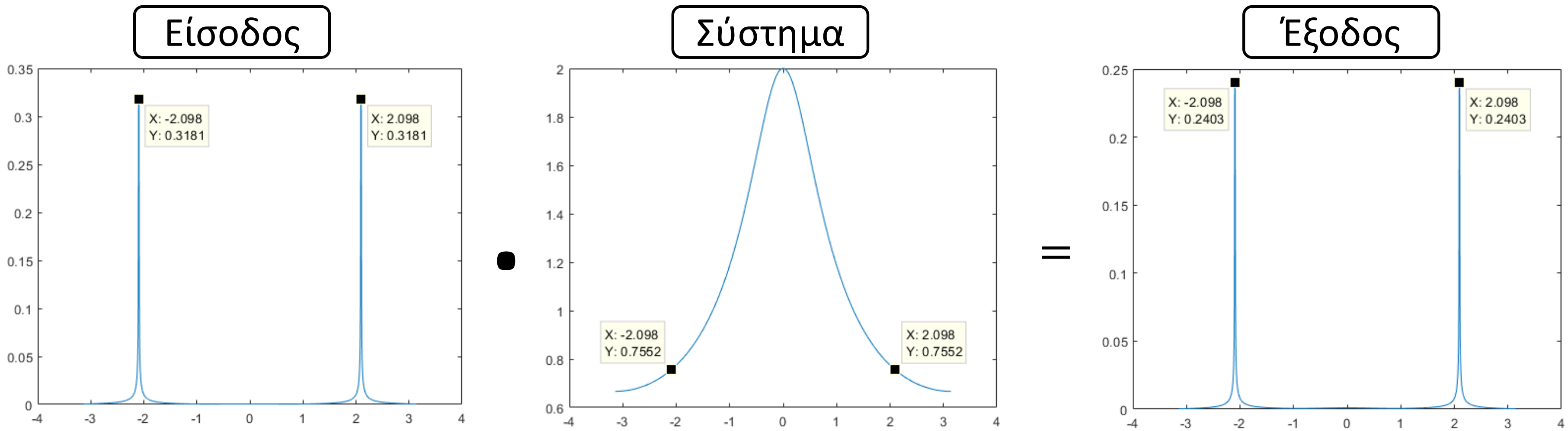
- Οπότε

$$\left|Y(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{j\omega})\right|\left|H(e^{j\omega})\right|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

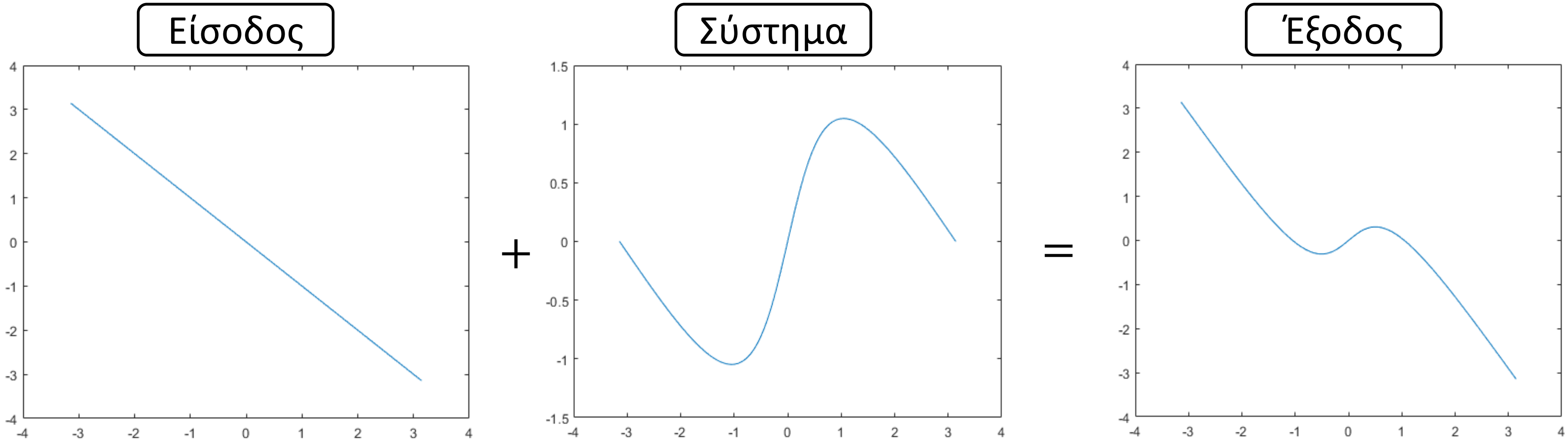
- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $\left|H(e^{j\omega})\right|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος



    - Κατά φάση



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**

  - Η σχέση

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

  - Πώς? Λύνοντας ως προς $H(e^{j\omega})$, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

  - Ας δούμε ένα παράδειγμα…

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:

  ○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$
  Βρείτε την κρουστική απόκριση.

Είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (1)$$

Από πίνακες

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad (2)$$

$$H \ (1) \xRightarrow{(2)} H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε :

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}}_{W(e^{j\omega})}$$

$$\frac{1}{2}e^{-j\omega}W(e^{j\omega}) \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}w[n-1]$$

Αρα

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1].$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**

  - Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

  - Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega})$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X\left(e^{j\omega}\right) \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}$$

  - Έτσι

$$\boxed{\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

1η μέθοδος:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι $\gamma - \frac{1}{2}$, και η χαρακτ. ρίζα είναι $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Έστω το σύστημα S_0, που είναι το

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

Θέτω $x[n] = \delta[n]$ και τότε

$$h_0[n] - \frac{1}{2}h_0[n-1] = \delta[n]$$

Για $n=0$, $h_0[0] - \frac{1}{2}\cancel{h_0[-1]}^{0} = \delta[0] = 1 \Leftrightarrow \boxed{h_0[0] = 1}$

Επίσης,

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

$$h_c[n] = c_1 \gamma_1^n, \; n \geq 0 = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \; n \geq 0.$$

Έχω

$$h_c[0] = 1 \Leftrightarrow c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{c_1 = 1}$$

Άρα

$$h_c[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Τελικά,

$$h[n] = h_c[n] - \frac{1}{4} h_c[n-1]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

2η μέθοδος:

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4} x[n-1]$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

$$Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = X(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

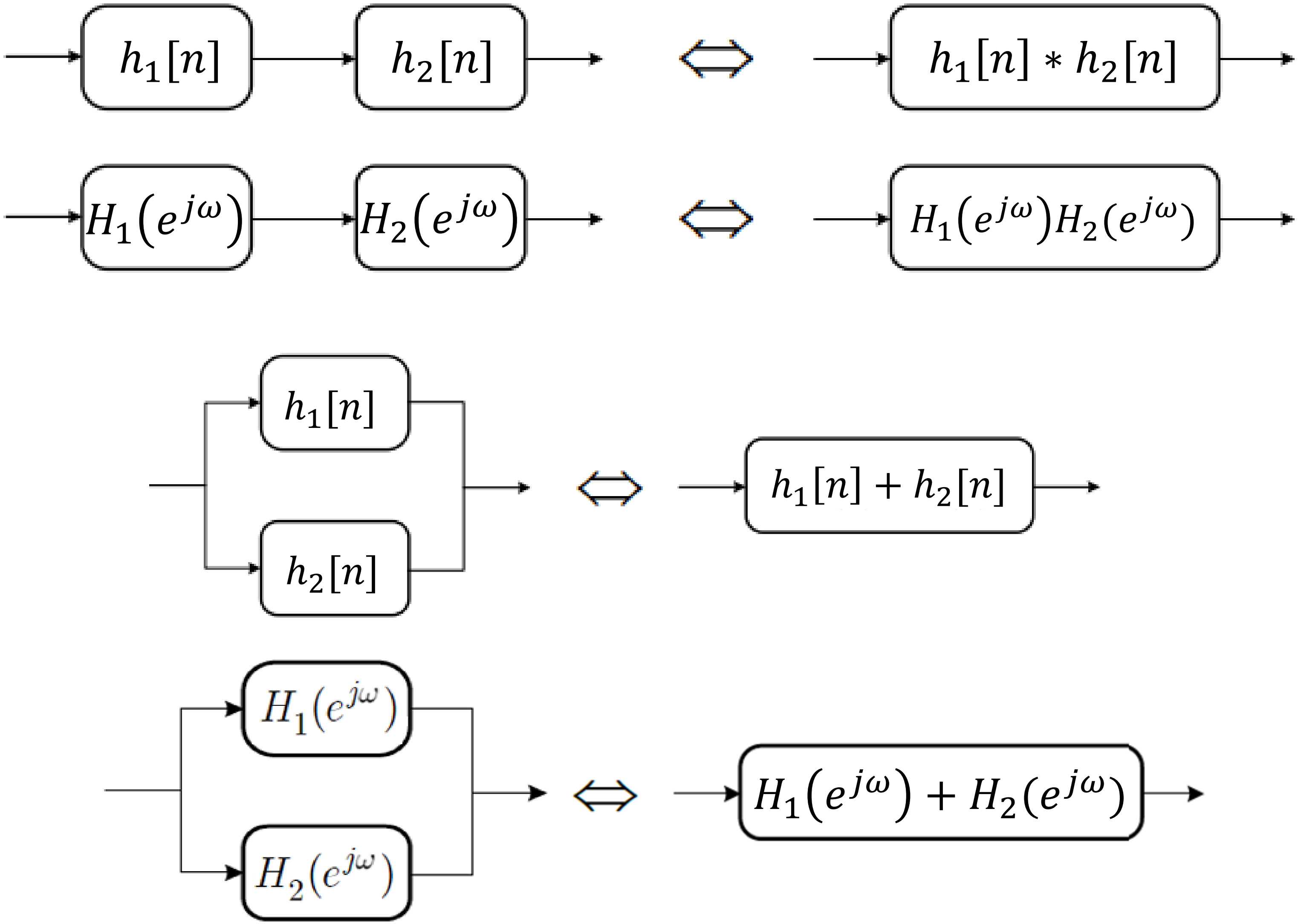
Άρα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

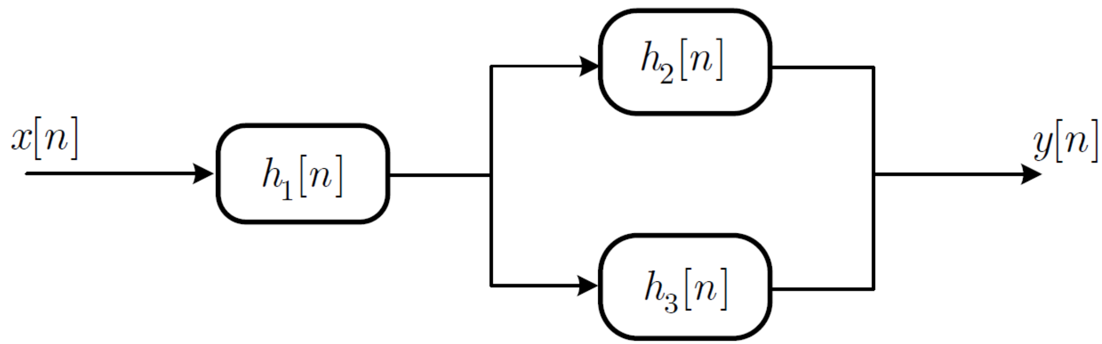
$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1].$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$
$$h_2[n] = \delta[n-2],$$
$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

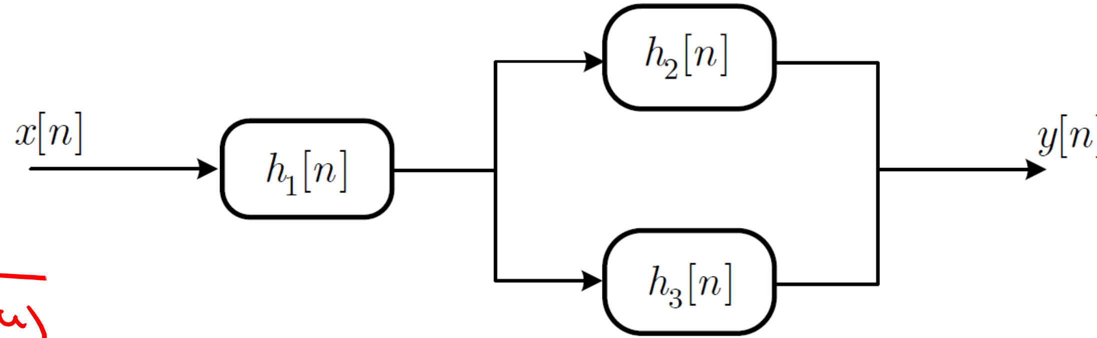
α) Από το σχήμα, $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left(H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})\right)$.

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left(e^{-j2\omega} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right) = \frac{e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

β) Είναι $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + F^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \right\}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:

Είναι (ο 2ος τρόπος μόνο)



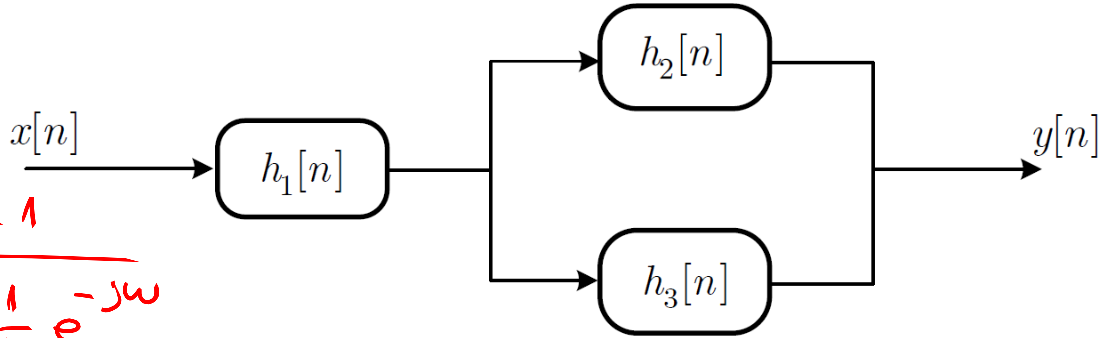
$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$A = G(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$B = G(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1-2} = -1$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



Άρα

$$G(e^{j\omega}) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{-1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

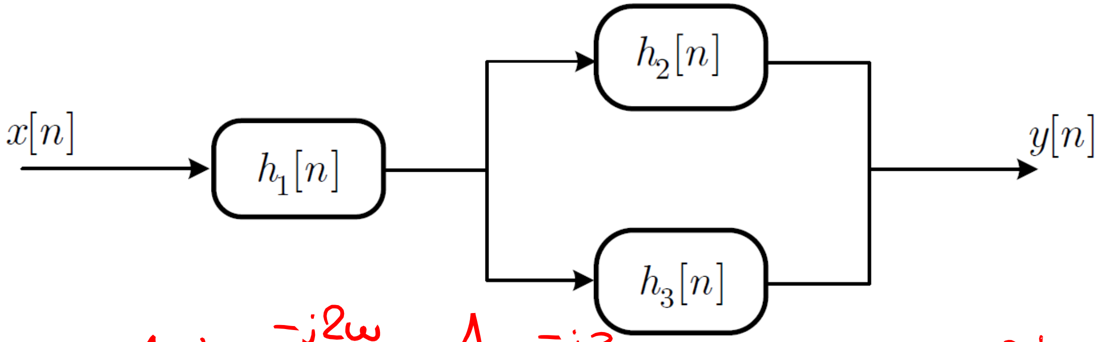
Συνολικά

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n].$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



Από (α) ερώτημα:

γ) $H(e^{j\omega}) =$

$$= \frac{e^{-j2\omega}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)+1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Άρα

$$Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right) = X(e^{j\omega})\left(1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}\right)$$

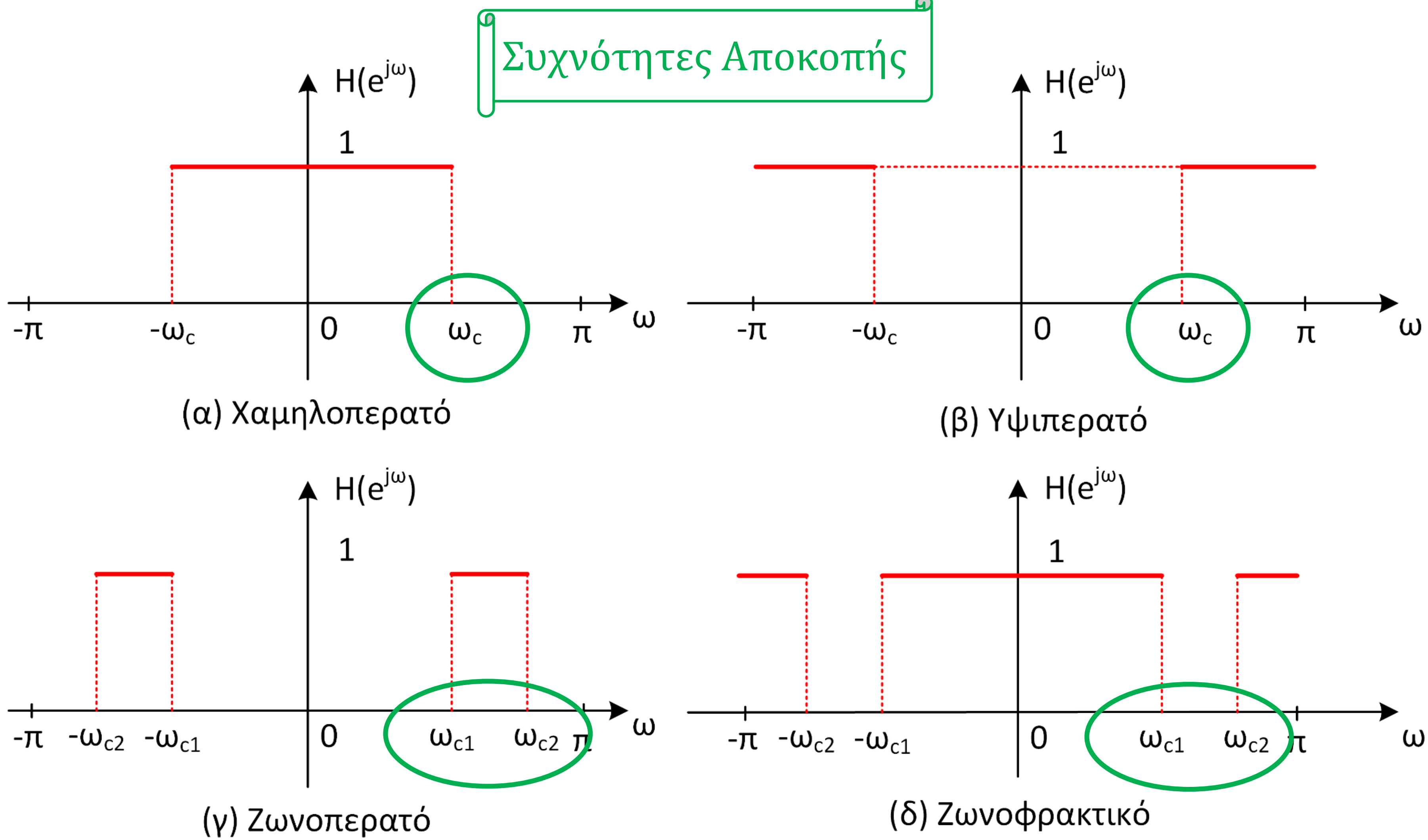
$$Y(e^{j\omega})-\frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})+e^{-j2\omega}X(e^{j\omega})-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}X(e^{j\omega})$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2] = x[n]+x[n-2]-\frac{1}{4}x[n-3].$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

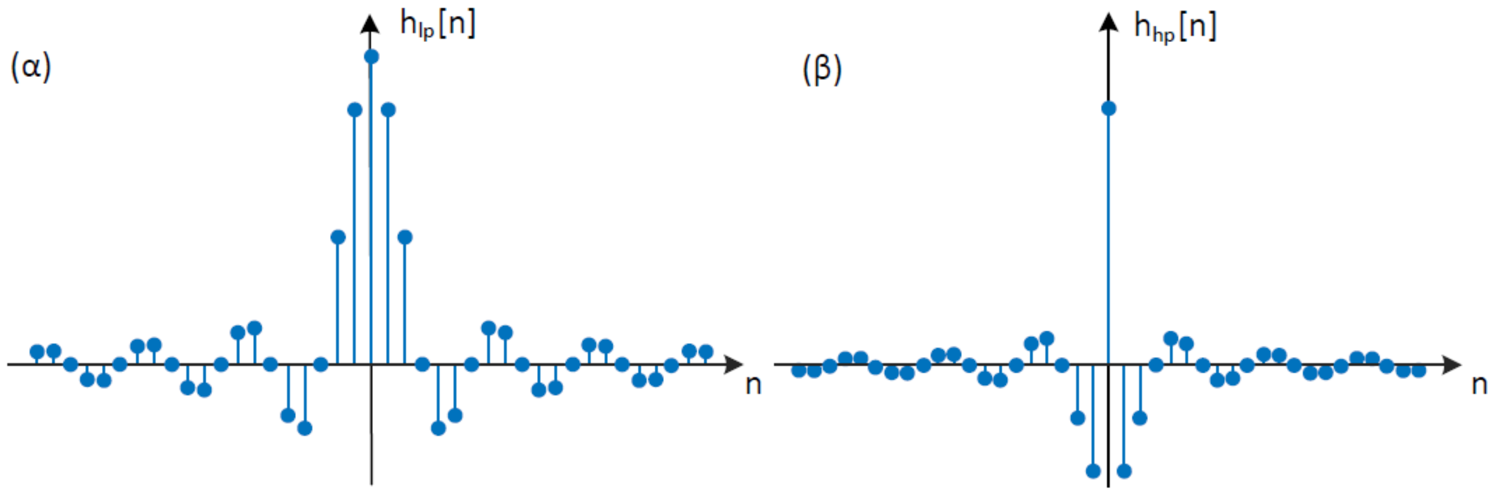
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad \leftrightarrow \quad H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- Το υψιπερατό φίλτρο (με ίδια συχνότητα αποκοπής) μπορεί να γραφεί ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

- Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

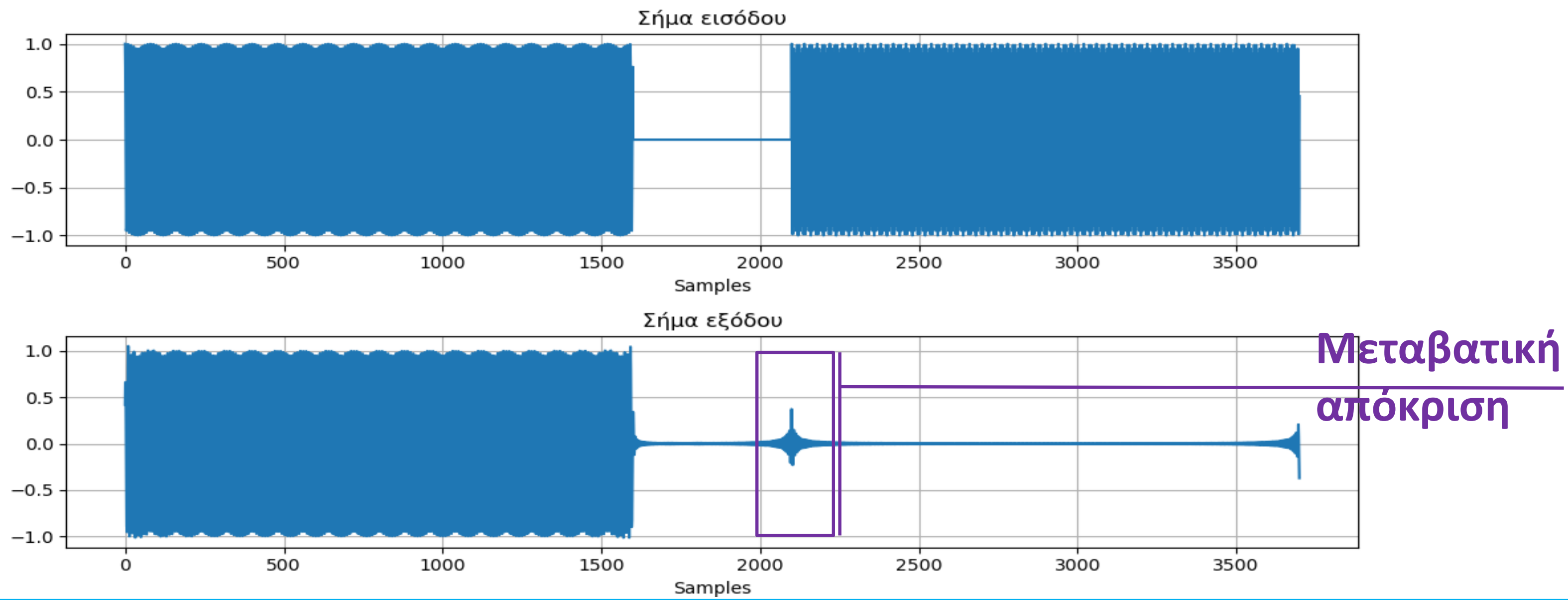
$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο

# Τόνοι
f1 = 1800 # Hz
f2 = 2800 # Hz

# Συχνότητα δειγματοληψίας και άξονας χρόνου
fs = 16000
t = np.arange(0, 0.1, 1/fs)
n = np.arange(0, len(t))

# Διακριτές συχνότητες
w1 = 2*np.pi*f1/fs # rad/sample
w2 = 2*np.pi*f2/fs # rad/sample

# Ήχος
x = np.hstack([np.cos(w1*n), np.zeros((500)), np.cos(w2*n)])
n_x = np.arange(0, len(x))
```

```python
# Χαμηλοπερατό φίλτρο
fc = 2600 # Hz
wc = 2*np.pi*fc/fs # rad/sample
n_y = np.arange(-len(x)/2, len(x)/2)
hlp = wc/np.pi * np.sinc(wc*n_y/np.pi)

# Φιλτράρισμα
y = np.convolve(x, hlp, mode='same')

# Γράφημα
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(6,6))
axs[0].plot(n_x, x)
axs[0].set_title('Σήμα εισόδου')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].plot(n_x, y)
axs[1].set_title('Σήμα εξόδου')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')
```



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ