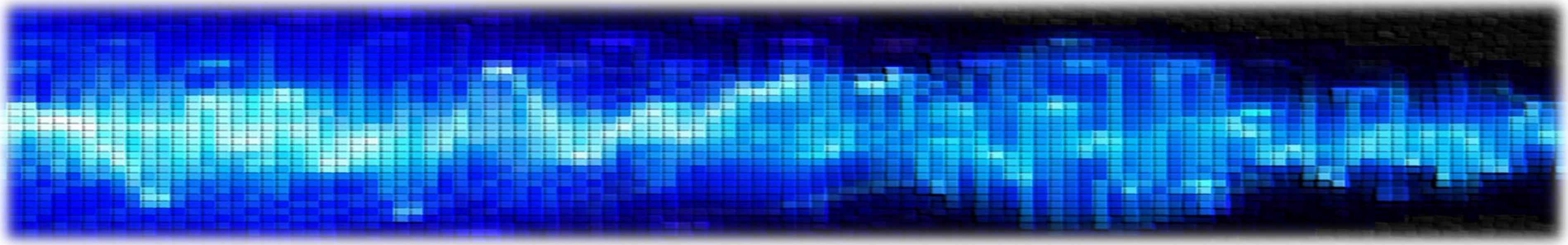
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 7^{Η}



- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ιδιότητες

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \|a\|>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\|n\|},\ \|a\|<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)} u[n],\ \|r\|<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \|\omega\|<\omega_c \\ 0, & \omega_c<\|\omega\|\leq\pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0\leq n\leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Fourier
Γραμμικότητα	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$k-$οστή παραγώγιση στη συχνότητα	$(-jn)^k x[n]$	$\dfrac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο στο χρόνο	$x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Άθροισμα στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-e^{j\omega}}X(e^{j\omega})$
Συζυγής συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}), \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert, \\ \phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x[n] = x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Re$ και άρτιο
Περιττό σήμα	$x[n] = -x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Im$ και περιττό
Άρτιο μέρος	$x_e[n] = \mathrm{Ev}\{x[n]\}$, πραγματικό	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Περιττό μέρος	$x_o[n] = \mathrm{Od}\{x[n]\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα
  - Έστω

$$y[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ax_1[n] + bx_2[n])e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax_1[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} bx_2[n]e^{-j\omega n}$$

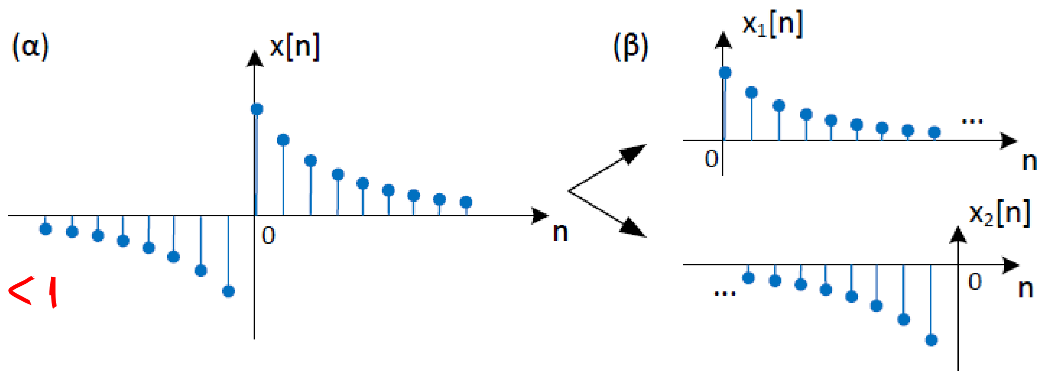
$$= a\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]e^{-j\omega n} + b\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j\omega n}$$

$$= aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

  - Άρα

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα
    - Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



Έστω $x_1[n] = a^n u[n]$, $|a|<1$

$x_2[n] = -b^n u[-n-1]$, $|b|>1$

Από πίνακες

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a|<1$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-be^{-j\omega}}, \quad |b|>1$$

Άρα

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-be^{-j\omega}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση

  - Έστω

$$y[n] = x[n-n_0] \leftrightarrow Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-j\omega(k+n_0)}$$

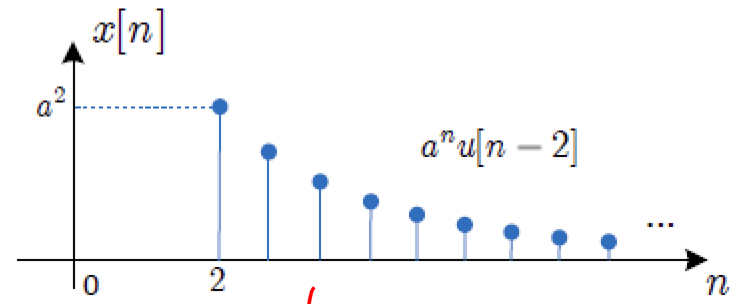
$$= e^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-j\omega k}$$

$$= e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$$

  - Άρα

$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση
  - Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



$x[n] = a^n u[n-2]$

Έχουμε

$$x[n] = a^n u[n-2]$$
$$= \frac{a^{-2}}{a^{-2}} a^n u[n-2]$$
$$= a^{n-2} u[n-2] \cdot \frac{1}{a^{-2}}$$
$$= a^2 \left(a^{n-2} u[n-2]\right)$$
$$= a^2 y[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jw}) = a^2 \frac{1}{1-ae^{-jw}} e^{-j2w}.$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

  - Έστω

$$y[n] = e^{j\omega_0 n}x[n] \leftrightarrow Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n}$$

$$= X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

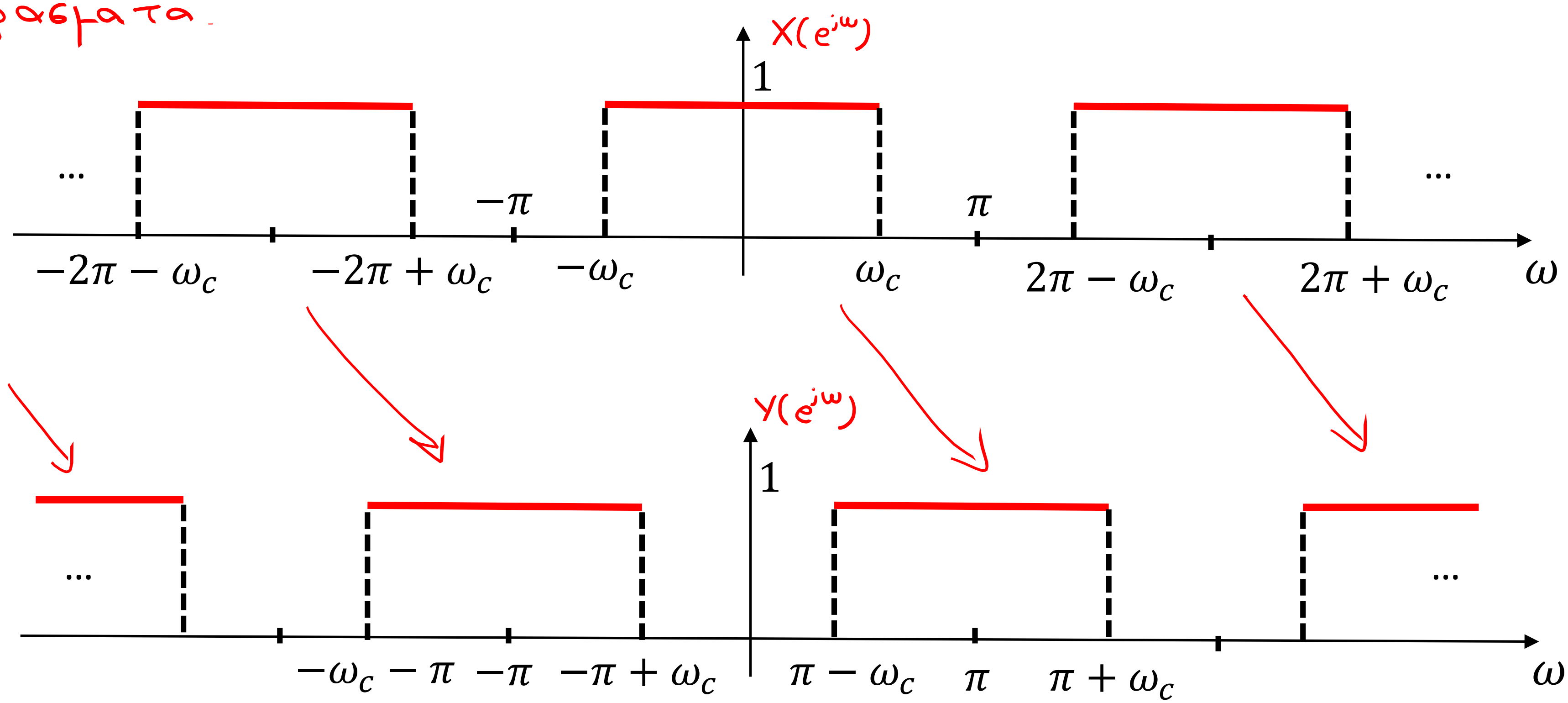
  - Άρα

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα
    - Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$ αν

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Πριν τη μαθηματική λύση, ας δούμε λίγο γραφικά τα δυο φάσματα.



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

Θα είχαμε ότι

$$y[n] = F^{-1}\{X(e^{j(\omega-\pi)})\}$$

$$= e^{j\pi n}x[n]$$

$$= (-1)^n x[n]$$

Ξέραμε ότι

$$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \overset{F}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

οπότε

$$y[n] = (-1)^n \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}.$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο
  - Έστω

$$c[n] = x[n] * y[n] \leftrightarrow C\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] * y[n]) e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] y[n-k]\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-k]\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, Y\left(e^{j\omega}\right) e^{-j\omega k}$$

$$= Y\left(e^{j\omega}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-j\omega k} = X\left(e^{j\omega}\right) Y\left(e^{j\omega}\right)$$

  - Άρα

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) Y\left(e^{j\omega}\right)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο
  - Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x[n] = a^n u[n], y[n] = b^n u[n], |a| < 1, |b| < 1$

Είναι $x[n] = a^n u[n]$, $|a|<1 \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$y[n] = b^n u[n]$, $|b|<1 \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-be^{-j\omega}}$

άρα

$$C(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$$

$$= \frac{A}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1-be^{-j\omega}}$$

$$A = C(e^{j\omega})(1-ae^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{(\cancel{1-ae^{-j\omega}})(1-be^{-j\omega})}(\cancel{1-ae^{-j\omega}})\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{a}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$= \left.\frac{1}{1-be^{-j\omega}}\right|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{a}} = \frac{1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{1}{\frac{a-b}{a}} = \frac{a}{a-b} = A$$

Όμοια, $B = \dfrac{b}{b-a}$. Άρα

$$C(e^{j\omega}) = \frac{\frac{a}{a-b}}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{\frac{b}{b-a}}{1-be^{-j\omega}}$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$C[n] = \frac{a}{a-b}a^n u[n] + \frac{b}{b-a}b^n u[n]$$

$$= \left(\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\right)u[n].$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: θεώρημα Parseval
  - Έστω

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x^*[n]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\, d\omega\right) x^*[n]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]e^{j\omega n}\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right)^* d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)^* d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: θεώρημα Parseval
- Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

Είναι $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\omega_c n)}{\pi^2 n^2} = ?$$

Ξέρουμε ότι

$$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Οπότε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1^2 \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \omega \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi} (\omega_c - (-\omega_c)) = \frac{\omega_c}{\pi}.$$

Τέλος Διάλεξης