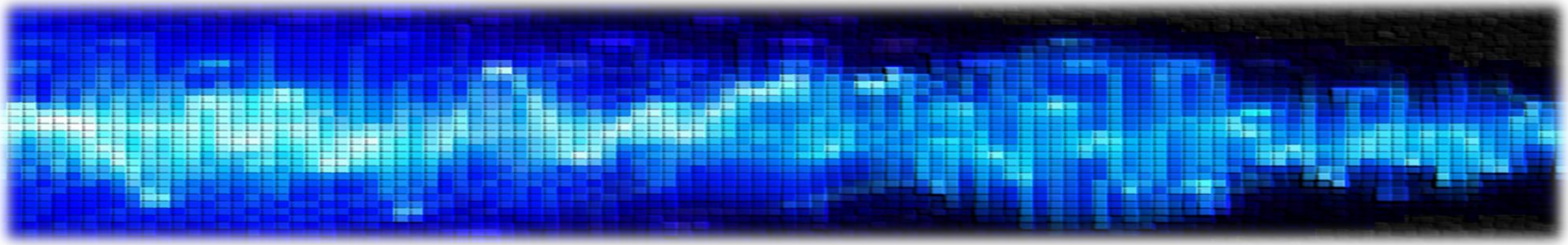
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

## ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η



- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

## • Προς το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου…

- Είδαμε με λεπτομέρεια πως επηρεάζει ένα ΓΧΑ σύστημα ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ή ένα ημίτονο) συχνότητας $\omega_0$ που εμφανίζεται στην είσοδό του
  - Το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|$
  - Στη φάση της εισόδου προστίθεται μια σταθερά $\varphi_H(e^{j\omega_0})$

- Όμως τα περισσότερα σήματα που μας ενδιαφέρουν **δεν** έχουν τη μορφή ενός μιγαδικού εκθετικού (ή ημιτονοειδούς) σήματος

- Η ανάλυση που κάναμε θα μας ήταν **πολύ** χρήσιμη αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x[n]$ ως συνάρτηση κάποιων μιγαδικών εκθετικών σημάτων που το καθένα θα έχει κάποια συγκεκριμένη συχνότητα
  - Τότε θα γνωρίζαμε πως επηρεάζεται κάθε συχνότητα από το ΓΧΑ σύστημα

- Αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό!! ☺

- Το μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει αυτήν την πληροφορία ονομάζεται – έκπληξη! ☺ – **Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete time Fourier Transform – DTFT)**

# Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Μια πιο εύλογη εξαγωγή του DTFT προέρχεται από τις Σειρές Fourier διακριτού χρόνου, ευθέως ανάλογα με την εξαγωγή του Μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από τις Σειρές Fourier συνεχούς χρόνου

- Θα παραλείψουμε εδώ αυτήν την παρουσίαση και θα δώσουμε απευθείας τον ορισμό

- Ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega}$$

# • Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ’ αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του $\omega$:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους
(Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης
(Phase Spectrum)

# Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε τι εκφράζει ο DTFT και τι ο αντίστροφός του

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

- Θα σας βοηθήσει αν θυμηθείτε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συνεχούς χρόνου

**Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

1. Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν *συνεχείς τιμές* στο $(-\pi,\pi]$, και "υπάρχουν" μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$.
2. Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να *συνθέσει* το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών *όλων* των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi,\pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

# • Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

$x[n] \in \Re$

- Αν το σήμα που αναλύεται είναι **πραγματικό**, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

- Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_x\left(e^{-j\omega}\right)$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

- Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi_x\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega$$

- Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία πλάτους και φάσης με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας $\omega$ στο διάστημα [0, π] !!!

# Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη

- Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

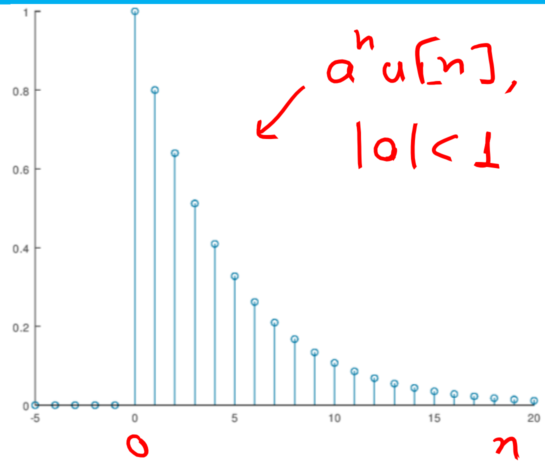
- Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος

- Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η *μέση τετραγωνική σύγκλιση*

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n u[n],\ |a| < 1.$



$a^n u[n],\ |a|<1$

Είναι $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} =$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} =$

$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n \overset{*}{=} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}},$ για $|a|<1.$

$*$ $|ae^{-j\omega}| = |a| \underbrace{|e^{-j\omega}|}_{1} = |a| < 1$

Άρα

$a^n u[n],\ |a|<1 \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},\ |a|<1$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Ας βρούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος!

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{(1-ae^{-j\omega})^*}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{-j\omega})^*} = \frac{(1-ae^{-j\omega})^*}{|1-ae^{-j\omega}|^2} \quad (1)$$

Είναι

$$|1-ae^{-j\omega}|^2 \underset{\text{Euler}}{=} |1-a\cos(\omega)+ja\sin(\omega)|^2 = (1-a\cos\omega)^2+(a\sin\omega)^2$$

$$= 1-2a\cos\omega + \underbrace{a^2\cos^2\omega + a^2\sin^2(\omega)}_{a^2} = 1-2a\cos(\omega)+a^2 \quad (2)$$

Επίσης, $(1-ae^{-j\omega})^* = 1-ae^{j\omega}$ (3)

$$(1) \xrightarrow[(3)]{(2)} X(e^{j\omega}) = \frac{1-ae^{j\omega}}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \overset{\text{Euler}}{=} \frac{1-a\cos(\omega)-ja\sin(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$$

$$= \frac{1-a\cos(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2} + j\frac{-a\sin(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2} = X_R(e^{j\omega})+jX_I(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$$

Άρα $X_R(e^{j\omega}) = \dfrac{1-a\cos(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$, $X_I(e^{j\omega}) = \dfrac{-a\sin(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$ (4)

Ας βρούμε την πολική μορφή του $X(e^{j\omega})$.

→ Φάσμα πλάτους $|X(e^{j\omega})| = \dfrac{1}{|1-ae^{-j\omega}|} \overset{(2)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1-2a\cos(\omega)+a^2}}$

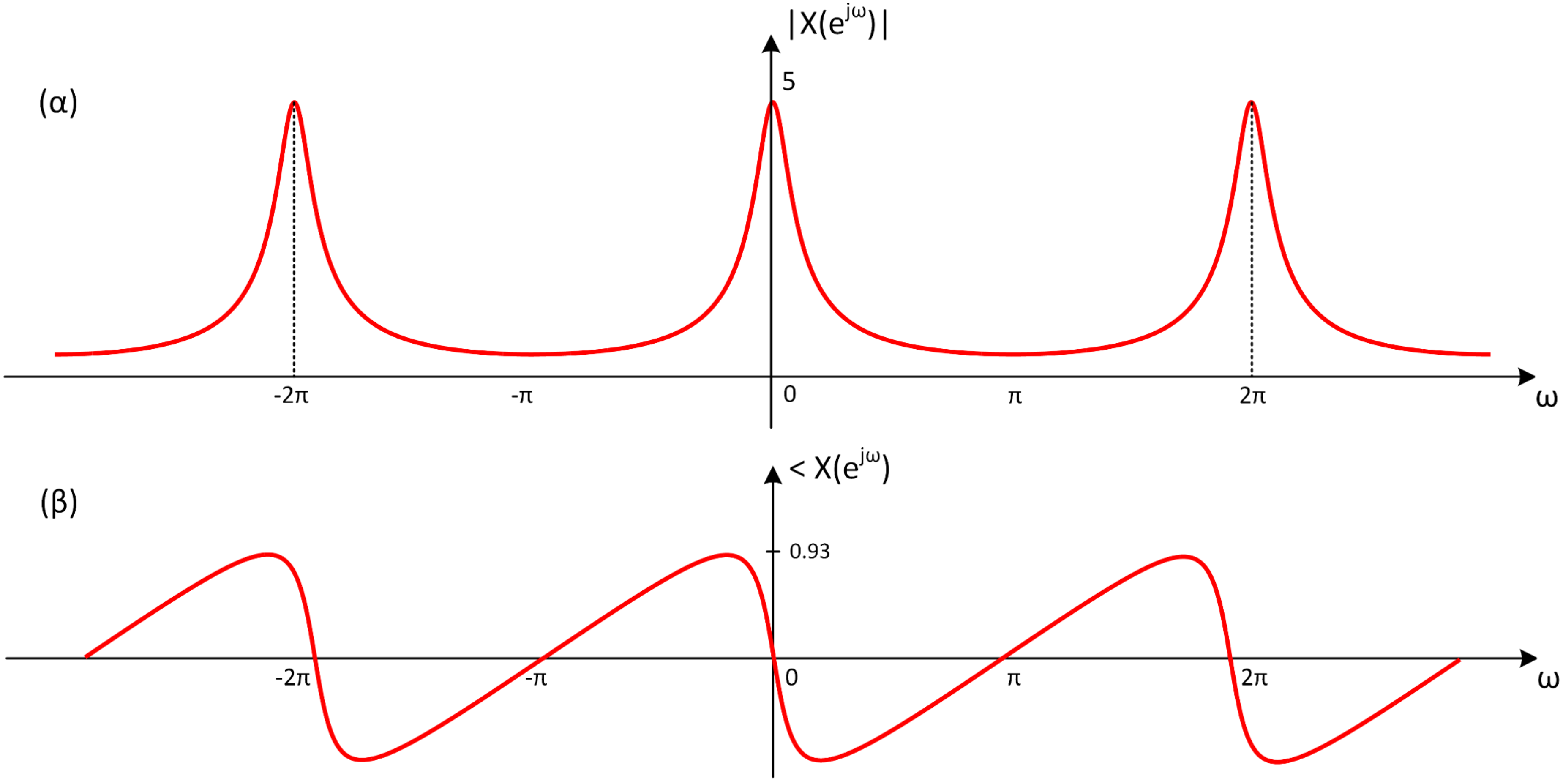
→ Φάσμα φάσης $\measuredangle X(e^{j\omega}) = \varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\dfrac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \overset{(4)}{=}$

$$\overset{(4)}{=} \tan^{-1}\frac{-\dfrac{a\sin(\omega)}{\cancel{\;\ldots\;}}}{\dfrac{1-a\cos(\omega)}{\cancel{\;\ldots\;}}} = \tan^{-1}\left(\frac{-a\sin(\omega)}{1-a\cos(\omega)}\right) = -\tan^{-1}\frac{a\sin(\omega)}{1-a\cos(\omega)}.$$

Ας δούμε πως μοιάζουν γραφικά αυτές οι συναρτήσεις πλάτους και φάσης.

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a = 0.8 = \frac{4}{5}$

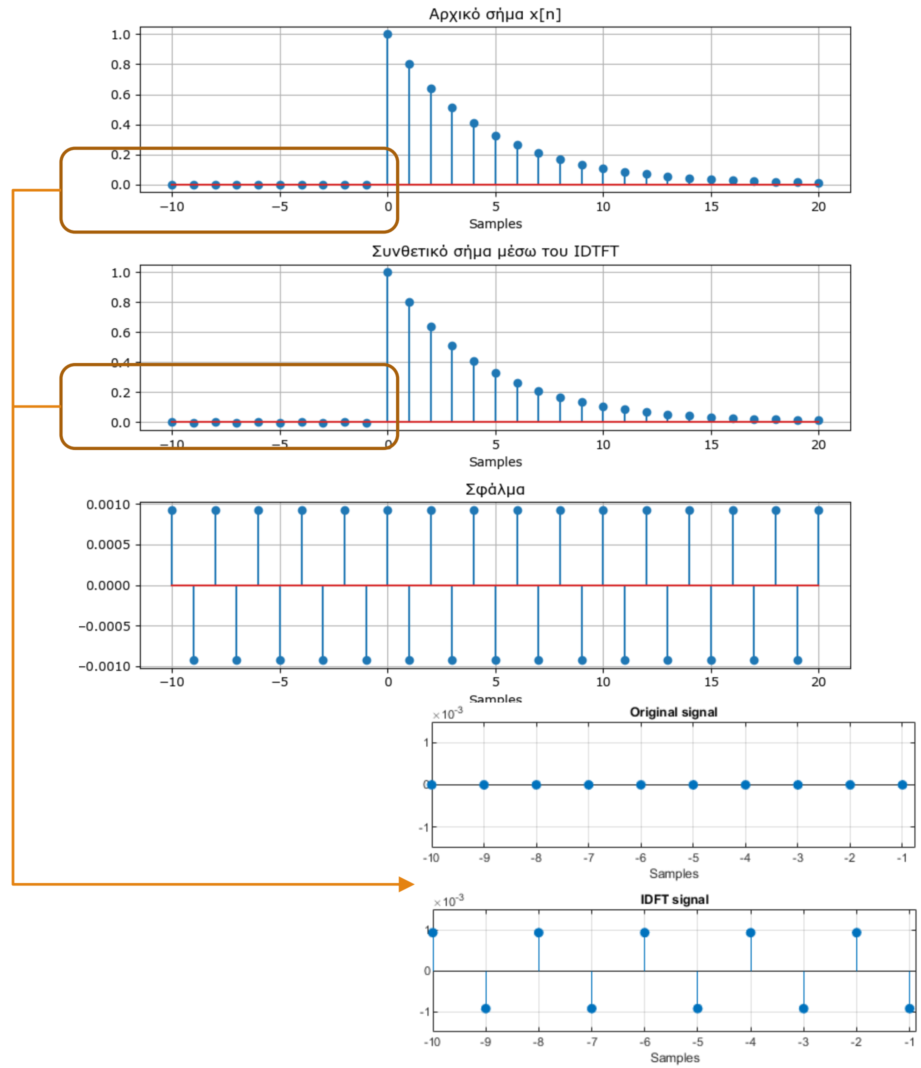


# • Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

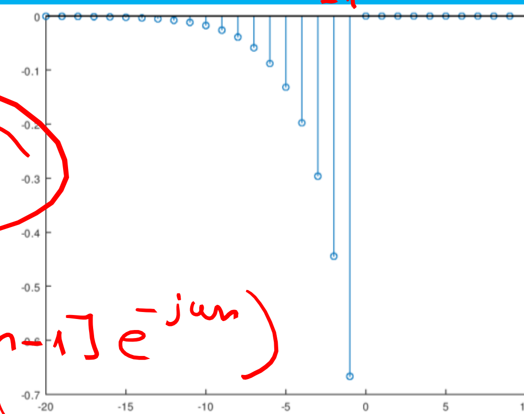
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
alpha = 0.8
n = np.arange(-10, 21)
x = np.hstack([np.zeros((10)), alpha**n[10:31]])

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]
# Υπολογίζω το X(exp(jw)) όπως στο χαρτί
X = 1/(1 - alpha * np.exp(-1j*w))

# Σύνθεση του σήματος x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = np.zeros_like(x)

for i in range(0, len(w)):
    x_syn = x_syn + X[i] * np.exp(1j*w[i]*n)

# Άθροισμα Riemann
x_syn = dw*(1/(2*np.pi))*x_syn
# Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, υπάρχει ένα αμελητέο
# φανταστικό μέρος
x_syn = np.real(x_syn)

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x_syn)
axs[1].set_title('Συνθετικό σήμα μέσω του IDTFT')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(n, x_syn-x)
axs[2].set_title('Σφάλμα')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $|a| > 1$.




Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-a^n u[-n-1] e^{-j\omega n}\right)$$

$$u[-n-1] = \begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\omega})^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^{-n} = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^{-n} - 1\right)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}e^{+j\omega})^n \overset{*}{=} 1 - \frac{1}{1-a^{-1}e^{j\omega}} = \frac{1-a^{-1}e^{j\omega}}{1-a^{-1}e^{j\omega}} - \frac{1}{1-a^{-1}e^{j\omega}}$$

$$= \frac{-a^{-1}e^{j\omega}}{1-a^{-1}e^{j\omega}} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a| > 1.$$

$*$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, $|a| < 1$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

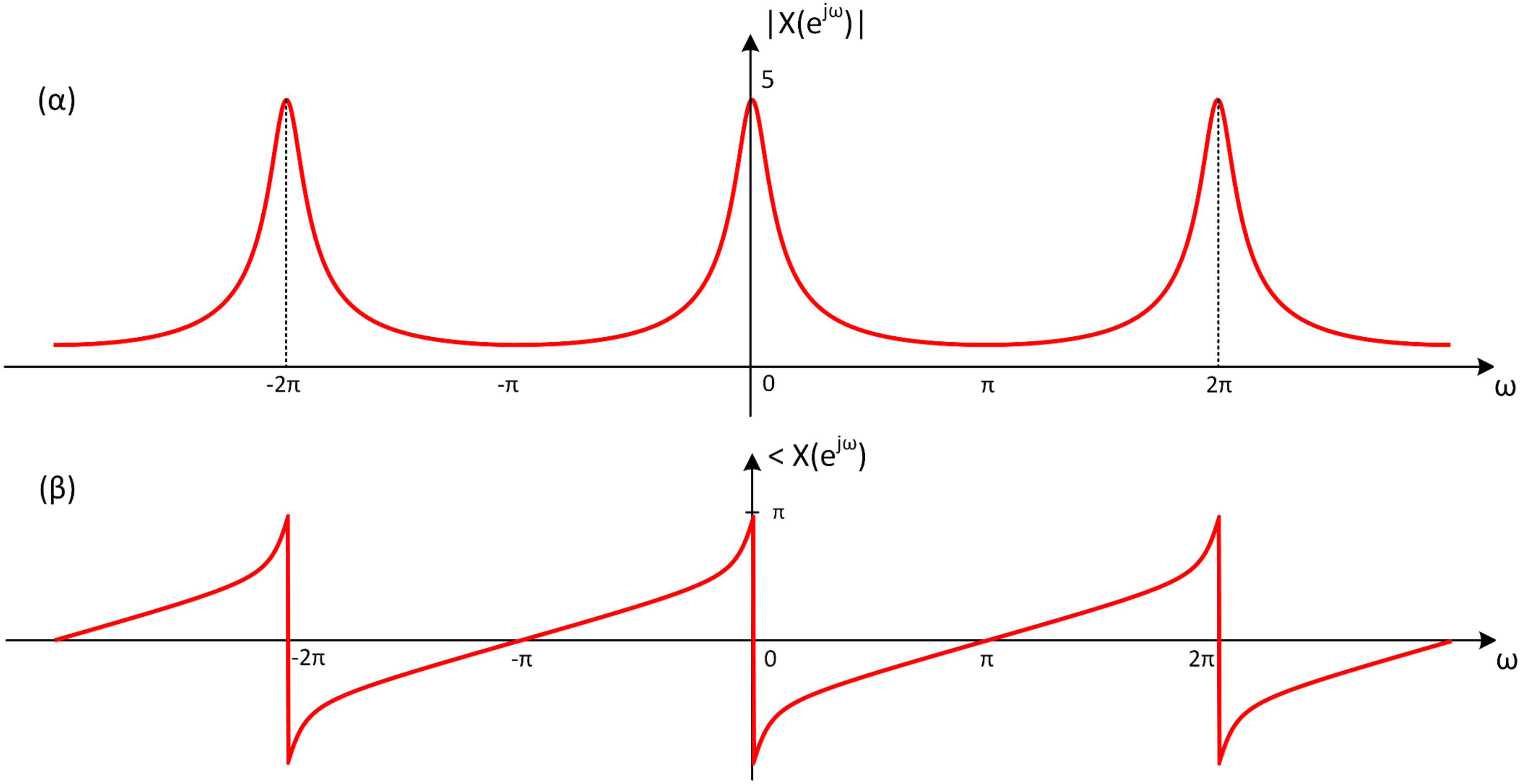
Άρα $-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a|>1$

Πραγματικό και φανταστικό μέρος, καθώς και φάσμα πλάτους και φάσης είναι αλγεβρικά ίδια με πριν.

Ας δούμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο τελευταίων.

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a = \frac{6}{5}$

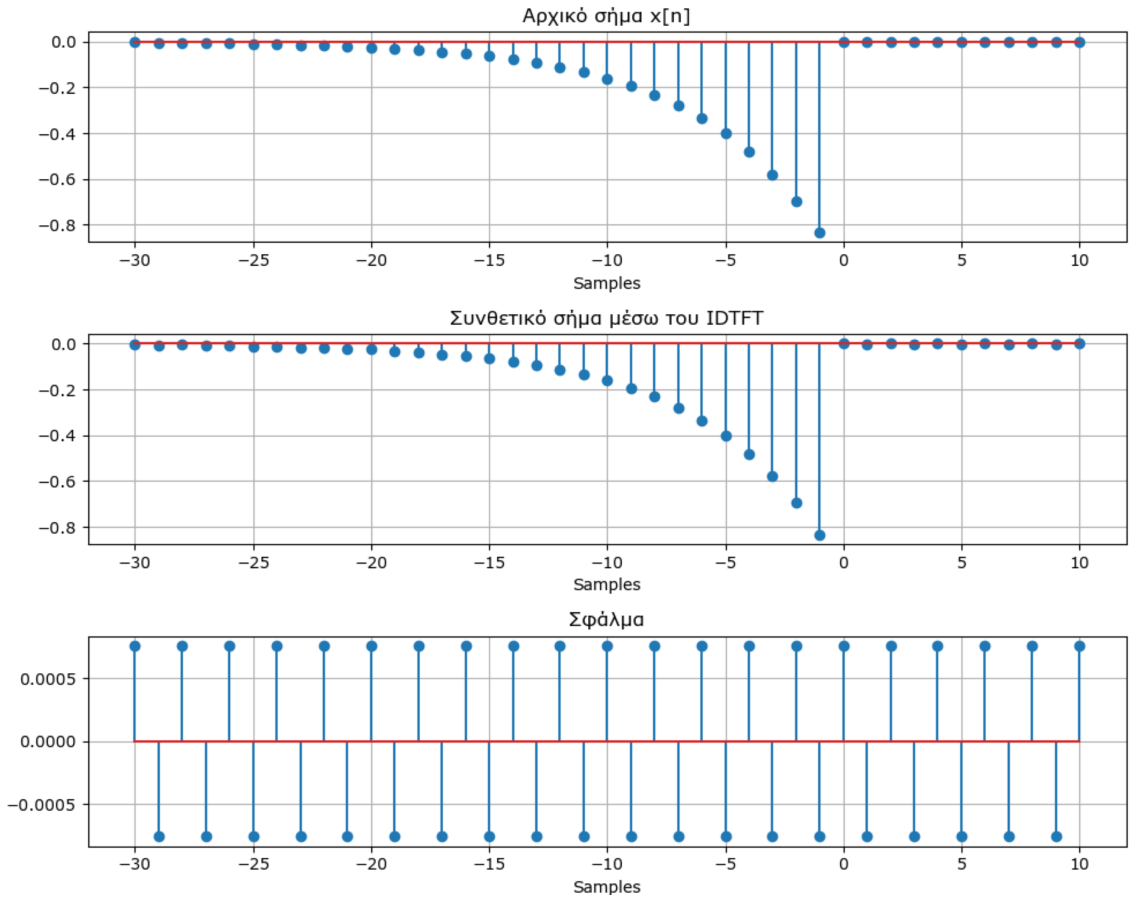


# • Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
alpha = 6/5
n = np.arange(-30, 11)
x = np.hstack([-alpha**n[0:30], np.zeros((11))])

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]
# Υπολογίζω το X(exp(jw)) όπως στο χαρτί
X = 1/(1 - alpha * np.exp(-1j*w))

# Σύνθεση του σήματος x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = np.zeros_like(x)

for i in range(0, len(w)):
    x_syn = x_syn + X[i] * np.exp(1j*w[i]*n)

# Άθροισμα Riemann
x_syn = dw*(1/(2*np.pi))*x_syn
# Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, υπάρχει ένα αμελητέο
# φανταστικό μέρος
x_syn = np.real(x_syn)

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x_syn)
axs[1].set_title('Συνθετικό σήμα μέσω του IDTFT')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(n, x_syn-x)
axs[2].set_title('Σφάλμα')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

Είναι

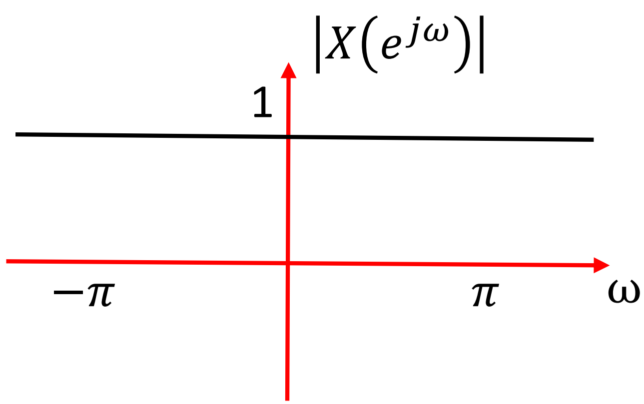
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]\, e^{-j\omega n} = \underbrace{\delta[0]}_{1} \cdot \underbrace{e^{-j\omega 0}}_{1} = 1$$

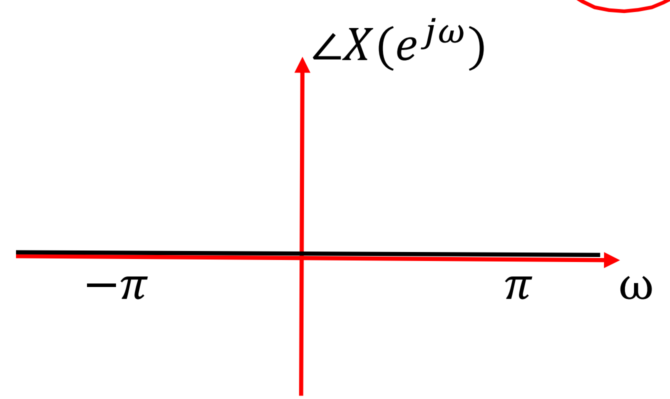
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$1 = \underbrace{1}_{\text{πλάτος}}\, e^{j\overbrace{0}^{\text{φάση}}}$$

Άρα

$$\delta[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} 1, \quad \forall \omega$$



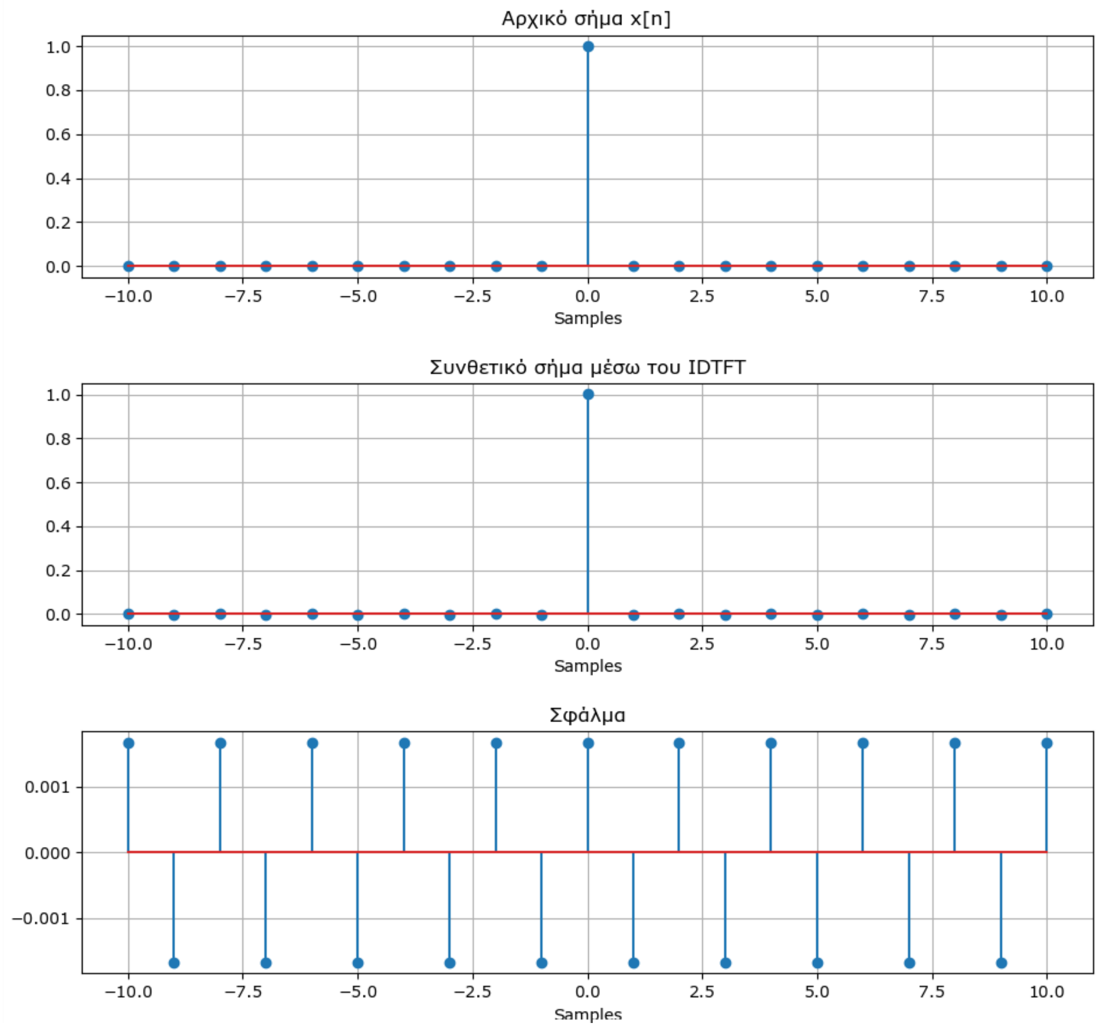



# • Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-10, 11)
x = np.hstack([np.zeros((10)), 1, np.zeros((10))])

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]
# Υπολογίζω το X(exp(jw)) όπως στο χαρτί
X = np.ones_like(w)

# Σύνθεση του σήματος x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = np.zeros_like(x)

for i in range(0, len(w)):
    x_syn = x_syn + X[i] * np.exp(1j*w[i]*n)

# Άθροισμα Riemann
x_syn = dw*(1/(2*np.pi))*x_syn
# Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, υπάρχει ένα αμελητέο
# φανταστικό μέρος
x_syn = np.real(x_syn)

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x_syn)
axs[1].set_title('Συνθετικό σήμα μέσω του IDTFT')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(n, x_syn-x)
axs[2].set_title('Σφάλμα')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```

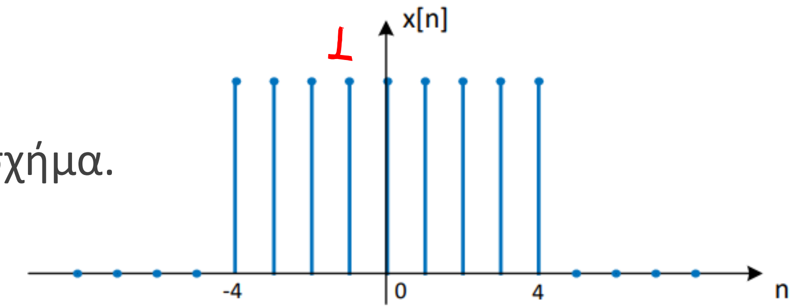
Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$



# Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.




Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-4}^{4} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} e^{-j\omega n} \overset{(\Delta)}{=} \frac{e^{j4\omega} - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}}.$$

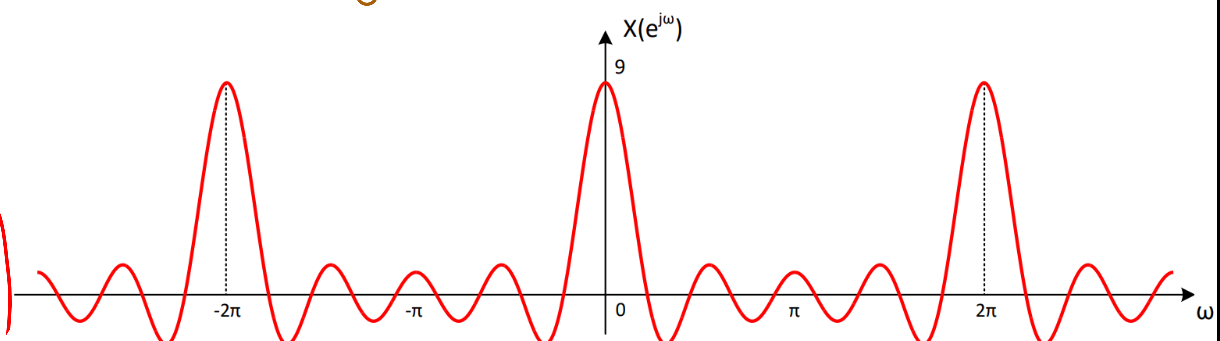
Χρησιμοποιώντας το hint,

$$X(e^{j\omega}) \overset{*}{=} \frac{\cancel{e^{-j\omega/2}}}{\cancel{e^{-j\omega/2}}} \cdot \frac{\sin(9\omega/2)}{\sin(\omega/2)} = \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

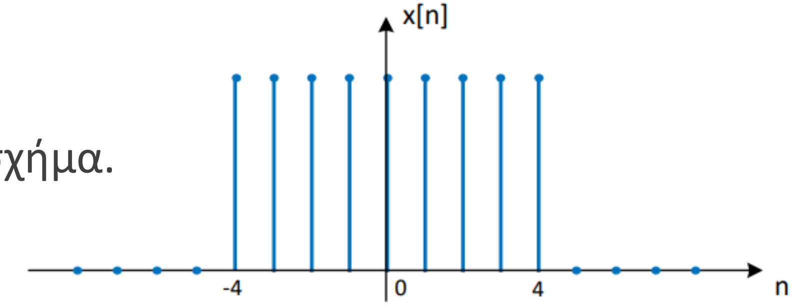
*Hint: $e^{a} - e^{b} = e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{\frac{a-b}{2}} - e^{\frac{b-a}{2}}\right)$

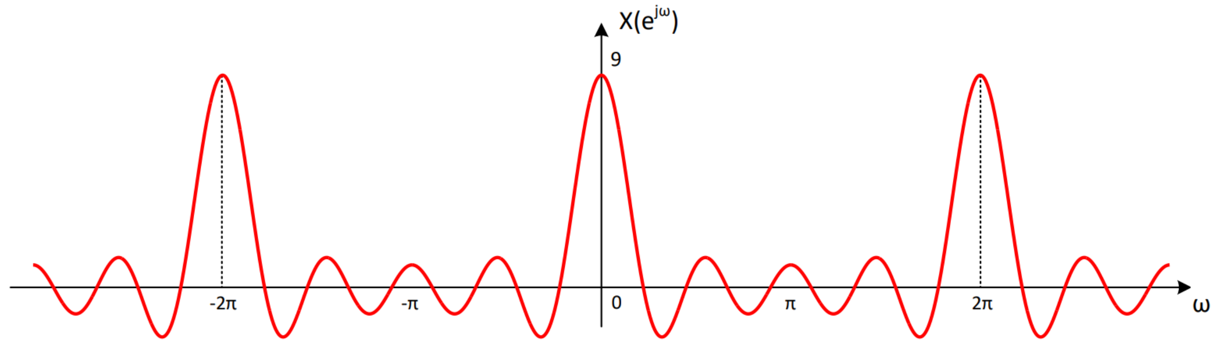
(Δ)

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^{n} = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.




Άρα

$$\begin{cases} 1, & -4 \le n \le 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

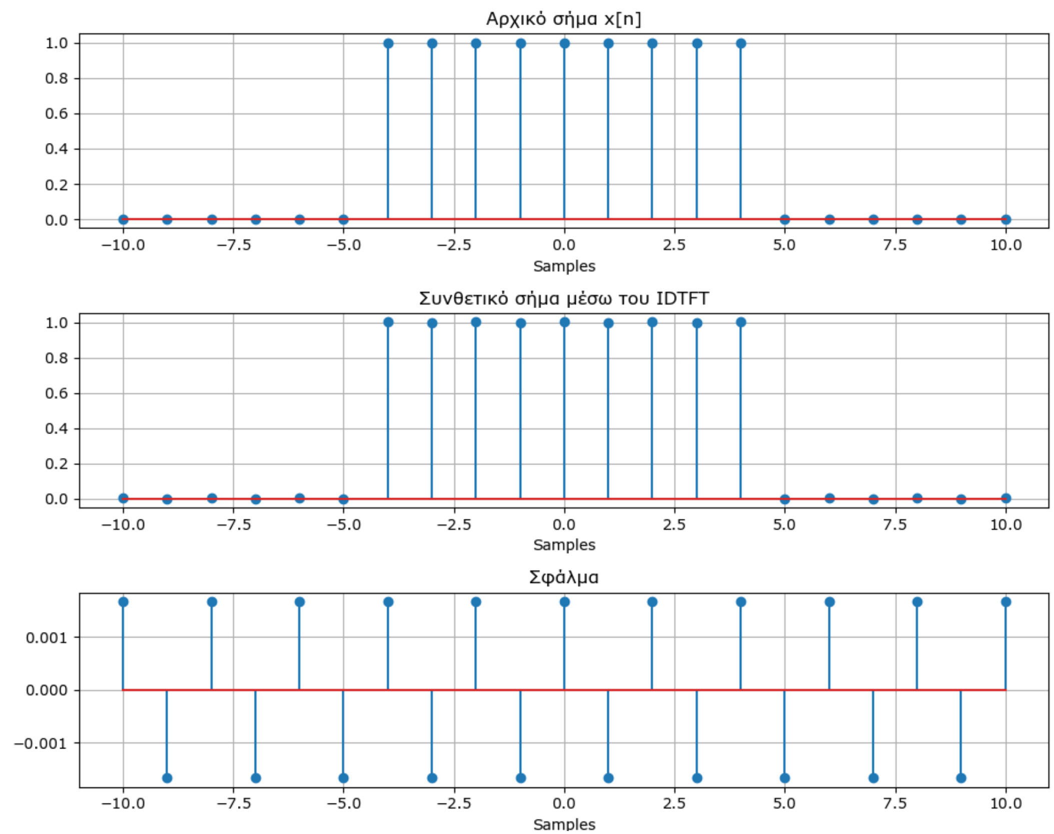
$$\begin{cases} 1, & -M \le n \le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{\sin\left(\frac{2M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

# • Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

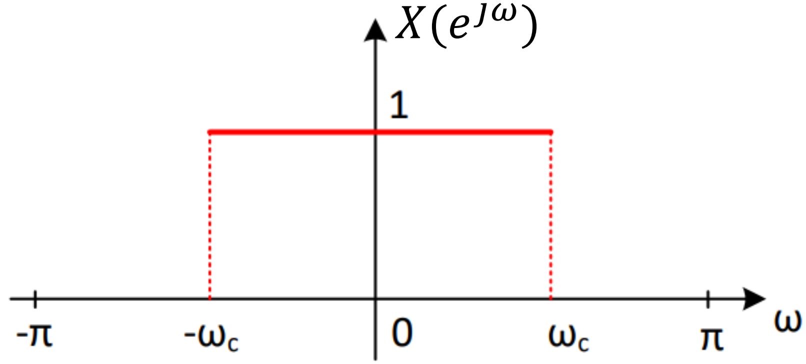
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-10, 11)
x = np.hstack([np.zeros((6)), np.ones((9)), np.zeros((6))])

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]
# Υπολογίζω το X(exp(jw)) όπως στο χαρτί
X = np.sin(9*w/2)/np.sin(w/2)

# Σύνθεση του σήματος x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = np.zeros_like(x)

for i in range(0, len(w)):
    x_syn = x_syn + X[i] * np.exp(1j*w[i]*n)

# Άθροισμα Riemann
x_syn = dw*(1/(2*np.pi))*x_syn
# Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, υπάρχει ένα αμελητέο
# φανταστικό μέρος
x_syn = np.real(x_syn)

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x_syn)
axs[1].set_title('Συνθετικό σήμα μέσω του IDTFT')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(n, x_syn-x)
axs[2].set_title('Σφάλμα')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.




Είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n}\, d\omega$$

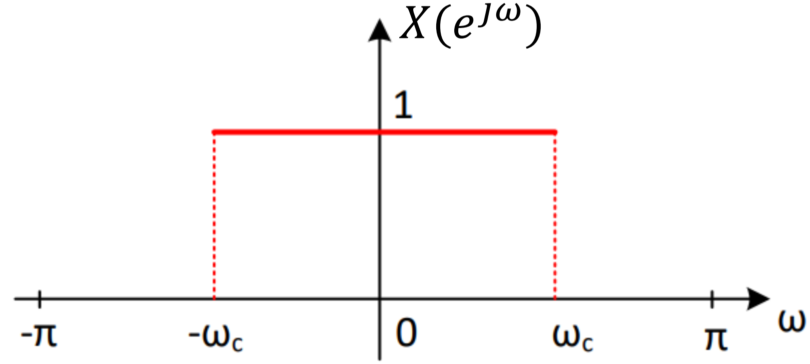
$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big|_{\omega=-\omega_c}^{\omega=\omega_c} = \frac{1}{j2\pi n}\underbrace{\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right)}_{2j\sin(\omega_c n)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{j}2\pi n}\,\cancel{2j}\sin(\omega_c n) = \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n).$$

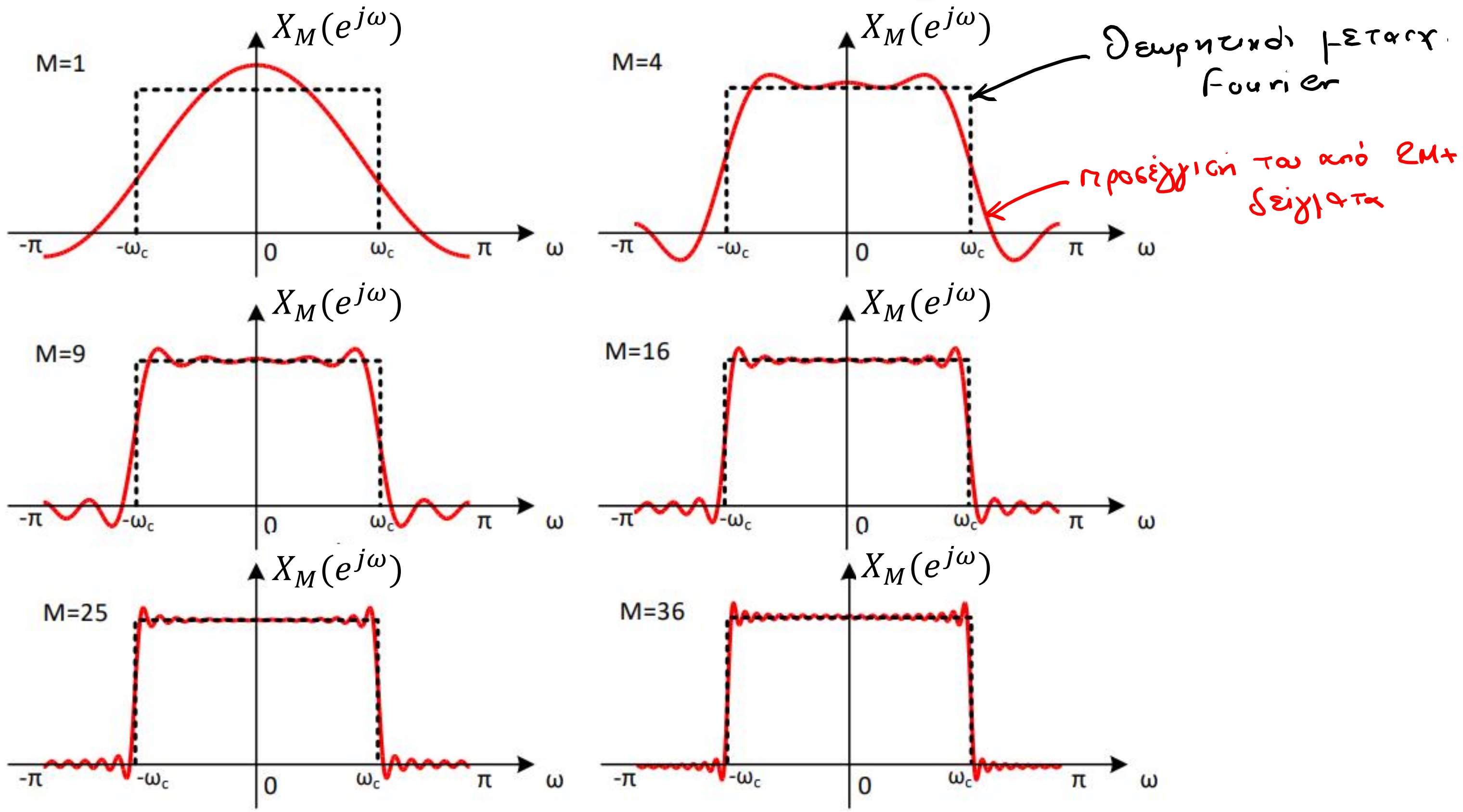
Άρα

$$\frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



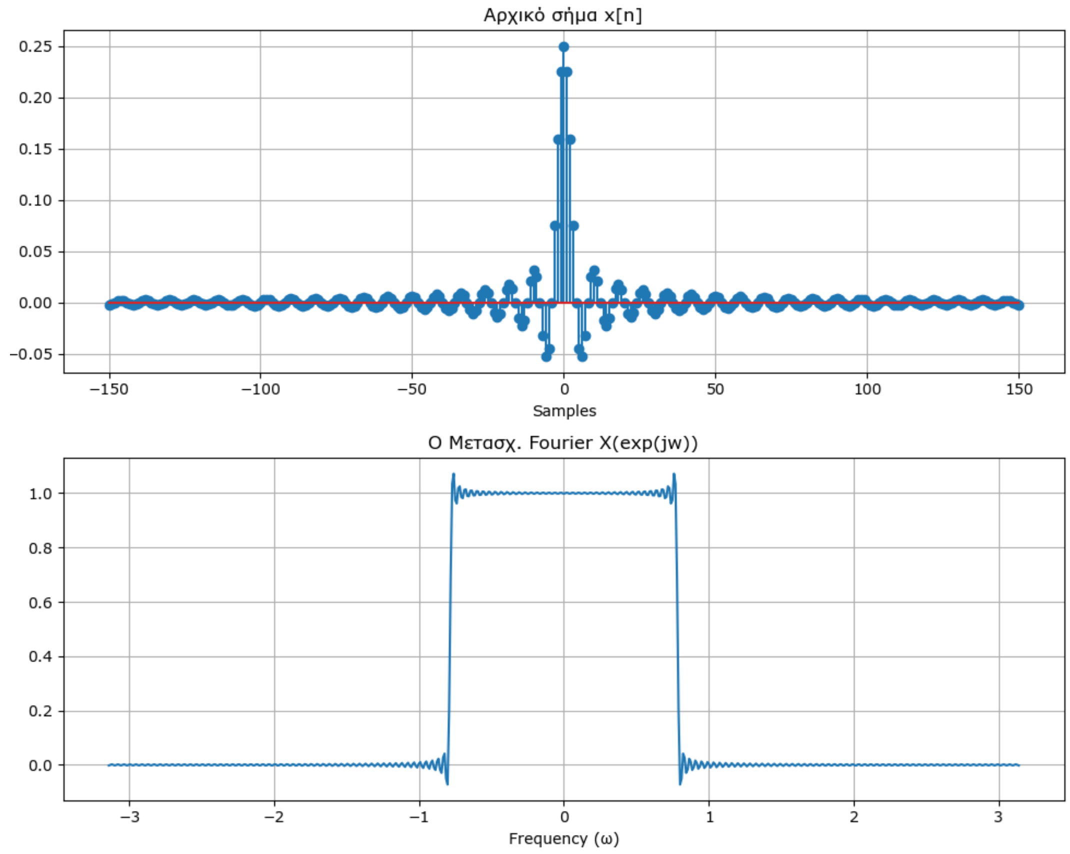

Έστω ότι παίρνω $2M + 1$ δείγματα του σήματος $x[n]$



# Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-150, 151)
wc = np.pi/4 # <--- wc = π/4

x = np.sin(wc*n)/(np.pi*n)
# Διόρθωση απροσδιοριστίας στο n=0
x[150] = wc/np.pi
# Γράφεται και με χρήση της συνάρτησης sinc() ως
# x = wc/np.pi * np.sinc(wc*n/np.pi)

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]

# Σύνθεση του σήματος X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = np.zeros_like(w)

# Άθροισμα του μετ. Fourier
for i in range(0, len(n)):
    X_syn = X_syn + x[i] * np.exp(-1j*w*n[i])

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].plot(w, X_syn)
axs[1].set_title('Ο Μετασχ. Fourier X(exp(jw))')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Frequency (ω)')
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

  - Ως τώρα, τα σήματα που εξετάσαμε ήταν σήματα ενέργειας

  - Ο μετασχ. Fourier συγκλίνει για αυτά τα σήματα

  - Όμως ενδιαφέρον έχουν και τα σήματα ισχύος

  - Γι’αυτά, ο μετασχ. Fourier **δε** συγκλίνει

  - Μπορούμε όμως να ορίσουμε με κάποιο τρόπο το μετασχ. Fourier τους?
    - …ίσως με χρήση γενικευμένων συναρτήσεων?

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο IDTFT του σήματος $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega), \quad \omega \in (-\pi, \pi]$.

$$\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

Είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2\pi}\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega)\underbrace{e^{j\omega n}}_{f(\omega)}d\omega = f(\omega)\Big|_{\omega=0} = f(0) = e^{j0n} = 1$$

Άρα

$$x[n] = 1, \ \forall n \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$$

Κατανομή Δέλτα:

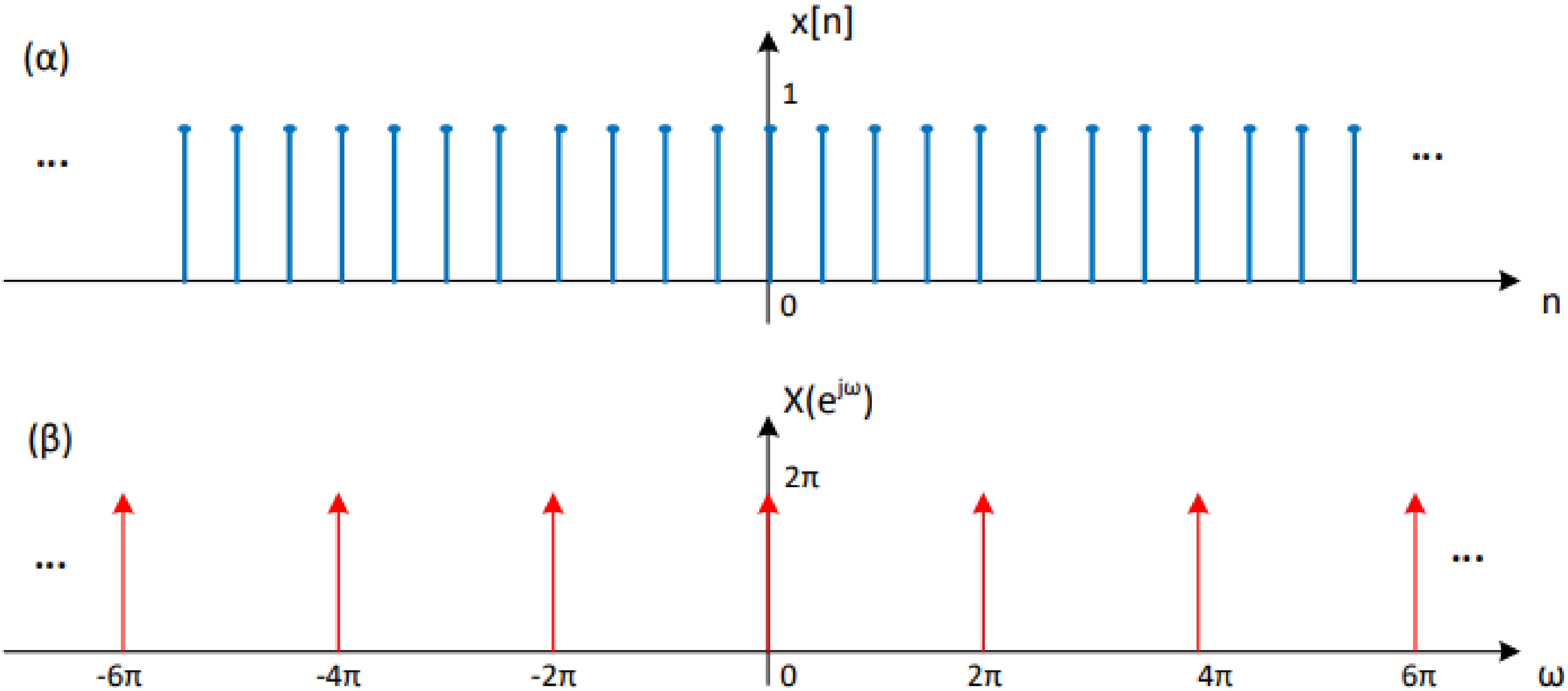
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx = 1$$

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου:

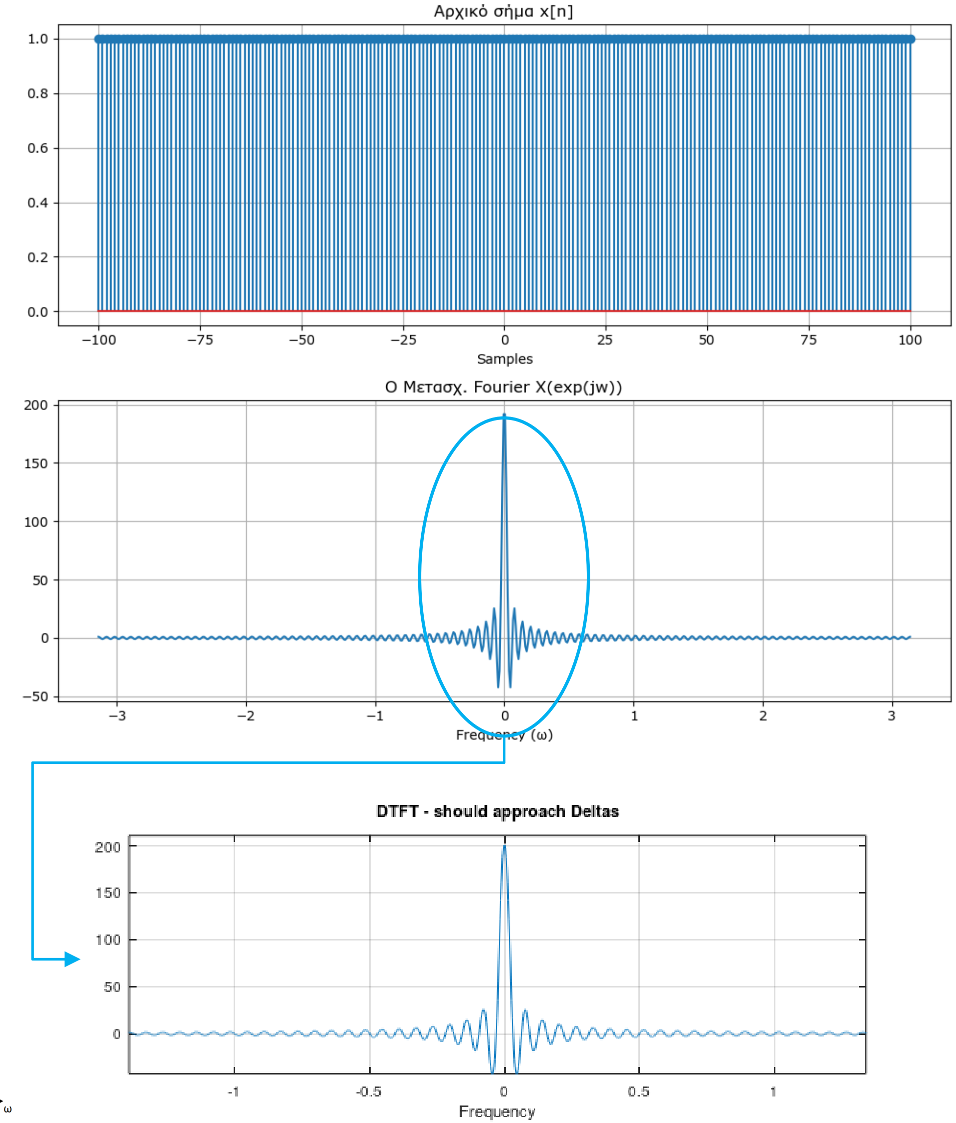
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

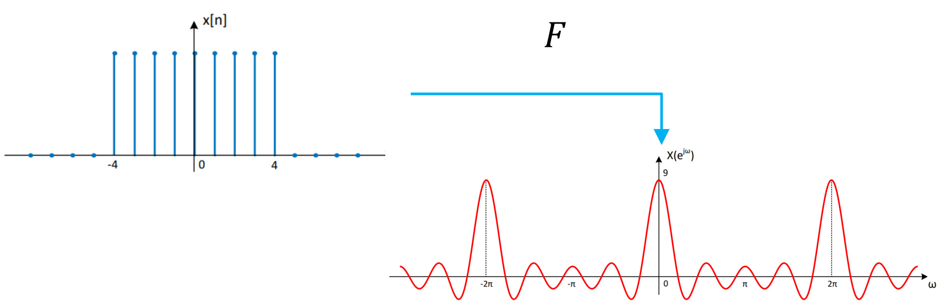
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-100, 101)
x = np.ones_like(n)

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
# Σύνθεση του σήματος X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = np.zeros_like(w)

# Άθροισμα του μετ. Fourier
for i in range(0, len(n)):
    X_syn = X_syn + x[i] * np.exp(-1j*w*n[i])

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].plot(w, X_syn)
axs[1].set_title('Ο Μετασχ. Fourier X(exp(jw))')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Frequency (ω)')
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \ \forall\, n, \ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

$$\int f(x)\,\delta(x) = f(0)$$

Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n} \longrightarrow \infty$$

Από πριν,

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega) \longrightarrow X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0), \text{ τότε}$$

$$x[n] = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2\pi}\,\delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega-\omega_0)\, \underbrace{e^{j\omega n}}_{f(\omega)}\, d\omega$$

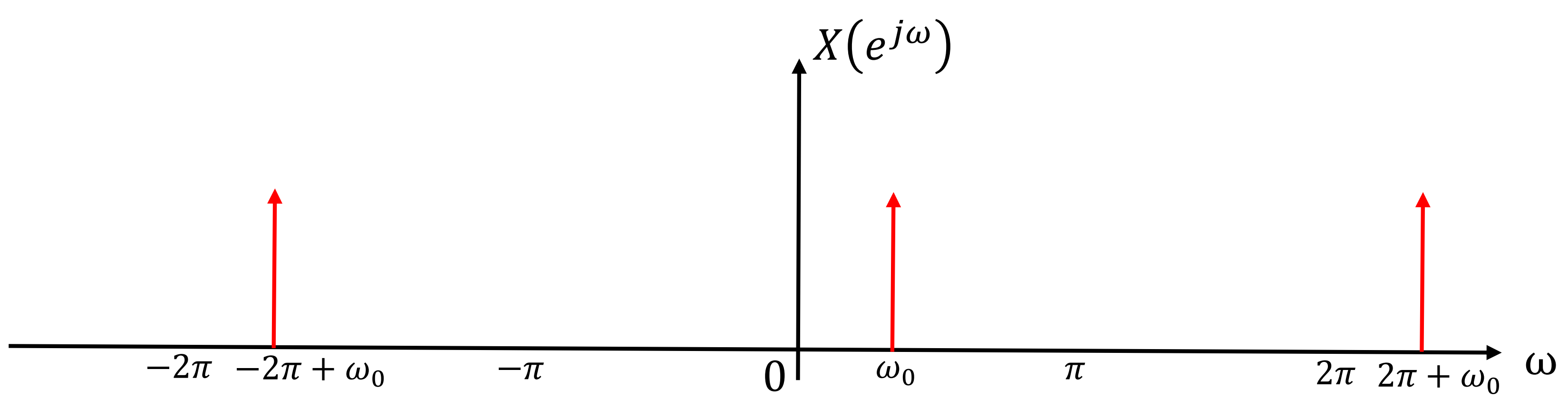
$$= f(\omega_0) = e^{j\omega n}\Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 n}$$

Άρα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \ \forall\, n \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n},\ \ \forall\, n,\ \ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

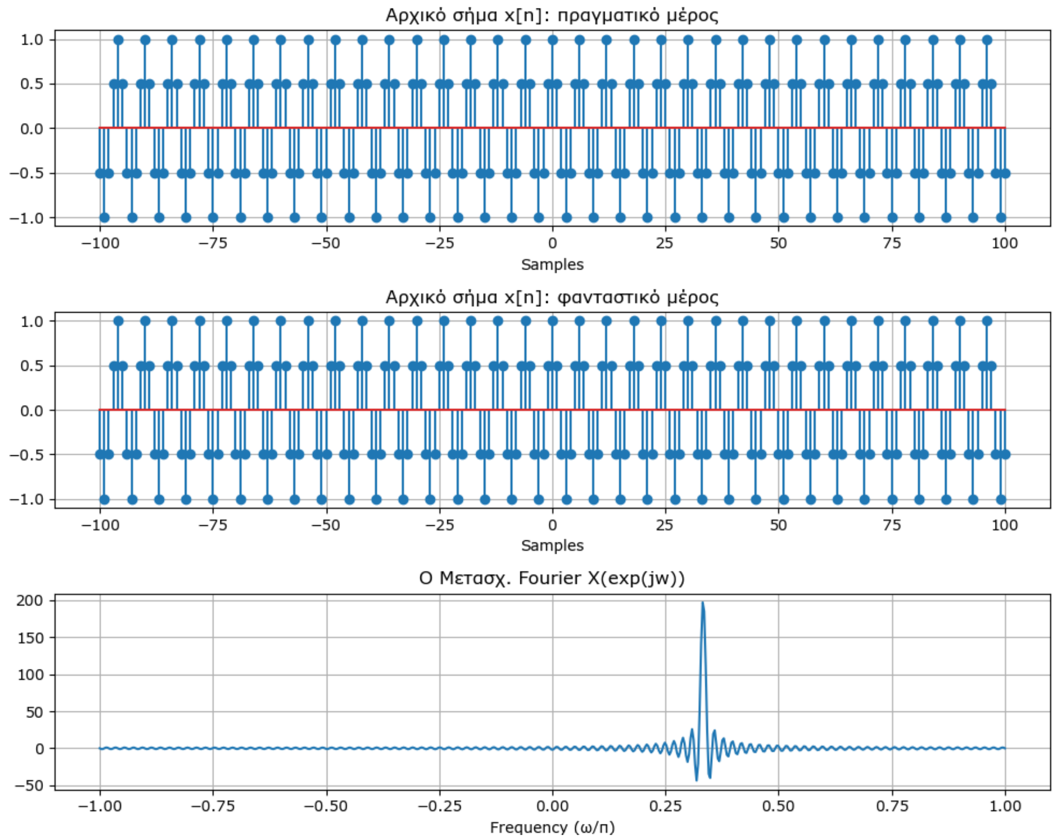
Άρα $\quad x[n] = e^{j\omega_0 n},\ \forall\, n \;\overset{F}{\longleftrightarrow}\; X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$



# • Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-100, 101)
w0 = np.pi/3
x = np.exp(1j*w0*n)

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
# Σύνθεση του σήματος X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = np.zeros_like(w)

# Άθροισμα του μετ. Fourier
for i in range(0, len(n)):
    X_syn = X_syn + x[i] * np.exp(-1j*w*n[i])

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]: πραγματικό μέρος')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x)
axs[1].set_title('Αρχικό σήμα x[n]: φανταστικό μέρος')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].plot(w/np.pi, X_syn)
axs[2].set_title('Ο Μετασχ. Fourier X(exp(jw))')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Frequency (ω/π)')
```



# • Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$ , $\forall\, n,\ \omega_0, \phi \in (-\pi, \pi]$.

Είναι

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) \overset{\text{Euler}}{=} \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$$

Είδαμε πριν ότι

$$e^{j\omega_0 n} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 n} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

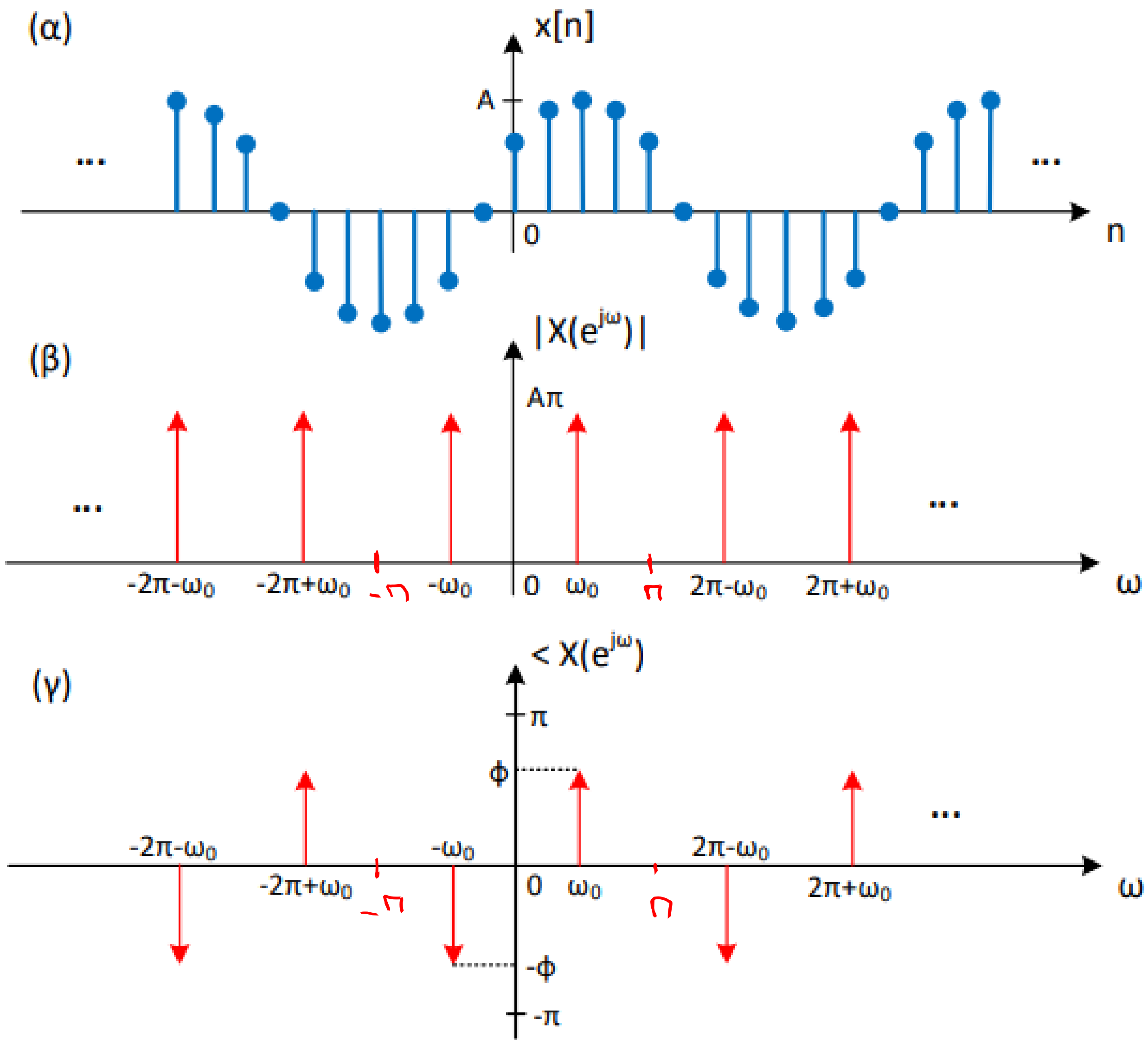
Άρα

$$X(e^{j\omega}) = F\{A\cos(\omega_0 n + \varphi)\} = \frac{A}{\cancel{2}} e^{j\varphi} \cancel{2}\pi\delta(\omega - \omega_0) +$$

$$+ \frac{A}{\cancel{2}} e^{-j\varphi} \cancel{2}\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

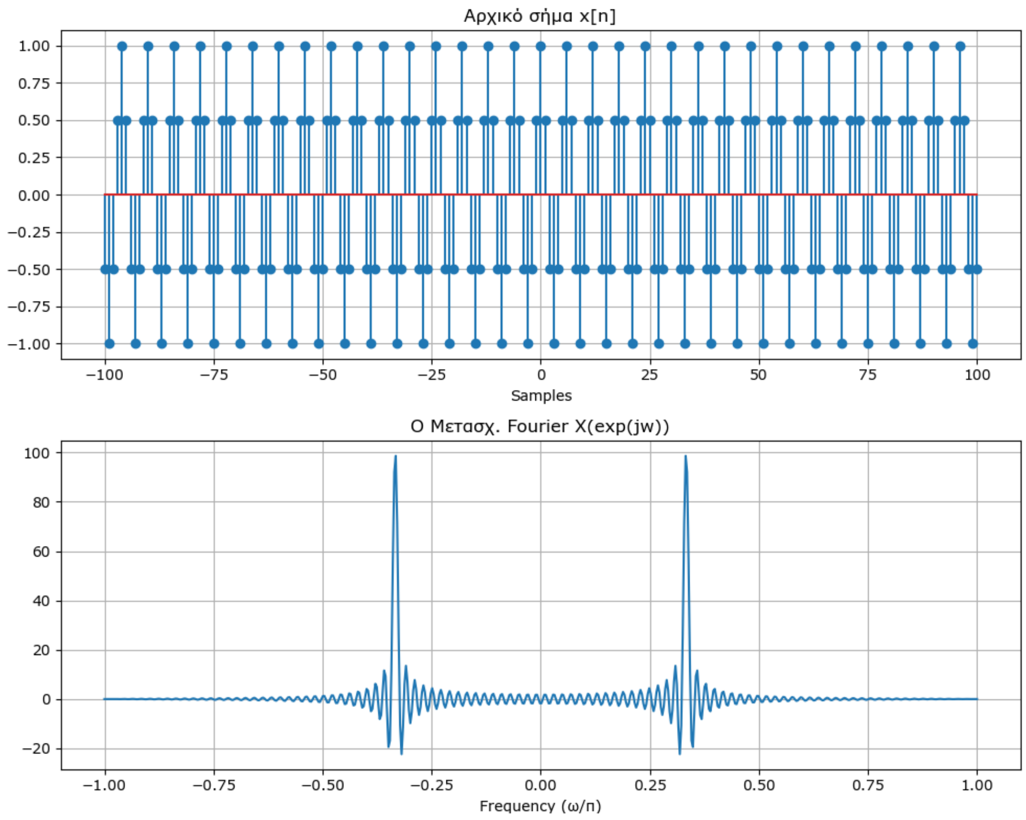
$$= A\pi e^{j\varphi}\delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi}\delta(\omega + \omega_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

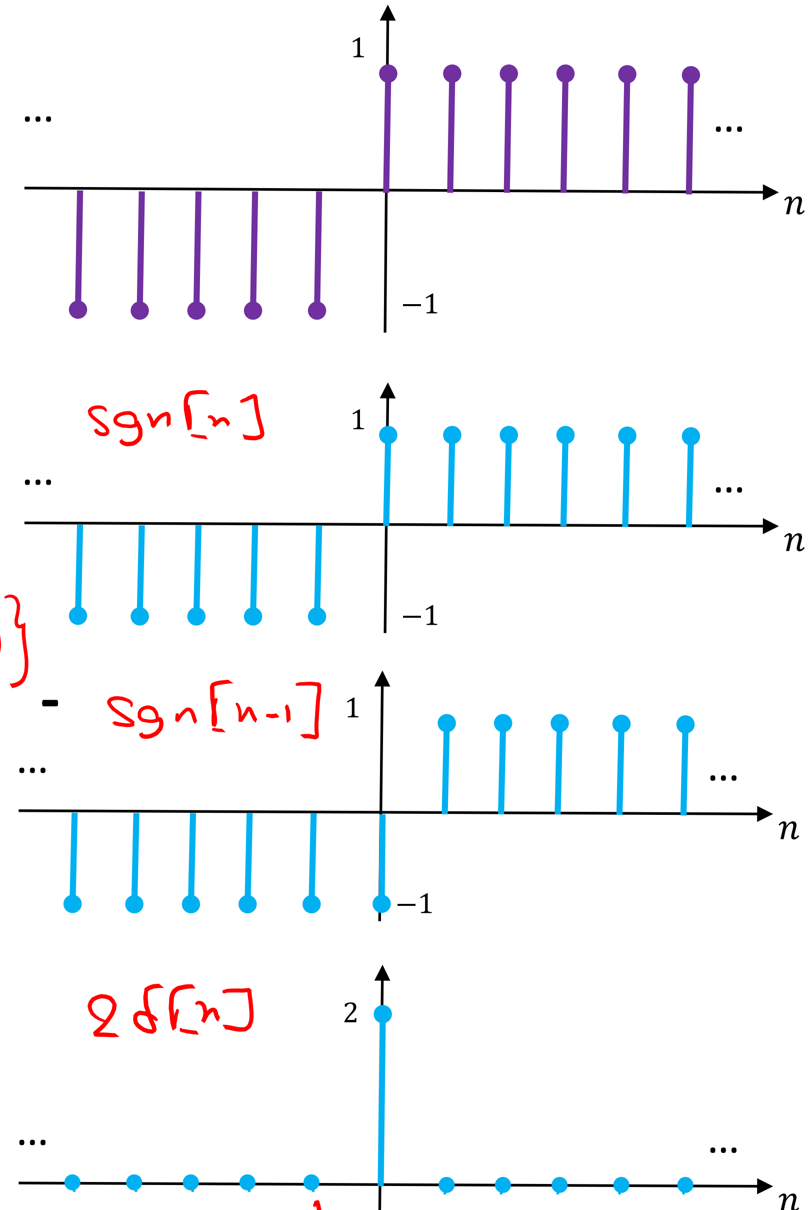


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-100, 101)
w0 = np.pi/3
x = np.cos(w0*n)

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
# Σύνθεση του σήματος X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = np.zeros_like(w)

# Άθροισμα του μετ. Fourier
for i in range(0, len(n)):
    X_syn = X_syn + x[i] * np.exp(-1j*w*n[i])

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].plot(w/np.pi, X_syn)
axs[1].set_title('Ο Μετασχ. Fourier X(exp(jw))')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Frequency (ω/π)')
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \mathrm{sgn}[n]$.




Από το σχήμα,

$$\mathrm{sgn}[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$

$\mathrm{sgn}[n] - \mathrm{sgn}[n-1] = 2\delta[n]$, και

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}[n]\} - \mathcal{F}\{\mathrm{sgn}[n-1]\} = \mathcal{F}\{2\delta[n]\}$$

$$S(e^{j\omega}) - Y(e^{j\omega}) = 2 \cdot 1 \quad (1)$$

Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}[n-1] e^{-j\omega n} =$$

$k = n-1 \Rightarrow n = k+1$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}[k] e^{-j\omega(k+1)} = e^{-j\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}[k] e^{-j\omega k} = e^{-j\omega} S(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

· Άρα $Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} S(e^{j\omega})$ ②

Η ① $\overset{②}{\Longrightarrow}$ $S(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} S(e^{j\omega}) = 2$

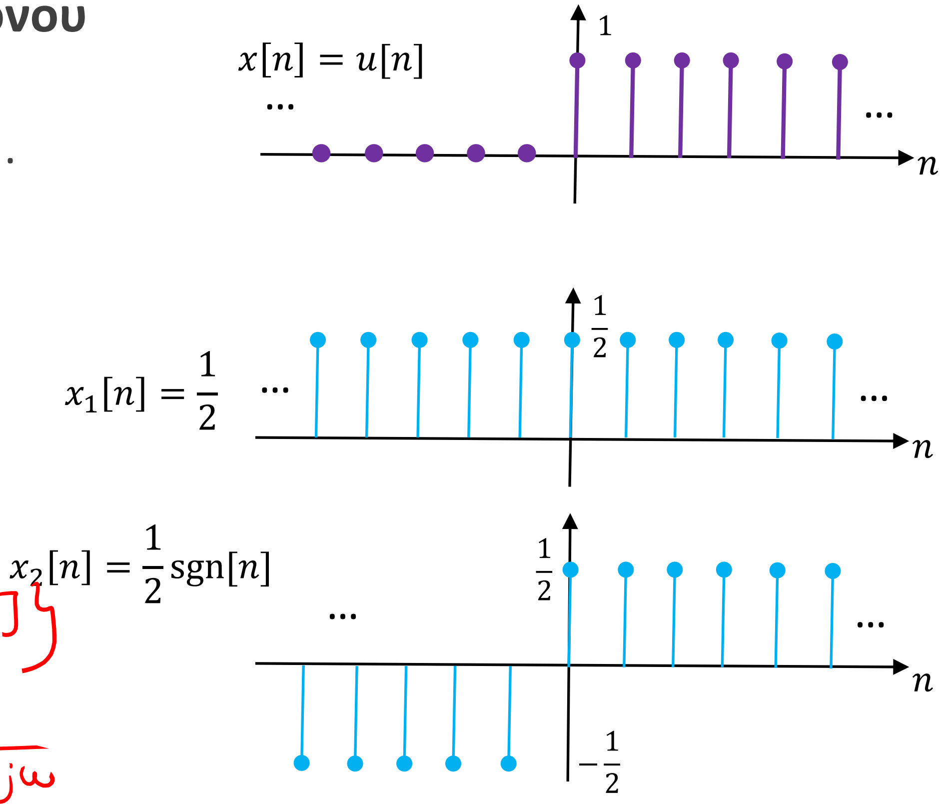
$$S(e^{j\omega})\left(1 - e^{-j\omega}\right) = 2$$

$$S(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - e^{-j\omega}}.$$

· Άρα

$$sgn[n] \xleftrightarrow{F} \frac{2}{1 - e^{-j\omega}}.$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = u[n]$.




Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n], \text{ και}$$

$$F\{u[n]\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\right\}$$

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

Άρα

$$u[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}.$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Οι σχέσεις ισχύουν για $-\infty < \omega < +\infty$

Για να πάρετε τις σχέσεις που αποδείξαμε ($-\pi < \omega < \pi$), θέστε $k = 0$ και βγάλτε τα αθροίσματα (όπου υπάρχουν)

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

| Ακολουθία | Μετασχ. Fourier |
|---|---|
| $\delta[n]$ | $1$ |
| $\delta[n-n_0]$ | $e^{-j\omega n_0}$ |
| $1$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$ |
| $a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$ | $\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ |
| $-a^n u[-n-1],\ \lvert a\rvert>1$ | $\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ |
| $u[n]$ | $\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$ |
| $-u[-n-1]$ | $\frac{1}{1-e^{-j\omega}}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$ |
| $(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$ | $\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$ |
| $a^{\lvert n\rvert},\ \lvert a\rvert<1,$ | $\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$ |
| $\frac{r^n\sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \lvert r\rvert<1$ | $\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$ |
| $\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$ | $X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$ |
| $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$ | $\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$ |
| $e^{j\omega_0 n}$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$ |
| $\cos(\omega_0 n+\phi)$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$ |
| $\sin(\omega_0 n+\phi)$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty}-j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$ |

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ