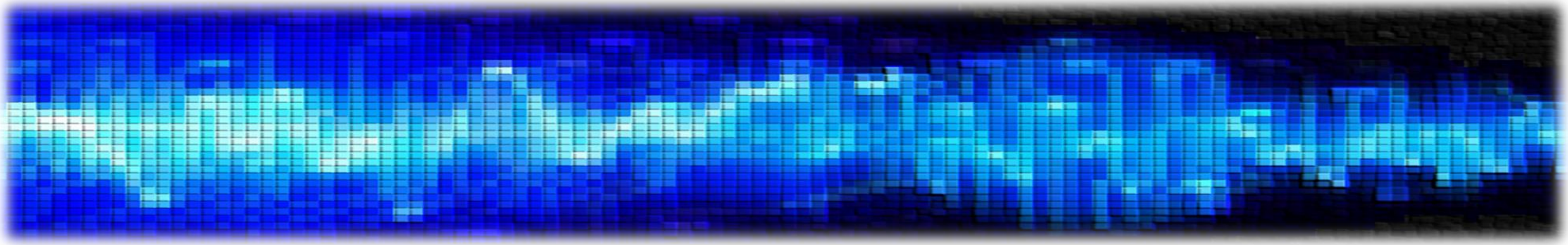
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 5Η



- Ευστάθεια και Αιτιατότητα ΓΧΑ συστημάτων
- Απόκριση σε Συχνότητα

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**

- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$

- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k

- Γενική μορφή (για απλές ρίζες)

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)
- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων
  - Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω κρουστικής απόκρισης $h[n]$
  - $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
  - Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα
- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή (για απλές ρίζες)

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_o[n-l]$$

- Zero-state response: η **<u>συνέλιξη</u>** της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Διατάξεις συστημάτων
  - Σε σειρά: $h_{total}[n] = h_1[n] * h_2[n]$
  - Παράλληλα: $h_{total}[n] = h_1[n] + h_2[n]$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το σύστημα της εικόνας, που αποτελείται από τα υποσυστήματα

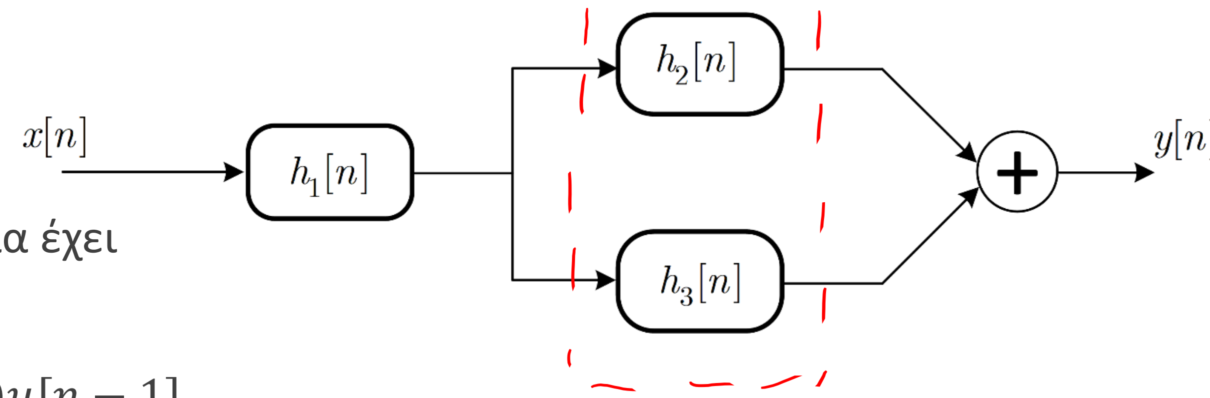
$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

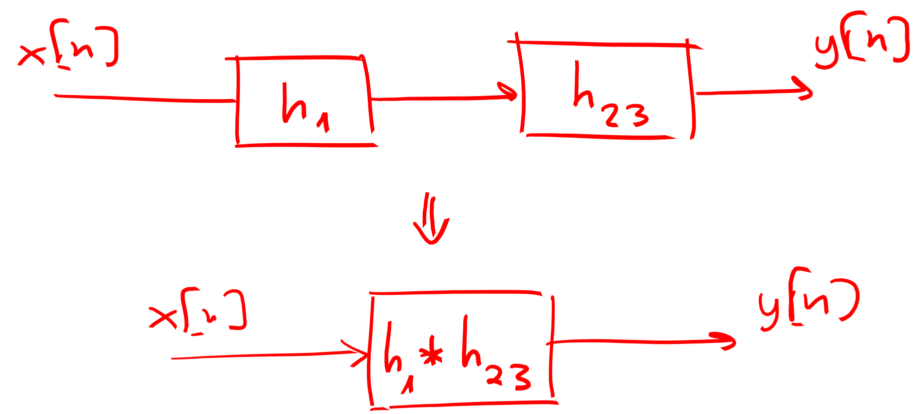
$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$

Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)u[n-1]$$

$h_{23} = h_2 + h_3$





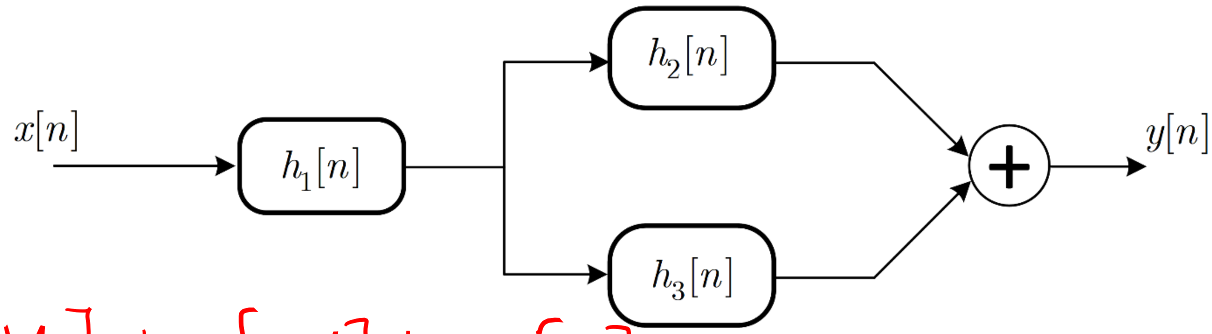
Η συνολική κρουστική απόκριση θα είναι:

$$h_{tot}[n] = h_1[n] * h_{23}[n]$$

$$= u[n-1] * \left(\delta[n+1] + nu[n]\right)$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$



Λύση.

$$h_{tot}[n] = u[n-1+1] + u[n-1] * nu[n]$$

$$= u[n] + \underbrace{u[n-1] * nu[n]}_{?} \quad (1)$$

Είναι

$$u[n-1] * nu[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k-1]\, k\, u[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\, u[k]\, u[n-k-1] \quad (2)$$

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

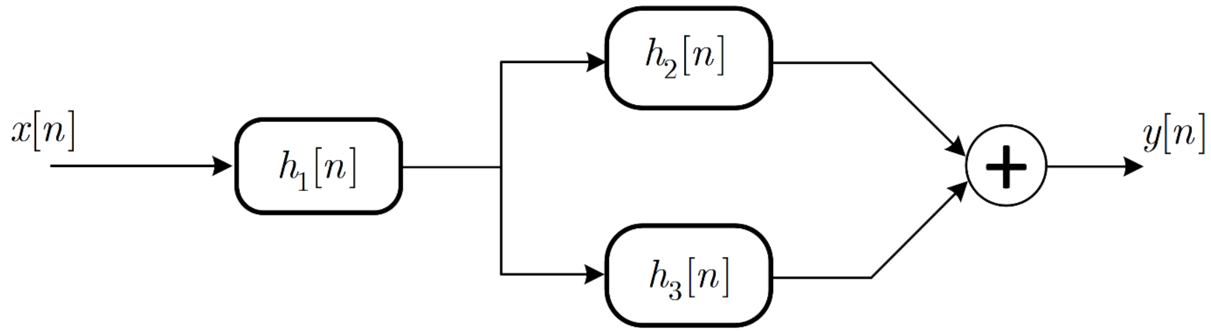
$$u[n-k-1] = \begin{cases} 1, & n-k-1 \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώ} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n-1 \\ 0, & \text{αλλιώ} \end{cases}$$

$u[k]u[n-k-1] = 1$, για

$$0 \leq k \leq n-1$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$



Η ② γράφεται ως

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \text{ για } n-1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1. \quad ③$$

Η ① $\overset{③}{\Longrightarrow}$ $h_{tot}[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)u[n-1]$

Άρα $h_{tot}[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)u[n-1]$

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Έχουμε συζητήσει για την έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος

$$|x[n]| \leq B_x \Rightarrow |y[n]| \leq B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Γνωρίζουμε ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Άρα θα πρέπει

$$|y[n]| \leq B_y \Rightarrow |x[n] * h[n]| \leq B_y \Rightarrow \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq B_y$$

- Ξέρουμε ότι $|x[n]| \leq B_x, \quad \forall\, n$, οπότε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| \leq B_y$$

- Η τελευταία σχέση ισχύει αν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Η σχέση

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

είναι ισοδύναμη με τη

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty}$$

Κρουστική απόκριση απολύτως αθροίσιμη

και η οποία αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ευστάθεια** ενός ΓΧΑ συστήματος

  - Δεν αποδεικνύουμε την αναγκαιότητα εδώ

- Η κρουστική απόκριση μπορεί να αποτελείται από όρους της μορφής

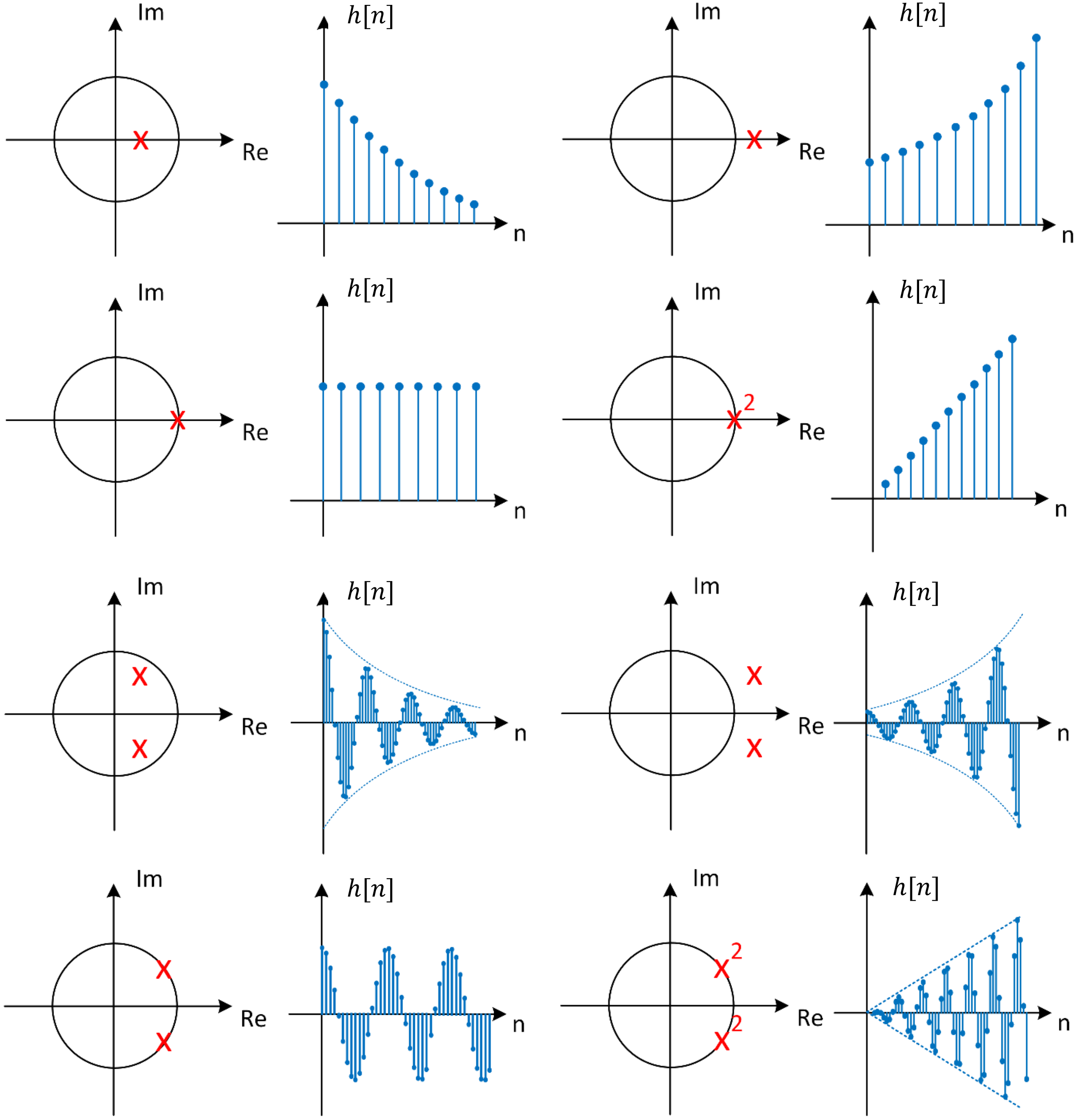
$$\delta[n-k], \gamma_k^n, n^k \gamma_k^n$$

- Προφανώς η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη αν και μόνον αν

$$\boxed{|\gamma_k| < 1, \quad \forall\, \gamma_k \in \mathbb{C} \;\Leftrightarrow\; \text{οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας!}}$$

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**

Παραδέιγματα θέσης χαρακτηριστικών ριζών και το αποτέλεσμα αυτών στην κρουστική απόκριση



Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

- Για δυο εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ και δυο αντίστοιχες εξόδους $y_1[n], y_2[n]$, το σύστημα θεωρείται αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \ \ \forall\, n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = y_2[n] \ \ \forall\, n < n_0$$

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε αυτό είναι αιτιατό, δηλ.

$$x[n] = 0, \qquad n < n_0 \ \Rightarrow \ y[n] = 0, \qquad n < n_0$$

- Αν θέλαμε να εκφράσουμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, ποια θα ήταν αυτή;
- Σκεφτείτε ότι ένα σύστημα αποκρίνεται την κρουστική του απόκριση $h[n]$ αν στην είσοδό του εμφανιστεί η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$
  - Όμως αυτή εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ και όχι νωρίτερα

- Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνον αν

$$\boxed{h[n] = 0, \qquad n < 0}$$

- **Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης ΓΧΑ Συστήματα**

- Αν η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ένα **FIR (Finite Impulse Response) σύστημα**

- Παρατηρήστε ότι στα FIR συστήματα, η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας – όπως «προδίδει» και το όνομά τους… ☺

- Αντίθετα, αν η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε τα συστήματα αυτά λέγονται **IIR (Infinite Impulse Response) συστήματα**.

- Ως τώρα μελετήσαμε τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου

- Είδαμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης Δέλτα $\delta[n]$ στην όλη διαδικασία εύρεσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παρ' όλα αυτά
  - Δεν έχουμε περισσότερη διαίσθηση του *γιατί* τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δεν ξέρουμε *πώς* να σχεδιάσουμε ένα σύστημα με μια επιθυμητή συμπεριφορά

- Στην προσπάθειά μας αυτή θα εφαρμόσουμε μια **διαφορετική** είσοδο στο σύστημα αντί της συνάρτησης Δέλτα
  - Ας δούμε που θα μας οδηγήσει αυτό…

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Καταλήξαμε στο ότι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

δηλ. η έξοδος είναι ίδια με την είσοδο $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, με τη διαφορά ότι έχει πολλαπλασιαστεί με τον (μιγαδικό εν γένει) αριθμό

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

- Έτσι, η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος

- Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί μας αποκαλύπτει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ στην έξοδό του, μεταβάλλοντάς τα πολλαπλασιαστικά με ένα μιγαδικό αριθμό

- Ας μελετήσουμε λίγο τη συνάρτηση της ιδιοτιμής

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

με

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Το άθροισμα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$|e^{j\theta}| = 1$

συγκλίνει ομοιόμορφα άραγε για κάθε κρουστική απόκριση $h[n]$?

- Αρκεί

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|h[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

αφού $|e^{j\omega n}| = 1, \;\; \forall\, \omega, n$

- Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως και αναγκαία
  - Θα πούμε περισσότερα αργότερα…

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Η συνάρτηση ως προς ω

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

δεδομένης της σημασίας της, δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα. Ονομάζεται

Απόκριση σε Συχνότητα
ή
Συχνοτική Απόκριση

(frequency response)

- Παρατηρήστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι μια πράξη που εμπλέκει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος

- Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι αν η κρουστική απόκριση είναι <u>πραγματική</u> συνάρτηση, η απόκριση σε συχνότητα είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση του ω

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

Απόκριση σε Συχνότητα

$f(x) = f(-x) \rightarrow$ άρτια συνάρτηση
$f(x) = -f(-x) \rightarrow$ περιττή συνάρτηση

- Η ιδιότητα

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{j\omega}\right)\right| = \left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\boldsymbol{\varphi_H}\left(\boldsymbol{e}^{j\omega}\right) = -\boldsymbol{\varphi_H}(\boldsymbol{e}^{-j\omega})$$

- Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

- Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις?

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}$, $A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
y[n] &= H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)}
\end{aligned}
$$

- Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

- Πώς μας βοηθά όλη αυτή η ανάλυση στο να καταλάβουμε περισσότερα για το πώς δουλεύουν τα συστήματα?
  - Ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

- Για είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με <u>πραγματική</u> κρουστική απόκριση

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta)}, \qquad A \in \Re_+$$

θα έχουμε

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j\left(\omega_0 n+\theta-\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right)}$$

- Όμως

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_H(e^{-j\omega})$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Άρα

$$y[n] = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{A}{2} e^{j\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{A}{2} e^{-j\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)}$$
$$= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}\left(e^{j\omega}\right)}$$

πολική μορφή της $H(e^{j\omega})$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = C + A\cos(\omega_0 n + \theta) = C\cos(0n) + A\cos(\omega_0 n + \theta)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = CH(e^{j0}) + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| A\cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Ξανά από τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε ένα άθροισμα ημιτόνων ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων!

  - Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^{N} |H\left(e^{j\omega_k}\right)| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

Απόκριση σε Συχνότητα

- Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος

- Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο 2π!

- Πράγματι

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{j\omega}e^{j2\pi}\right) = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

- Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του ω, δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π
  - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της

- Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
  - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συχνοτητες ωn με συντελεστές $h[n]$
  - Τα εκθετικά αυτά είναι 2π-περιοδικά στη συχνότητα

- Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

1ος τρόπος: $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$

$y[n] = x[n-n_0] \rightsquigarrow h[n] = \delta[n-n_0]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0] e^{-j\omega n}$

$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$

$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$

$= \cos(-\omega n_0) + j\sin(-\omega n_0)$

~ Πραγματικό μέρος: $H_R(e^{j\omega}) = \cos(-\omega n_0) = \cos(\omega n_0)$

~ Φανταστικό —"— $H_I(e^{j\omega}) = \sin(-\omega n_0) = -\sin(\omega n_0)$

~ Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = 1$, γιατί $|e^{-j\omega n_0}| = 1$.

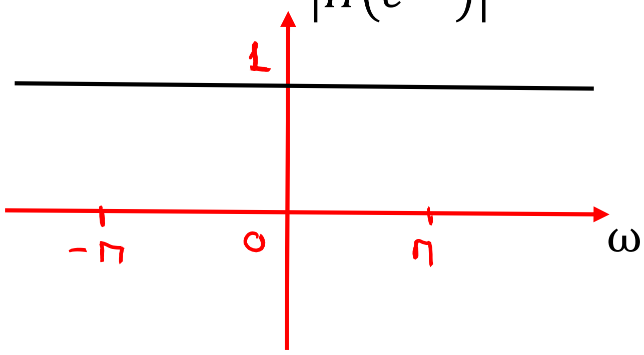
~ Απόκριση φάσης: $\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(H_I(e^{j\omega}) / H_R(e^{j\omega})) =$

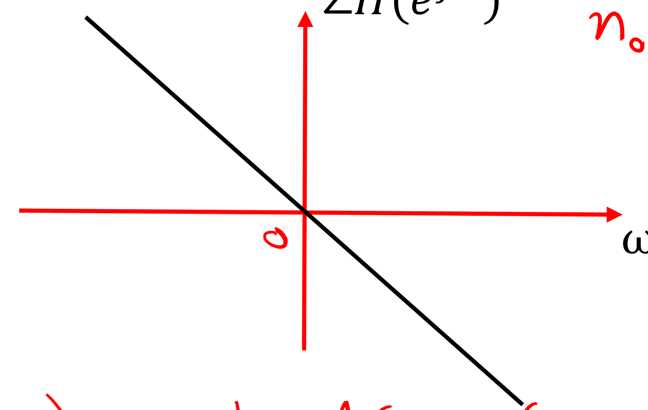
Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:

$|H(e^{j\omega})|=1$ $\qquad$ $\measuredangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$

$n_0 > 0$





$$= \tan^{-1}\frac{-\sin(\omega n_0)}{\cos(\omega n_0)} = \tan^{-1}(-\tan(\omega n_0)) = -\tan^{-1}(\tan(\omega n_0))$$

$$= -\omega n_0 \Rightarrow \varphi_H(e^{j\omega}) = -\omega n_0 .$$

Έστω $x[n] = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8}\right)$, με $n_0 = 5$

Η έξοδος θα είναι

$$y[n] = 4\cdot \cancelto{1}{|H(e^{j\frac{\pi}{3}})|} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8} + \cancelto{=-5\frac{\pi}{3}}{\measuredangle H(e^{j\frac{\pi}{3}})}\right)$$

$$= 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{3}\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

2ος τρόπος: Το σήμα $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση των ΓΧΑ συστημάτων. Άρα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{S} y[n] = x[n-n_0] = e^{j\omega_0 (n-n_0)}$$

$$= \underbrace{e^{-j\omega_0 n_0}}_{\text{ιδιοτιμή}} \underbrace{e^{j\omega_0 n}}_{\text{είσοδος}}$$

$$= H(e^{j\omega_0})\, x[n]$$

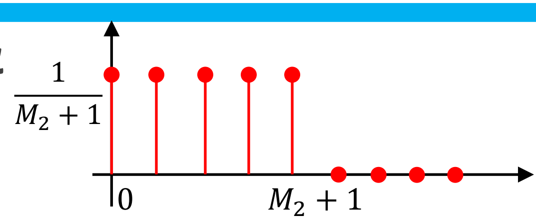
$H_R(e^{j\omega})$ $\quad$ $H_I(e^{j\omega})$

Άρα $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} = \cos(-\omega n_0) + j\sin(-\omega n_0) = \cos(\omega n_0) - j\sin(\omega n_0)$.

- Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\cos^2(\omega n_0) + (-\sin(\omega n_0))^2} = 1$
- Απόκριση φάσης: η $H(e^{j\omega})$ είναι γραμμένη σε πολική μορφή! Άρα

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \varphi_H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1 = 0$, δηλ. $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Είναι

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} \overset{*}{=} \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{e^{-j\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \cdot \frac{\left(e^{j\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)} - e^{-j\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)}\right)}{\left(e^{+j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\cancel{2j} \sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\cancel{2j} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \frac{\sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

*Hint: $1 + e^{j(a+b)} = e^{j\frac{a+b}{2}}\left(e^{-j\frac{a+b}{2}} + e^{j\frac{a+b}{2}}\right)$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Απόκριση πλάτους: $$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \underbrace{\left|e^{-j\omega\frac{M_2}{2}}\right|}_{1} \cdot \left| \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| = \frac{1}{M_2+1} \left| \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|.$$

Ας επιλέξουμε το $[0, 2\pi)$ για τη μελέτη της απόκρισης πλάτους.

Για $\omega = 0$, υπάρχει απροσδιοριστία (το ίδιο και για $\omega = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$)

Είναι $$\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \overset{DL'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{\omega \to 0} \frac{\frac{M_2+1}{2}\cos\left(\omega\frac{M_2+1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = M_2+1.$$

Σημεία μηδενισμού: εκεί που μηδενίζεται ο αριθμητής, δηλ.

$$\sin\left(\omega\frac{M_2+1}{2}\right) = 0 = \sin(\pi k) \Rightarrow \omega_k \frac{M_2+1}{2} = \pi k \Rightarrow \omega_k = \frac{2\pi k}{M_2+1},\ k \in \mathbb{Z}$$

εκτός από τα ω_k που παίρνουμε για $k = \lambda(M_2+1),\ \lambda \in \mathbb{Z}$.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Έστω $M_2 = 4$, τότε $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$.

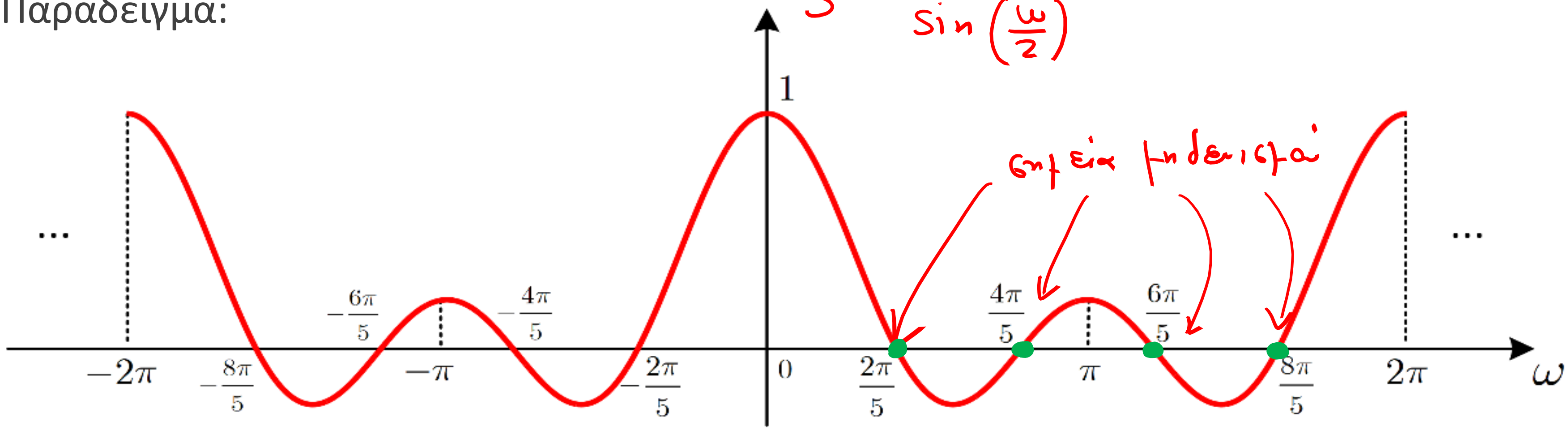
Πώς μοιάζει?

Είναι μια συνάρτηση του ω, πάντα θετική, με σημεία μηδενισμού τις συχνότητες $\omega_k = \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$ (εκτός από τα ω_k που είναι ακριβώς πολλαπλάσια του 2π, όπου εκεί η συνάρτηση παίρνει την τιμή 1).

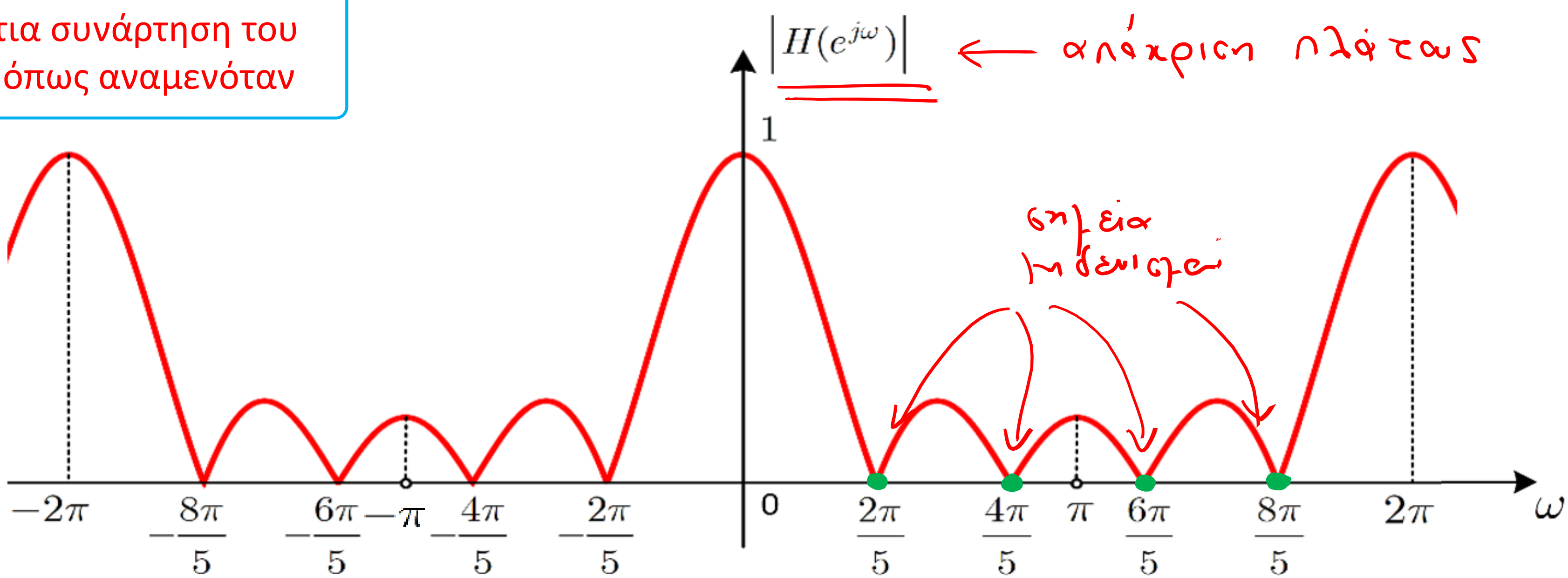
Ας ζητήσουμε από την Python να τη σχεδιάσει για μας.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



Άρτια συνάρτηση του ω, όπως αναμενόταν



- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Hint: αν $z_1 z_2$, $\angle z_1 z_2 = ?$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{j(\phi_1+\phi_2)} \Rightarrow \angle z_1 z_2 = \phi_1 + \phi_2$$

Απόκριση φάσης:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

: συχνοτική απόκριση

Είναι

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \varphi_H(e^{j\omega}) = \measuredangle \frac{1}{M_2+1} + \measuredangle e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} + \measuredangle \frac{\sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$= \underset{\varphi_1}{\emptyset} + \underset{\varphi_2}{\left(-\frac{\omega M_2}{2}\right)} + \underset{\varphi_3}{?}$$

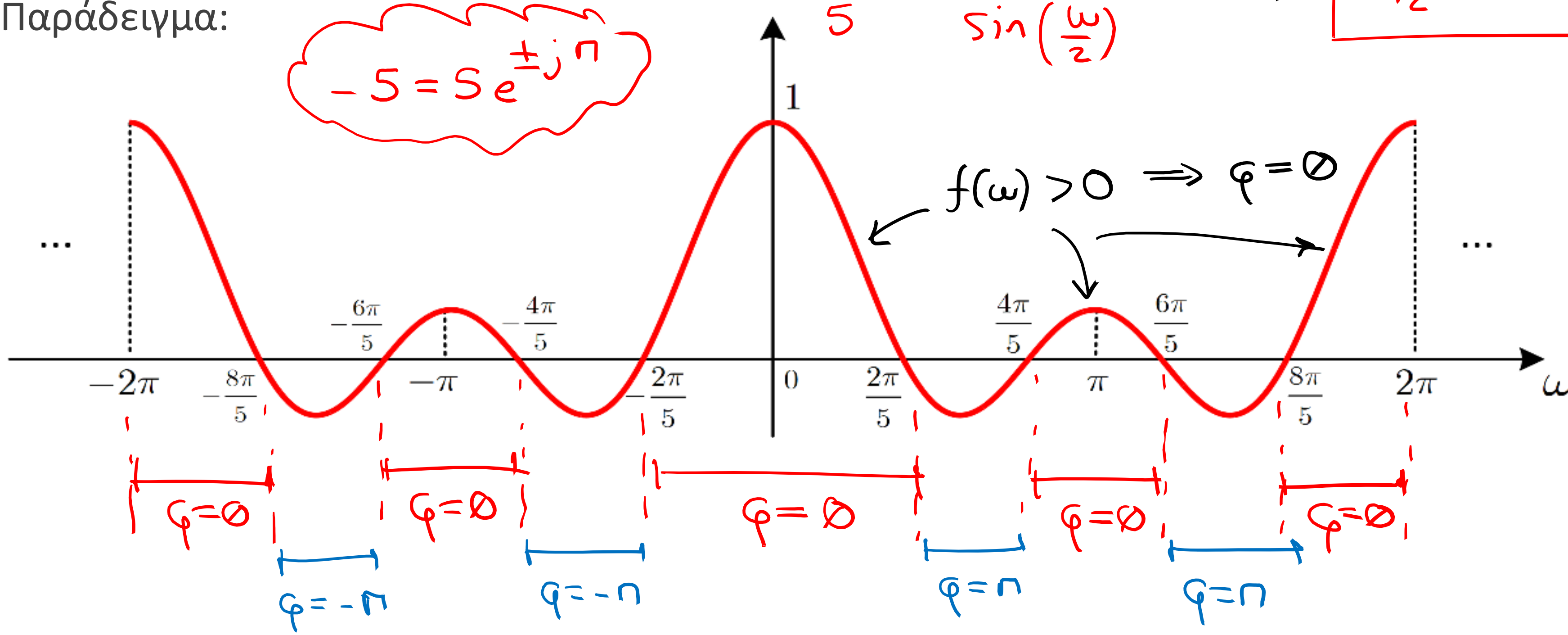
Πρέπει να βρούμε τη φάση του

$$\frac{\sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

!

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = f(\omega) \qquad \boxed{M_2 = 4}$$



$$\varphi_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\omega| < \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5} < |\omega| < \frac{6\pi}{5},\ \frac{8\pi}{5} < |\omega| < 2\pi \\ \pi, & \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -\pi, & -\frac{4\pi}{5} < \omega < -\frac{2\pi}{5},\ -\frac{8\pi}{5} < \omega < -\frac{6\pi}{5} \end{cases}$$

Σύμβαση: αν $\omega > 0$ και $f(\omega) < 0$, τότε $\varphi = \pi$, ειδάλλως $\varphi = -\pi$.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$M_2 = 4$

Συνολικά, (στο $[-2\pi, 2\pi]$):

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \varphi_1(e^{j\omega}) + \varphi_2(e^{j\omega}) + \varphi_3(e^{j\omega})$$

$$= 0 \;-\; 2\omega \;+\; \begin{cases} 0, & \dots \\ \pi, & \dots \\ -\pi, & \dots \end{cases}$$

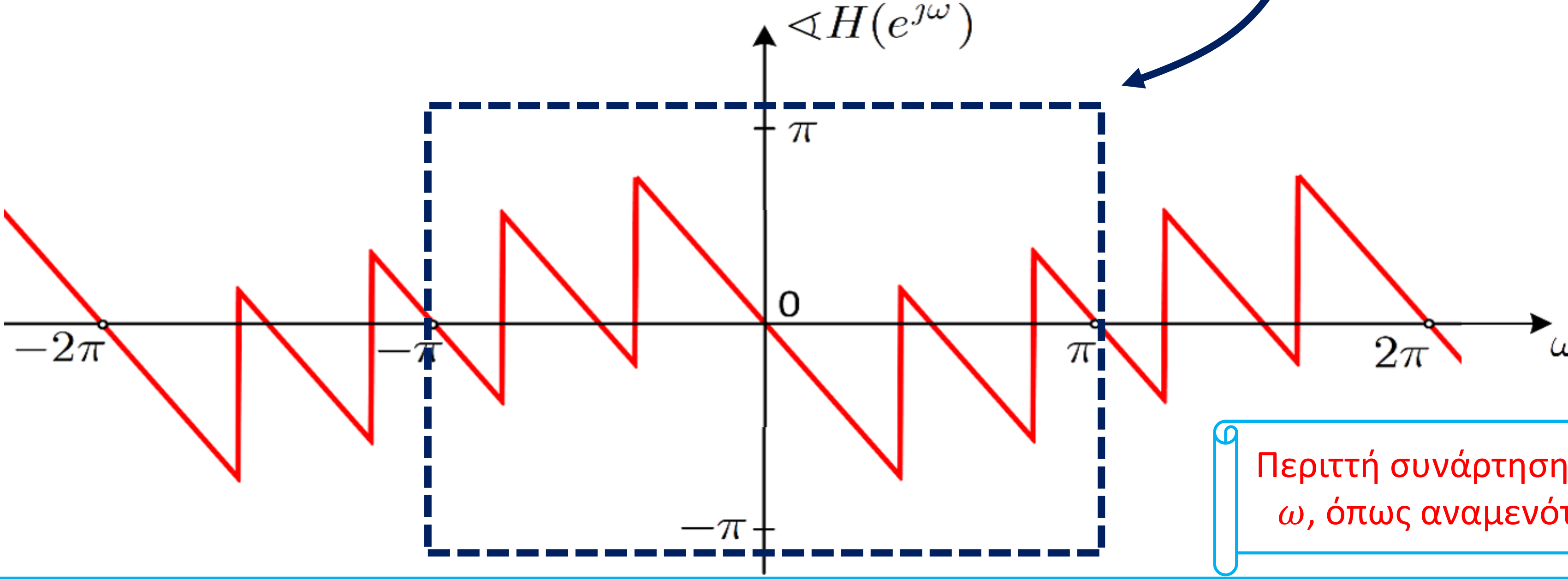
$$= \begin{cases} -2\omega, & \dots \\ \pi - 2\omega, & \dots \\ -\pi - 2\omega, & \dots \end{cases}$$

$M_2 = 4$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

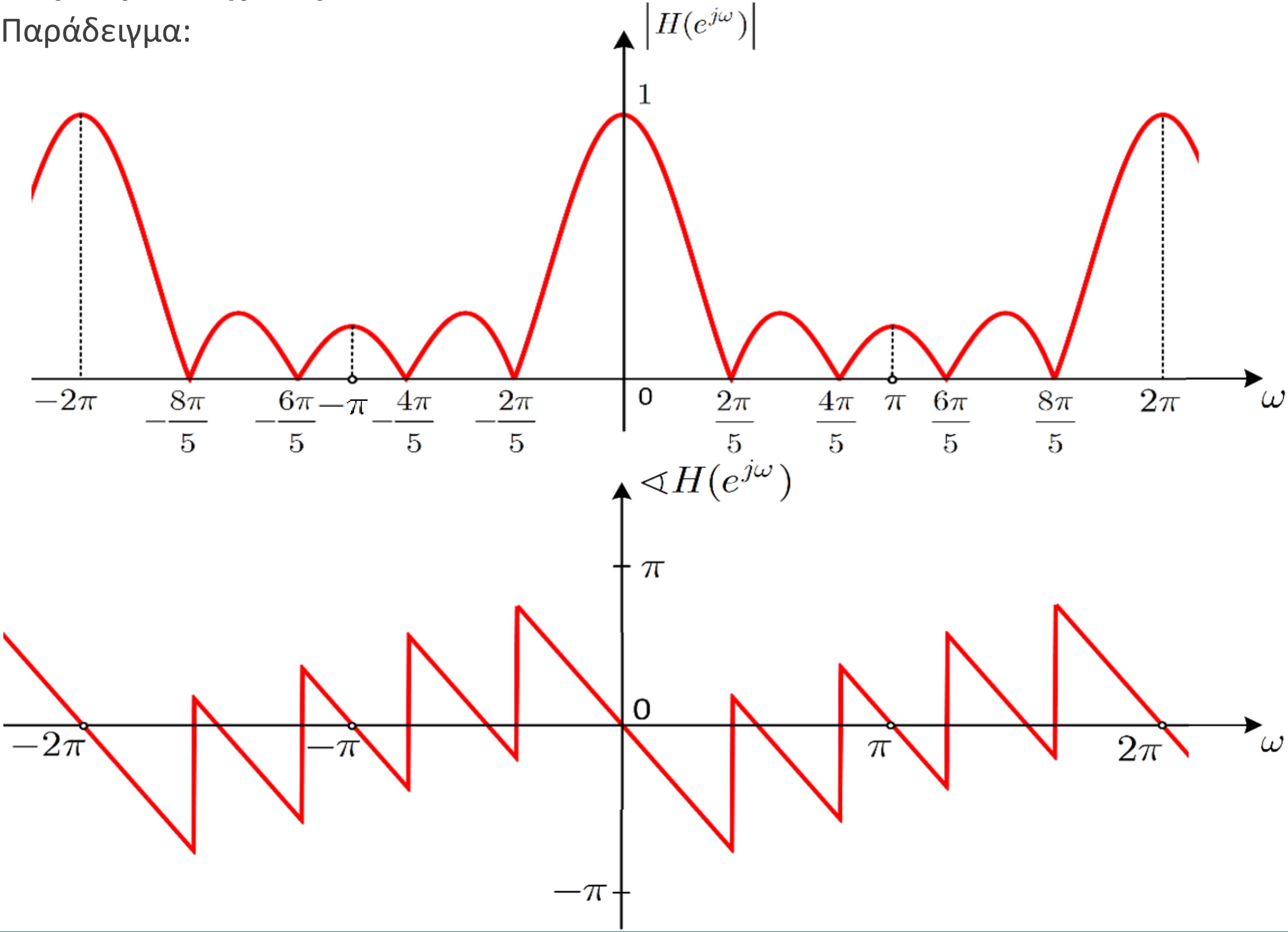
Μας αρέσει να γράφουμε τη φάση στο $(-\pi, \pi]$, οπότε θα είναι:

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega, & |\omega| < \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5} < |\omega| < \pi \\ \pi - 2\omega, & \frac{2\pi}{5} < |\omega| < \frac{4\pi}{5} \\ -\pi - 2\omega, & -\frac{4\pi}{5} < \omega < -\frac{2\pi}{5} \end{cases}$$



Περιττή συνάρτηση του ω, όπως αναμενόταν

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ως τώρα μελετήσαμε την είσοδο της μορφής

$$e^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα

  - Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) **δεν** υπάρχουν στην πραγματικότητα

  - Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει <u>ακριβώς</u> στην πράξη

  - Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα

  - Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα **<u>αιτιατό</u>** ΓΧΑ σύστημα
    - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$

  - Το σήμα αυτό θα είναι το

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

- Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

- Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} \\ &= H\left(e^{j\omega n}\right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

- Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$y[n] = H(e^{j\omega n})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$
$$= y_{ss}[n] + y_t[n]$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης

- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
  - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;

- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό…

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$|y_t[n]| = \left|\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]|\left|\overset{1}{\cancel{e^{j\omega(n-k)}}}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε δυο πράγματα:

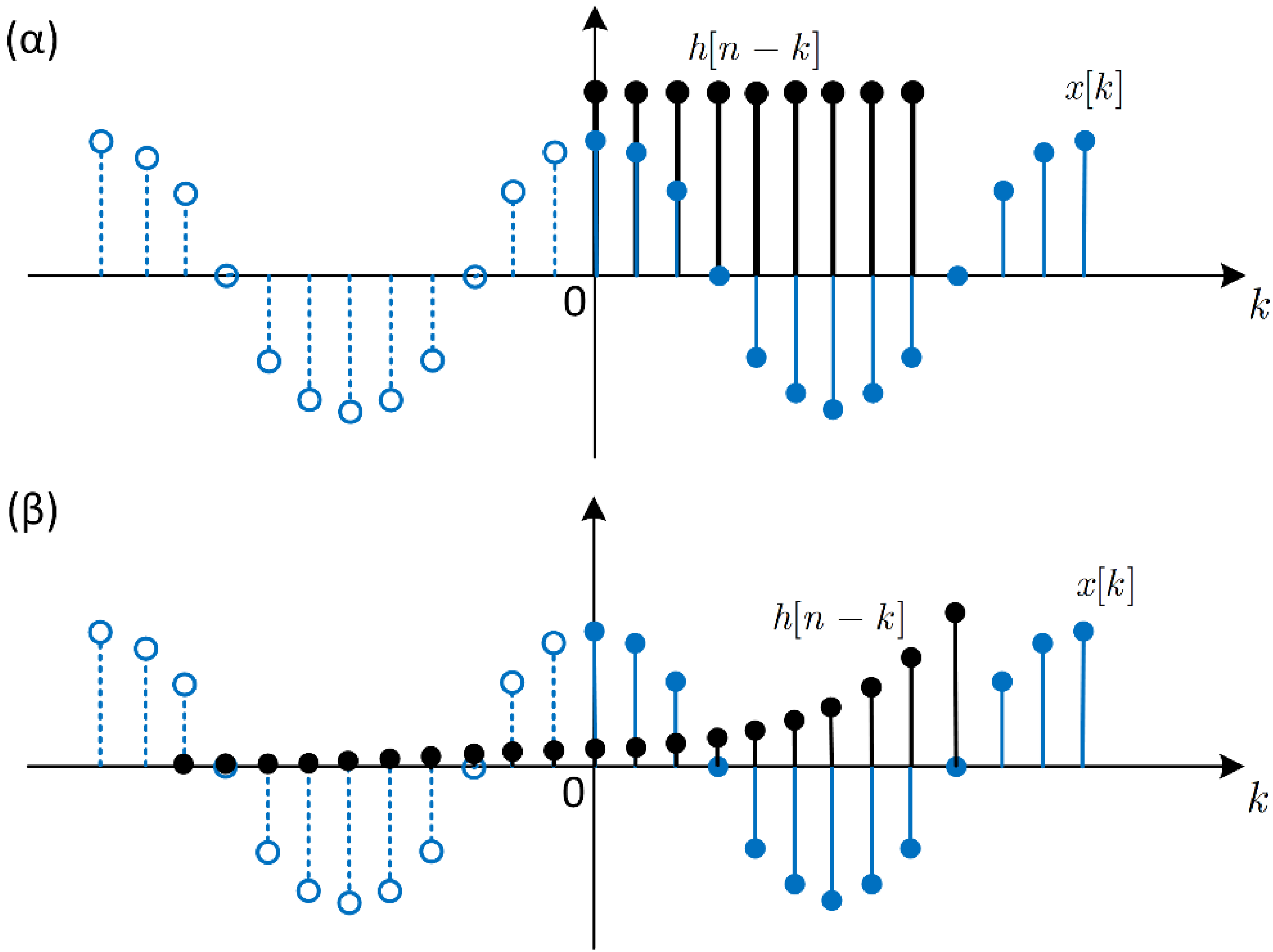
1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε

$$h[n] \neq 0, \qquad 0 \leq n \leq M$$

τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \to +\infty$
   - Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**



• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

- Ας υλοποιήσουμε στην Python το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος για μια συχνότητα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

δηλ. για το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

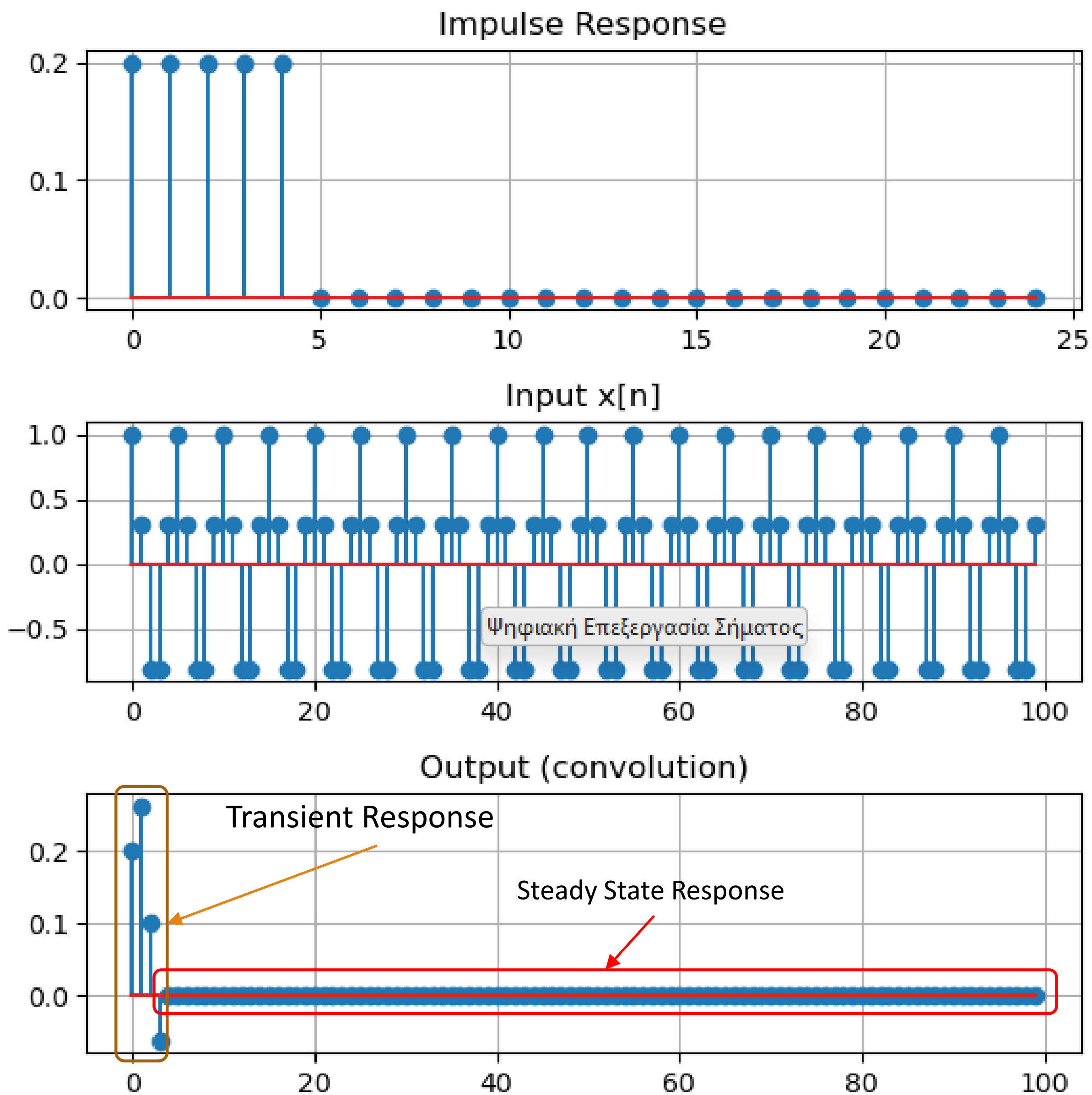
με $M_1 = 0, M_2 = 4$.

- Αναμένουμε από την προηγούμενη ανάλυση μας ότι η έξοδος θα είναι μηδενική, γιατί η συχνότητα $2\pi/5$ «πέφτει» πάνω σε μηδενισμό της απόκρισης πλάτους!
  - Άρα η έξοδος θα πολλαπλασιάσει το πλάτος της ($A = 1$) με τον αριθμό μηδέν!

- Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και λίγο αργότερα την απόκριση σταθερής κατάστασης (που ισούται με το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης-ιδιοτιμής που έχουμε μάθει), αφού το ημίτονο ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Impulse response h[n]
M1 = 0
M2 = 4
h = 1/(M1 + M2 + 1) * np.ones((M2+1))
h = np.hstack((h, np.zeros((20))))
nh = np.arange(0, 25)

# Input signal
omega0 = 2*np.pi/5
nx = np.arange(0, 100)
x = np.cos(omega0 * nx)

# Convolution
y = np.convolve(x, h, mode='full')
ny = np.arange(0, 124)

# Plots
# Create a figure with 3 subplots in 3 rows
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(6, 6))

# First subplot
axs[0].stem(nh, h)
axs[0].set_title('Impulse Response')
axs[0].grid()

# Second subplot
axs[1].stem(nx, x)
axs[1].set_title('Input x[n]')
axs[1].grid()

# Third subplot
axs[2].stem(ny[0:100], y[0:100])
axs[2].set_title('Output (convolution)')
axs[2].grid()

# Adjust layout for better spacing
plt.tight_layout()
```



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ