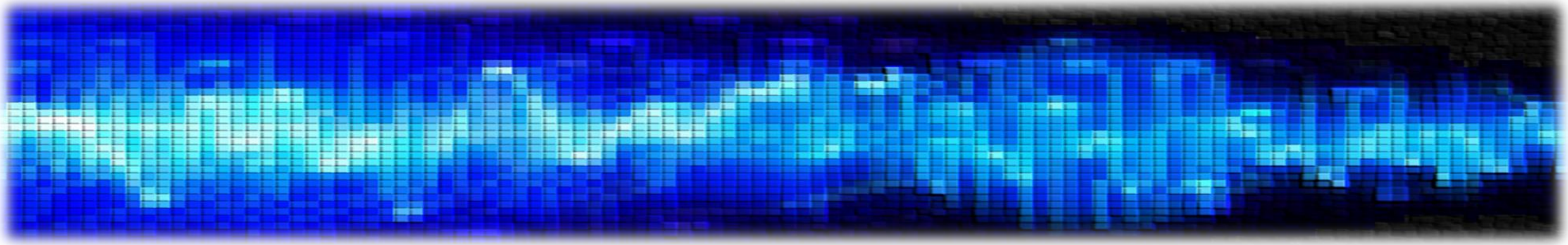
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**

- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**

- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)

- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων
  - Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω κρουστικής απόκρισης $h[n]$
  - $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
  - Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα

- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ($a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N$)

- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k

- Γενική μορφή

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_o[n-l]$$

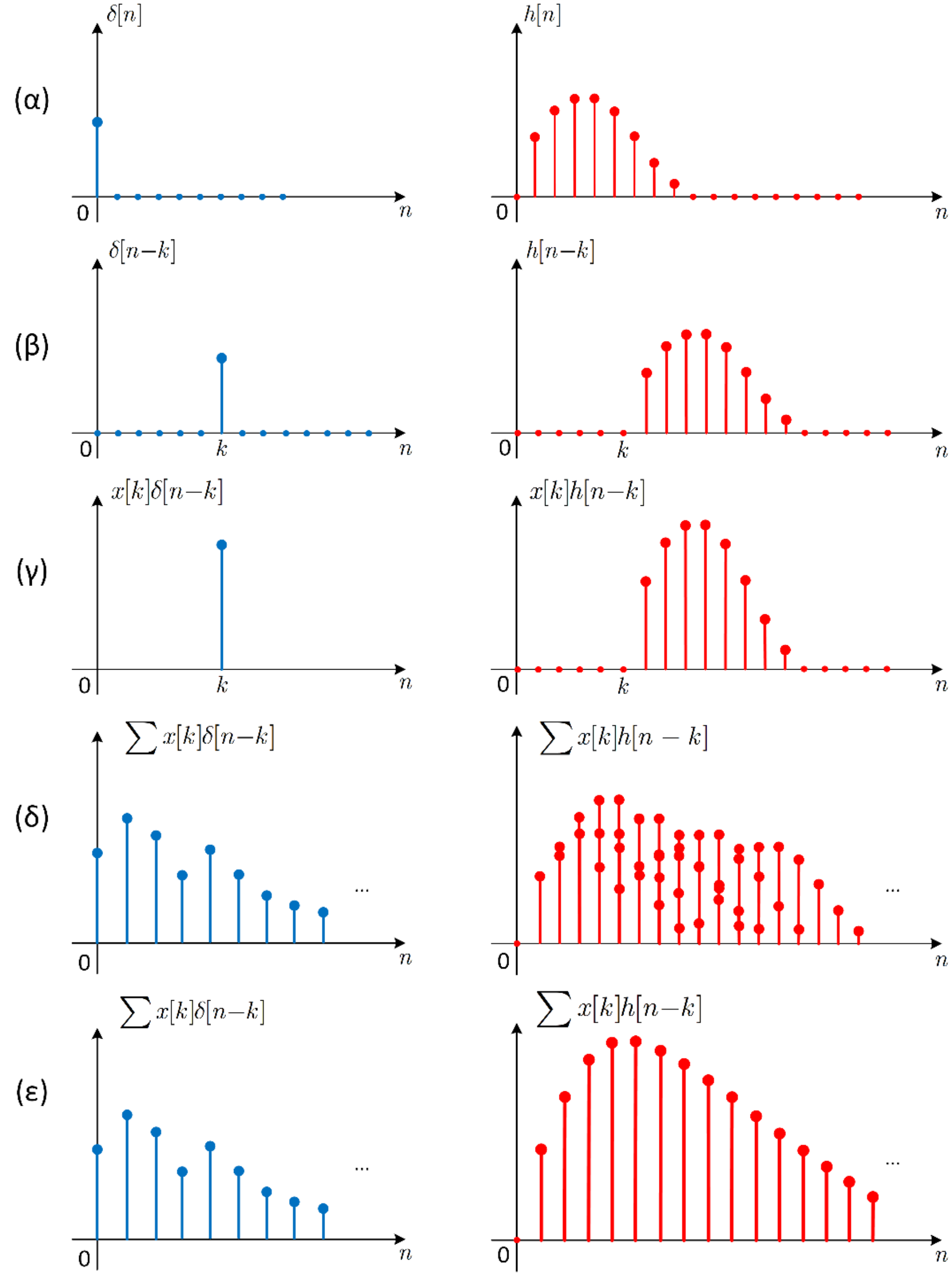
- Η κρουστική απόκριση περιγράφει πλήρως ένα ΓΧΑ σύστημα
- Ας δούμε γιατί…

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**
  - Παρ' όλο που βρήκαμε την κρουστική απόκριση οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος, πως αυτή βοηθά στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
  - Θυμηθείτε ότι κάθε σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

  - Άρα

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= T\{x[n]\} \\ &= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} && \boxed{\text{Γραμμικότητα (αθροιστικότητα)}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} && \boxed{\text{Γραμμικότητα (ομογένεια)}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] && \boxed{\text{Χρον. Αμεταβλητότητα}} \end{aligned}$$



Χρον. Αμεταβλητότητα

Γραμμικότητα (ομογένεια)

Γραμμικότητα

Γραμμικότητα

- **Συνέλιξη**

  - Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι <u>εξαιρετικά</u> σημαντικό

  - Η πράξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] * \boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$$

είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάλυση συστημάτων και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: **συνέλιξη (convolution)**

  - Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί και ως ξεχωριστή πράξη, έξω από το πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων

  - Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δυο σημάτων $x[n], y[n]$ που δε σχετίζονται απαραίτητα με ένα σύστημα

- **Συνέλιξη**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

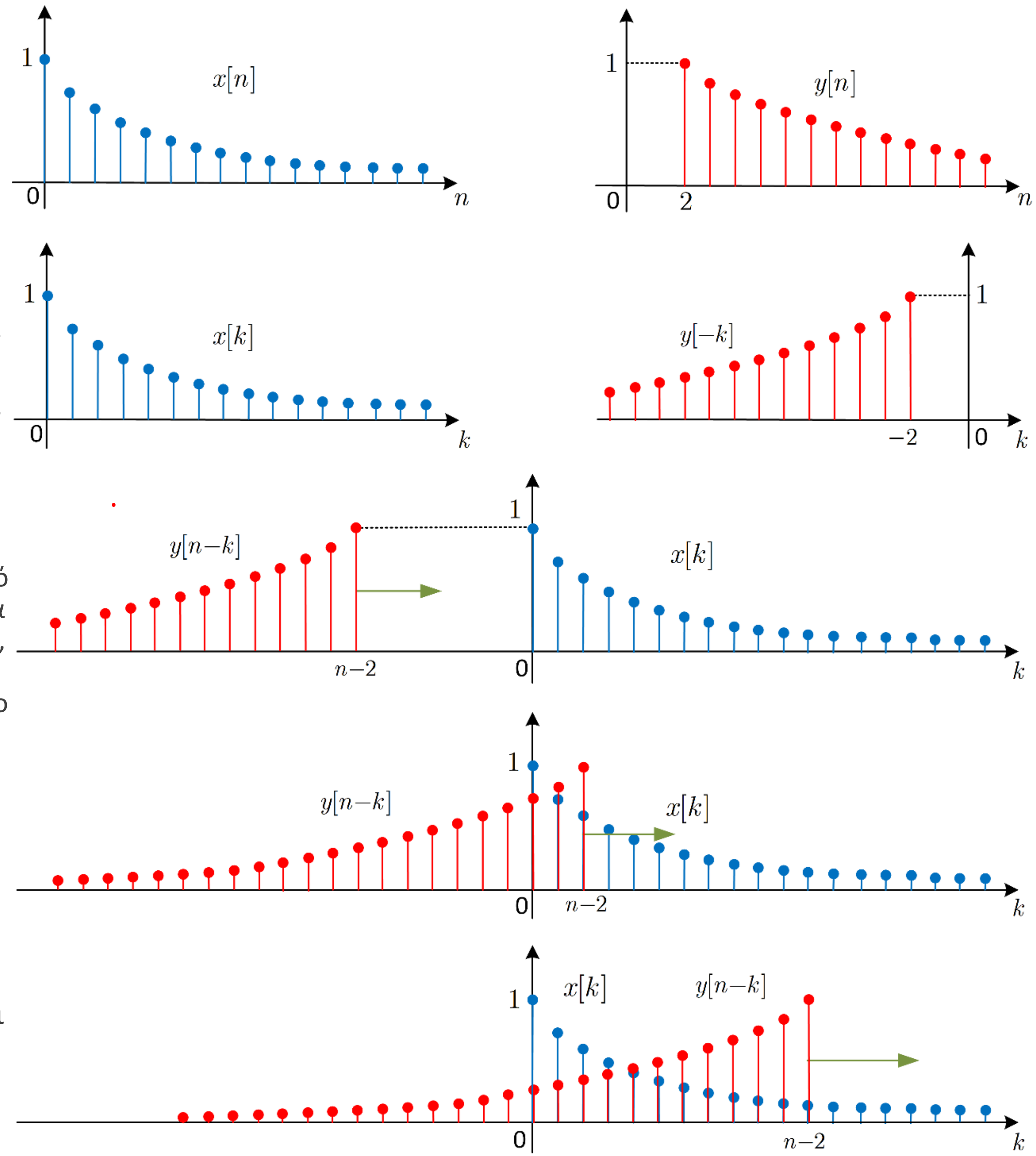
Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n]*y[n] = x[n]*ay[n] = a(x[n]*y[n]),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n]*y[n] = y[n]*x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n]*y[n])*z[n] = x[n]*(y[n]*z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n]*(y[n]+z[n]) = x[n]*y[n]+x[n]*z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n]*y[n] \\ z_2[n] = x_2[n]*y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n]+bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n]*y[n] = az_1[n]+bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \Re \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \Re \\ x[n]*y[n] : [n_1+n_3, n_2+n_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n]*\delta[n] = \delta[n]*x[n] = x[n]$

$$x[n]*\delta]n-n_0] = x[n-n_0]$$

- Πως υπολογίζουμε αυτό το φαινομενικά περίεργο άθροισμα?

Συνέλιξη

- Τα βήματα υπολογισμού είναι τα εξής:



- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε (αφού η πράξη της συνέλιξης είναι αντιμεταθετική) να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης. Επιπλέον, το $y[k]$ έχει υποστεί ανάκλαση και έχουμε πλέον το $y[-k]$.
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n-k]$ από το $y[-k]$ μετατοπίζοντάς το κατά n. Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά μέσα στο άθροισμα της συνέλιξης. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[-k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά τη μετατόπιση. Μετά, ξεκινάμε να το ‘‘ολισθαίνουμε’’ πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι το $y[n-k]$ συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντήσει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης, το οποίο θα είναι μη μηδενικό για $0 \leq k \leq n-2$ (στην προκείμενη περίπτωση).
- Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n-k]$ έχει προχωρήσει κι άλλο «μέσα» στο $x[k]$, αλλά δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση, καθώς πάλι τα δυο σήματα «αλληλεπιδρούν» από 0 ως $n-2$. Οπότε άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν.

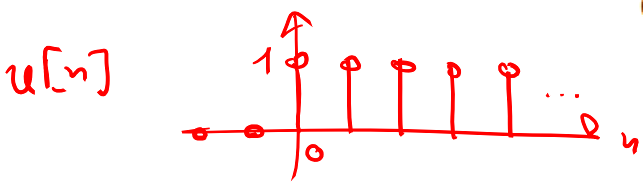
- **Συνέλιξη**

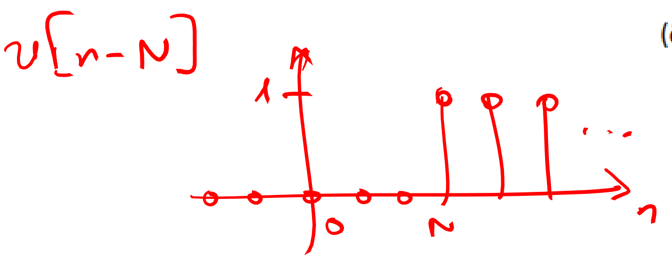
Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

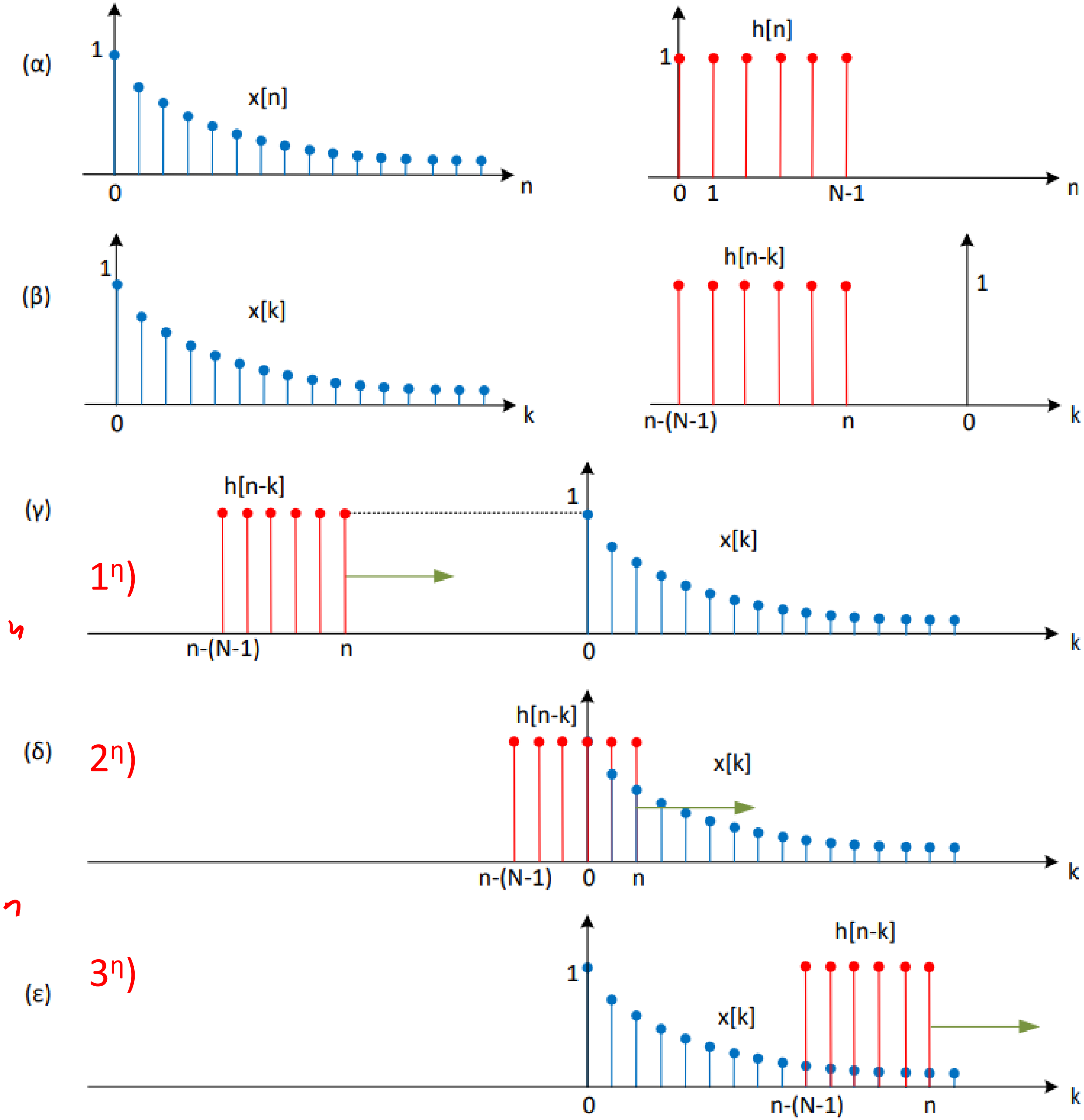
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n-k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k, και "σύρουμε" το $x[n-k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα "συνυπάρχουν", δηλ. όπου το γινόμενο $x[n-k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = u[n] - u[n-N]$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για

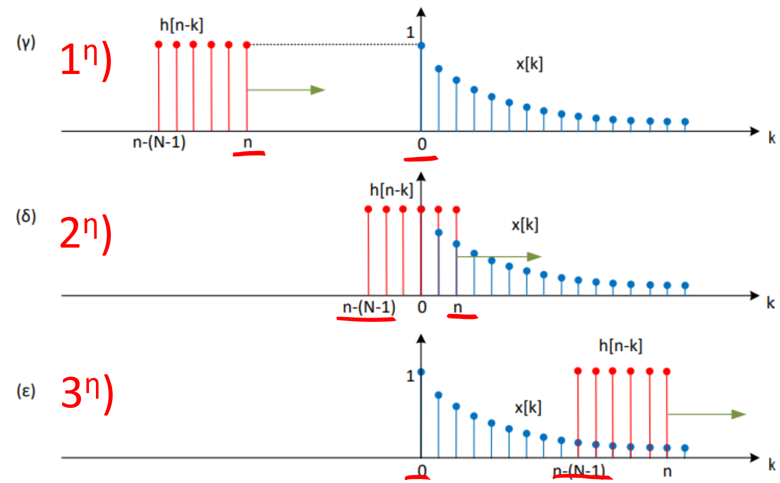
$$x[n] = a^n u[n],\ |a| < 1.$$







- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:



$1^{\eta})\ y[n] = x[n] * h[n] = 0,\ n < 0$

$2^{\eta})\ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] =$

$= \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},\ \underbrace{n \geq 0 \text{ και } n-(N-1) < 0}_{0 \leq n < N-1}$

$3^{\eta})\ y[n] = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k \cdot 1 = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k = \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a},\ n-(N-1) \geq 0$

δηλ.

$n \geq N-1$

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$$

Άρα συνολικά

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n < N-1 \\ \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a}, & n \geq N-1 \end{cases}$$

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για $x[n] = h[n]$.

Είναι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] \cdot \underbrace{a^{(n-k)}}_{a^n a^{-k}} u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^k a^{-k}}_{a^0 = 1} u[k]u[n-k]$$

$$= a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] \quad (A)$$

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \\ 0, & n-k < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad (2)$$

$\Rightarrow u[k]u[n-k] = 1,$

όταν $0 \leq k \leq n$ (3)

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = c(N_2 - N_1 + 1)$$

$*$

Η (A) λόγω (3) δίνει:

$$y[n] = a^n \sum_{k=0}^{n} 1 \overset{*}{=} a^n (n+1), \quad n \geq 0$$ λόγω (3)

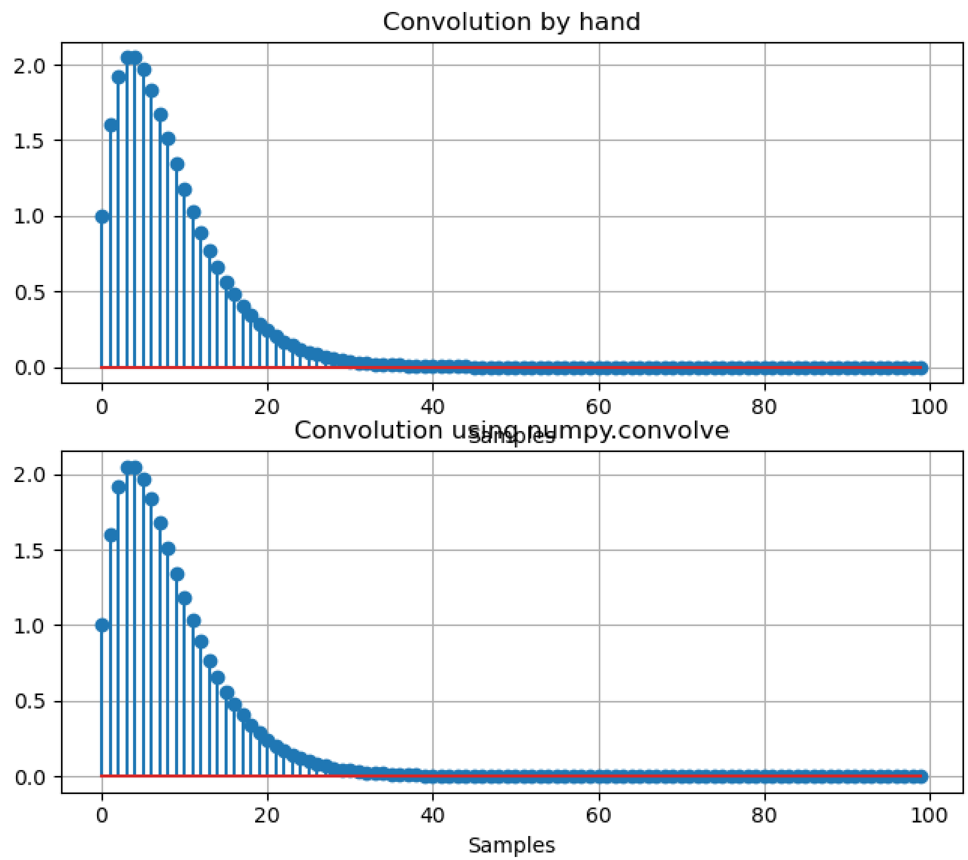
Άρα

$$y[n] = a^n (n+1)\, u[n]$$

Homework: Λύστε την με τη γραφική μέθοδο

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήματα
alpha = 0.8
Nh = 100;
n = np.arange(0, Nh, 1)
h = alpha ** n
x = h

# Συνέλιξη στο χέρι
chx = (n+1)*(alpha ** n)

# Συνέλιξη με χρήση της numpy.convolve
c = np.convolve(x, h)

# Σχήματα
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, chx)
axs[0].set_title('Convolution by hand')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, c[0:Nh])
axs[1].set_title('Convolution using numpy.convolve')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')
```



• Συνέλιξη

- Η γραφική ή η αλγεβρική μέθοδος είναι πολύ χρήσιμη όταν ένα τουλάχιστον εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται στη συνέλιξη είναι άπειρης διάρκειας

- Τι συμβαίνει όμως αν και τα δυο σήματα είναι πεπερασμένης (και συνήθως μικρής) διάρκειας?

- Τότε μια εναλλακτική γραφική μέθοδος είναι αυτή της **ολισθαίνουσας ταινίας (sliding tape)**
  - ... αλλά και οι ιδιότητες της συναρτησης Δέλτα βοηθούν **πάρα πολύ**

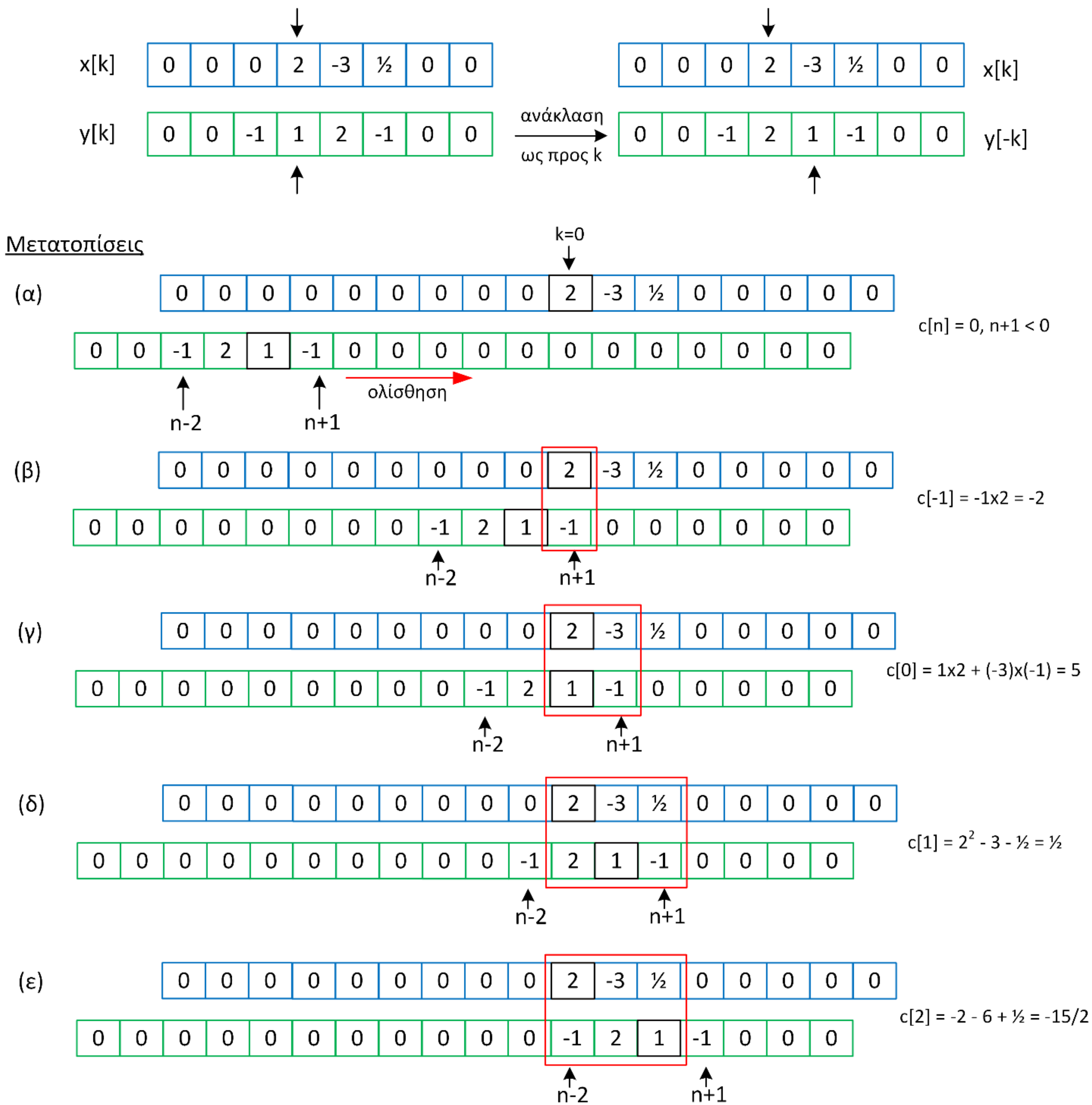
- Έστω ότι έχουμε δυο σήματα

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2] \rightarrow [0,2]$$

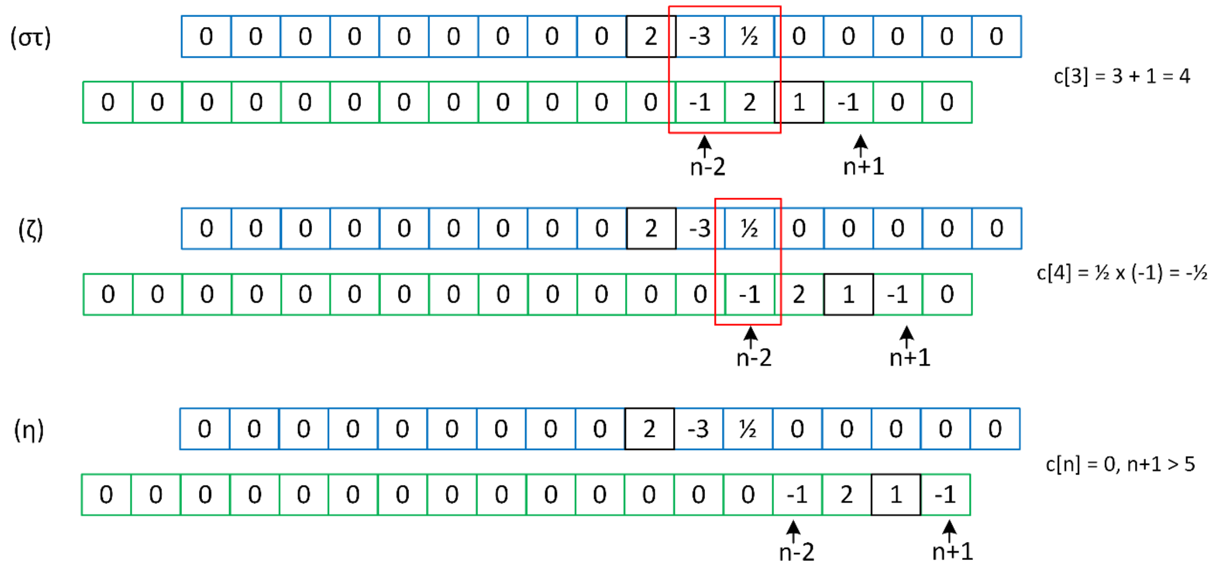
$$y[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] \rightarrow [-1,2]$$

- Θα κάνουμε την ίδια διαδικασία, απλά χωρίς σχήματα αυτή τη φορά

• Συνέλιξη


x[k]
0 0 0 2 -3 ½ 0 0
y[k]
0 0 -1 1 2 -1 0 0
ανάκλαση
ως προς k
0 0 0 2 -3 ½ 0 0
x[k]
0 0 -1 2 1 -1 0 0
y[-k]
Μετατοπίσεις
k=0
(α)
0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 -3 ½ 0 0 0 0 0
0 0 -1 2 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
ολίσθηση
n-2
n+1
c[n] = 0, n+1 < 0
(β)
0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 -3 ½ 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 1 -1 0 0 0 0 0 0
n-2
n+1
c[-1] = -1x2 = -2
(γ)
0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 -3 ½ 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 1 -1 0 0 0 0 0
n-2
n+1
c[0] = 1x2 + (-3)x(-1) = 5
(δ)
0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 -3 ½ 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 1 -1 0 0 0 0
n-2
n+1
c[1] = 2² - 3 - ½ = ½
(ε)
0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 -3 ½ 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 1 -1 0 0 0
n-2
n+1
c[2] = -2 - 6 + ½ = -15/2

• Συνέλιξη



- Το αποτέλεσμα είναι

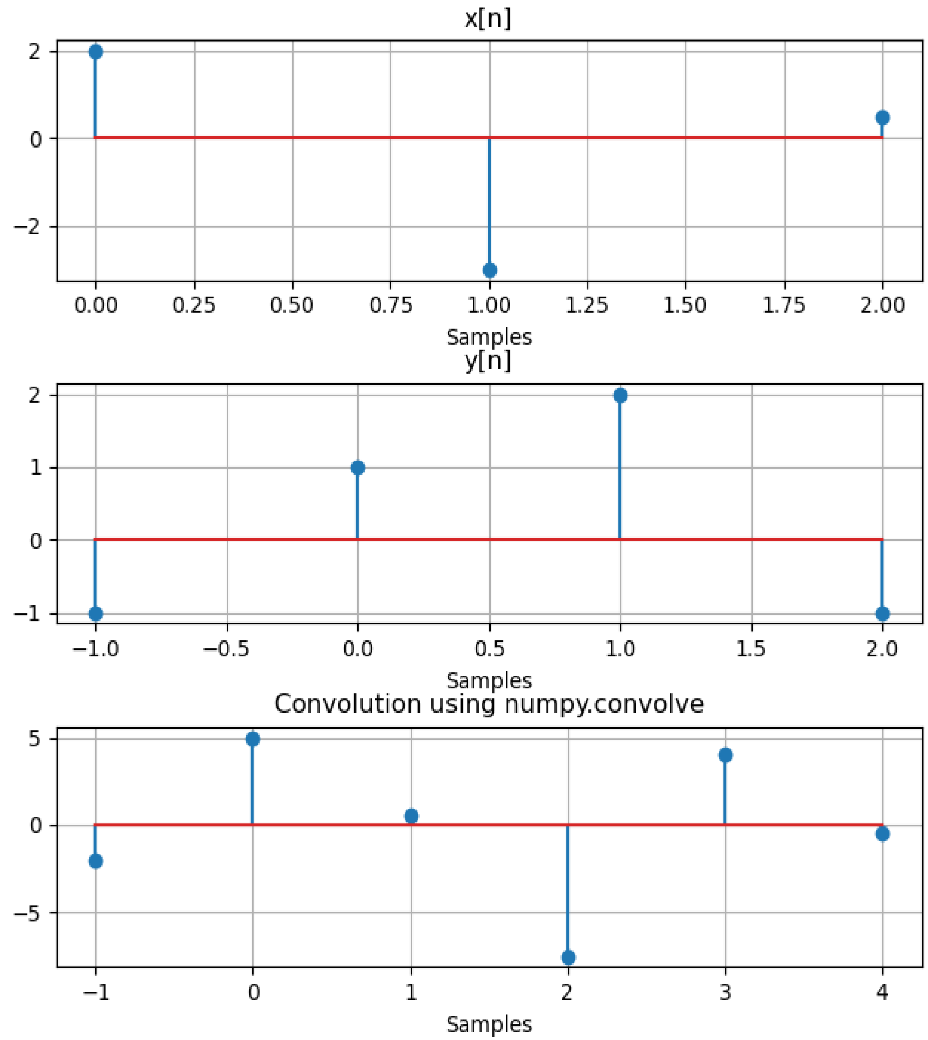
$$c[n] = -2\delta[n+1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{15}{2}\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \frac{1}{2}\delta[n-4]$$

- Η ιδιότητα του εύρους προβλέπει σωστά τη διάρκεια του παραπάνω σήματος?
- Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με χρήση ιδιοτήτων συνέλιξης?

Homework: Επιβεβαιώστε το $c[n] = x[n] * y[n]$ αναλυτικά με χρήση της $\delta[n-k] * \delta[n-l] = \delta[n-k-l]$

• Συνέλιξη

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήματα
nx = np.arange(0, 3)
x = np.array([2, -3, 1/2])

ny = np.arange(-1, 3)
y = np.array([-1, 1, 2, -1])

# Συνέλιξη με χρήση της numpy.convolve
c = np.convolve(x, y)
nc = np.arange(-1, 5)

# Σχήματα
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(nx, x)
axs[0].set_title('x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(ny, y)
axs[1].set_title('y[n]')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(nc, c)
axs[2].set_title('Convolution using numpy.convolve')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```



- **Συνολική έξοδος συστήματος**

  - Η συνολική έξοδος ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ και με απλές χαρακτηριστικές ρίζες δίνεται ως

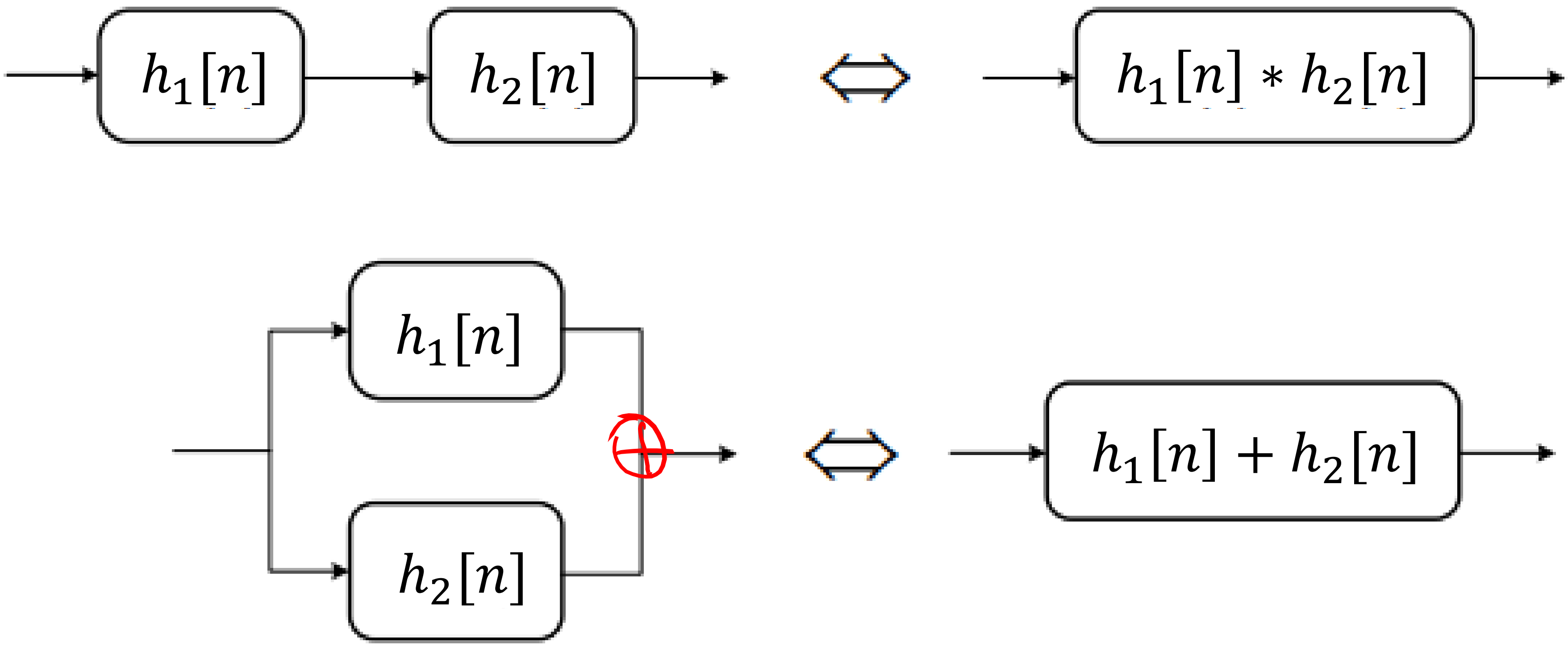
$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i \gamma_i^n u[n] + x[n] * h[n]$$

  - Έχουμε δει πως τροποποιείται η παραπάνω σχέση για πολλαπλές ρίζες

  - Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα ΓΧΑ συστήματα, δηλ. τέτοια ώστε

$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**



Τέλος Διάλεξης