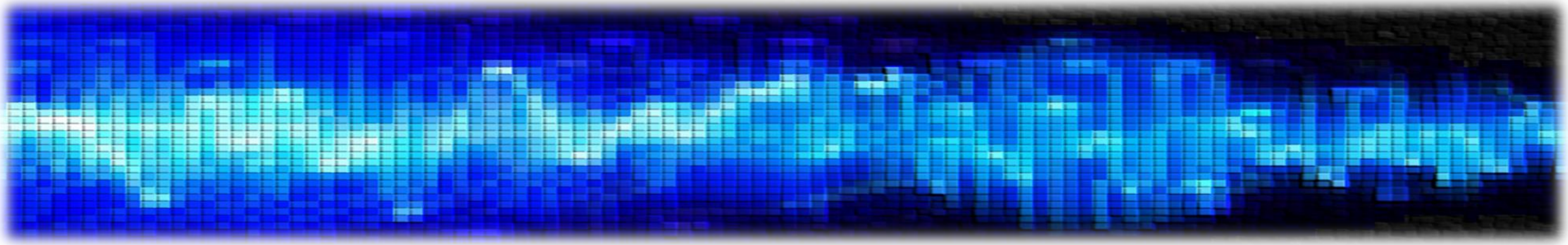
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 3Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

ένα σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου όσο και της εξόδου

  - Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

  - Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1], y[-2]$

  - Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

  ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

  - Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος

  - Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση

  - Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
    - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
    - Ένα σύστημα που **δε** βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?

  - Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
    - Της απόκρισης **μηδενικής εισόδου** $y_{zi}[n]$ (zero input response)
    - Της απόκρισης **μηδενικής κατάστασης** $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

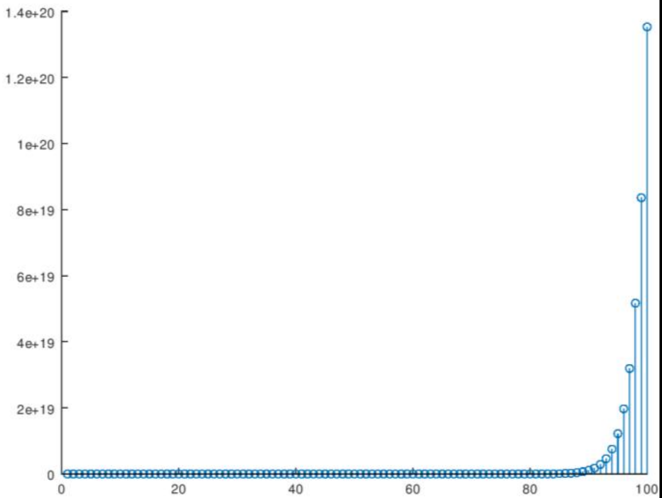
  - Η απόκριση **μηδενικής εισόδου** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία <u>μόνο</u> των αρχικών συνθηκών
    - **Επομένως: αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν**

  - Η απόκριση **μηδενικής κατάστασης** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
    - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Επιστρέφοντας στην αρχική απλή εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$



αν θέσουμε $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ τότε η έξοδος δίνεται ως

$$y[0] = y[-1] + y[-2] = 0 + 1 = 1$$
$$y[1] = y[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1$$
$$y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 1 = 2$$
$$y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 2 = 3$$
$$\dots \dots$$

- Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω σύστημα η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$y[n] = y_{zi}[n]$$

- Η απουσία εισόδου βλέπετε ότι δεν εμποδίζει το σύστημα να παράγει τιμές εξόδου (οι οποίες μάλιστα μεγαλώνουν εκθετικά)!
  - Οι μη μηδενικές αρχικές συνθήκες προκαλούν αυτήν τη συμπεριφορά παραγωγής εξόδου άνευ εισόδου ☺

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. $x[n] = 0 \; \forall \; n$, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k] = 0$$

  - Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ομογενής**

  - Μπορεί να δειχθεί ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n, \qquad \gamma, c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

  - Αντικαθιστώντας παραπάνω

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c\gamma^{n-k} = 0 \Leftrightarrow \; c\gamma^n \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Δηλ. πρέπει

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

  - Αναλύοντας

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1} \gamma^{-N+1} + \cdots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0$$

$$\gamma^{-N}(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N) = 0$$

  - Το πολυώνυμο στην παρένθεση ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το θέσουμε ίσο με το μηδέν θα έχουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος

  - Παραγοντοποιώντας

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \ldots (\gamma - \gamma_{\mathrm{N}}) = 0$$

με $\gamma_i, = 1, \ldots, N$ τις **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος

  - Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την ομογενή!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Αυτά τα γ αντιστοιχούν στις εξόδους

$$c_1\gamma_1^n, \qquad c_2\gamma_2^n, \qquad c_3\gamma_3^n, \qquad \dots, \qquad c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Μπορεί να δειχθεί ότι λύση της ομογενούς αποτελεί και το άθροισμα των παραπάνω

$$c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + c_3\gamma_3^n + \cdots + c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i\gamma_i^n, \qquad n \geq 0$$

  - Και τα c_i?

  - Προφανώς τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες!

  - Άρα χρειαζόμαστε κάθε φορά (α) τις χαρακτηριστικές ρίζες, και (β) τις αρχικές συνθήκες!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0, y[-1] = 1$.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{N-k} = 0$$

Έχουμε για $x[n] = 0$,

$$y_{zi}[n] + 5y_{zi}[n-1] + 6y_{zi}[n-2] = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι:

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0$

με ρίζες $\gamma_1 = -2$, $\gamma_2 = -3$

Οπότε

$$y_{zi}[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n$$

$$= c_1 \cdot (-2)^n + c_2 (-3)^n, \quad n \geq 0.$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

Από τις αρχικές συνθήκες:

$$y_{zi}[-2] = 0 \iff c_1(-2)^{-2} + c_2(-3)^{-2} = 0$$

$$y_{zi}[-1] = 1 \iff c_1(-2)^{-1} + c_2(-3)^{-1} = 1$$

Λύνοντας το σύστημα, παίρνουμε $c_1 = 4$, $c_2 = 9$.

Άρα

$$y_{zi}[n] = 4(-2)^n + 9(-3)^n, \quad n \geq 0$$

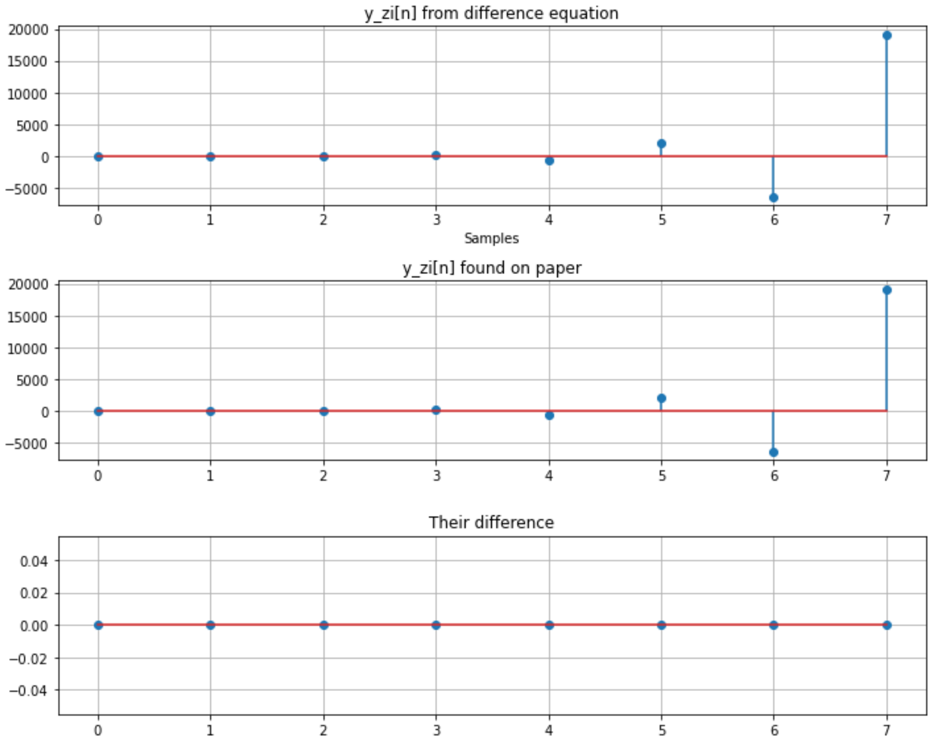
$$= \left[4(-2)^n + 9(-3)^n\right] u[n].$$

• Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- Python:

2 από αυτά θα «καταναλωθούν» στις αρχικές συνθήκες, άρα θα παράξω 8 δείγματα

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πόσα δείγματα?
N = 10

# Αρχικοποίηση
y = np.zeros((N))

# Αρχικές συνθήκες
y[0] = 0
y[1] = 1

# Μετράω θεωρώντας το n = 2 ότι αντιστοιχεί στο n = 0 (αφού χρησιμοποιήσαμε
# τις δυο πρώτες θέσεις του πίνακα για τις αρχικές συνθήκες)
for n in range(2, N):
    y[n] = -5*y[n-1] - 6*y[n-2]


n = np.arange(0, N-2)
yzi = 4*(-2)**n - 9*(-3)**n


# Create a figure and three subplots
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10, 8))

# Plotting on each subplot
axs[0].stem(np.arange(2, N)-2, y[2:N])  # First subplot
axs[0].set_title('y_zi[n] from difference equation')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, yzi)  # Second subplot
axs[1].set_title('y_zi[n] found on paper')
axs[1].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(y[2:N] - yzi)  # Third subplot
axs[2].set_title('Their difference')
axs[2].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

# Adjust layout to prevent overlap
plt.tight_layout()

# Display the plot
plt.show()
```



- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1, y[-1] = 0$.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{N-k} = 0$$

Θέτουμε $x[n] = 0$, οπότε

$$y_{zi}[n] + \frac{7}{12} y_{zi}[n-1] + \frac{1}{12} y[n-2] = 0$$

Το χαρακτ. πολυώνυμο θα είναι:

$$\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12}$$

και η εξίσωση είναι

$$\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = 0$$

Οι ρίζες είναι $\gamma_1 = -\frac{1}{3}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{4}$.

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

Η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι

$$y_{zi}[n] = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Από τις αρχικές συνθήκες

$$y_{zi}[-2] = 1 \iff c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + c_2\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = 1$$

$$y_{zi}[-1] = 0 \iff c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} + c_2\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} = 0$$

Λύνοντας το σύστημα: $c_1 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{1}{4}$

Άρα $$y_{zi}[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

- Σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας (πολλαπλότητας ≥ 2), μπορεί κανείς να δείξει ότι :

Αν

$$(\gamma - \gamma_1)^r(\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2}) \dots (\gamma - \gamma_N)$$

μια παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται

$$y_{zi}[n] = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i n^{i-1} \gamma_1^n}_{\text{Οφείλεται στην πολλαπλή ρίζα } \gamma_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{N} c_i \gamma_i^n}_{\text{Οφείλεται στις υπόλοιπες ρίζες}}, \qquad n \geq 0$$

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**
  - Στην απόκριση μηδενικής κατάστασης, οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την είσοδο και τα χαρακτηριστικά του συστήματος
  - Αν η συνολική έξοδος $y[n]$ καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ)**
    - Αυτή η ιδιότητα θα αποβεί καθοριστική στην πορεία
  - Θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο
    - Ας φτάσουμε σε αυτό βήμα-βήμα
  - Ποιο είναι το απλούστερο σήμα που μπορεί να παρουσιαστεί στην είσοδο ενός συστήματος?
    - Η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ τότε η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **κρουστική απόκριση** (impulse response)
    - Έχει “νόημα”: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ένα σήμα που «ζει» μόνο σε μια χρονική στιγμή)
    - Η κρουστική απόκριση συμβολίζεται ως $h[n]$

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow \boxed{S_{\text{ΓΧΑ}}} \longrightarrow y[n] = h[n]$$

  - Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

  - Ας δοκιμάσουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση για ένα απλό σύστημα

  - Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την απόκριση μηδενικής εισόδου, και θα “θεωρήσουμε” ότι η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες για $n = 0$

  - Θα λύσουμε την ομογενή εξίσωση για $n > 0$!!!! ☺

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**

  - Έστω το σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

Ας βρούμε την κρουστική του απόκριση

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

  - Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n]$$

  - Για $n = 0$,

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = \delta[0] \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1$$

$$a_0 h[0] + a_1 \cdot 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] = 1 \;\Leftrightarrow\; h[0] = \frac{1}{a_0}$$

  - Αυτή είναι η (ψευδο-)αρχική μας συνθήκη!

  - Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της ομογενούς εξίσωσης για $n > 0$

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**
  - Έστω το ομογενές σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = 0, \qquad n > 0$$

  - Ξέρουμε ότι

$$h[n] = c\gamma^n, \qquad n \geq 0$$

  - Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$a_0\gamma + a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$$

  - Οπότε

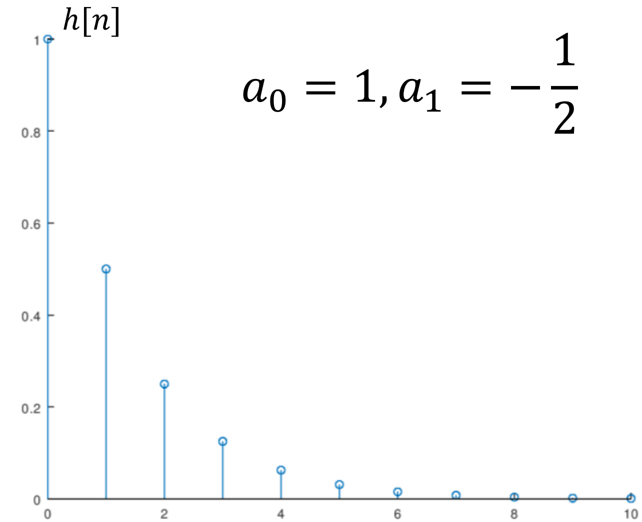
$$h[n] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

  - Βρίσκουμε και τη σταθερά ως

$$h[0] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^0 = c = \frac{1}{a_0}$$

  - Άρα

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$



$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Θα μπορούσαμε να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών, ανεξαρτήτως τάξης

  - Όμως σίγουρα κάτι τέτοιο είναι αρκετά χρονοβόρο και κουραστικό
    - Υπάρχει κάποια ευκολότερη μέθοδος;

  - Με άλλα λόγια, αν το σύστημα είναι της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  τότε τι κάνουμε για να βρούμε την κρουστική απόκριση εύκολα και γρήγορα?

  - Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην απάντηση

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**

  - Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$S_b\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]$$

  με κρουστική απόκριση $h_b[n]$

  - Τότε η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_0\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n]$$

  θα είναι $h_0[n] = b_0 h_b[n]$

  - Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_{0^-}\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n-l]$$

  θα είναι $h_{0^-}[n] = b_0 h_b[n-l]$

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**

  - Ακολουθώντας την ίδια λογική, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  θα είναι

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_b[n-l]$$

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (ομογένεια) μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το πρώτο σύστημα στο δεύτερο, ενώ η ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το δεύτερο στο τρίτο

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (αθροιστικότητα) μας επέτρεψε ξανά να βρούμε το παραπάνω αποτέλεσμα

  - Και οι δυο ιδιότητες (ΓΧΑ) μας επιτρέπουν να γράψουμε τη γενικότερη απάντηση που βλέπετε παραπάνω

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

Θέτω $x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$, οπότε παίρνουμε

$$h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = \delta[n] \quad (1)$$

Το χαρακτ πολυώνυμο είναι $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6}$ και άρα η χαρακτ εξίσωση είναι η $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = 0$

Οι ρίζες είναι $\gamma_1 = -\frac{1}{3}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$

Άρα

$$h[n] = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0. \quad (2)$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Από την (1) : $n = 0$: $h[0] + \frac{5}{6}\cancel{h[-1]}^{0} + \frac{1}{6}\cancel{h[-2]}^{0} = \delta[0] = 1$

$$\boxed{h[0] = 1} \quad (3)$$

$n = 1$: $h[1] + \frac{5}{6}\cancel{h[0]}^{1} + \frac{1}{6}\cancel{h[-1]}^{0} = \delta[1] = 0$

$$h[1] + \frac{5}{6} \cdot 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{h[1] = -\frac{5}{6}} \quad (4)$$

Η (2) $\xRightarrow[(4)]{(3)}$ $h[0] = 1 \Longleftrightarrow c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$$\boxed{c_1 + c_2 = 1} \quad (5)$$

$$h[1] = -\frac{5}{6} \Longleftrightarrow c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{5}{6}$$

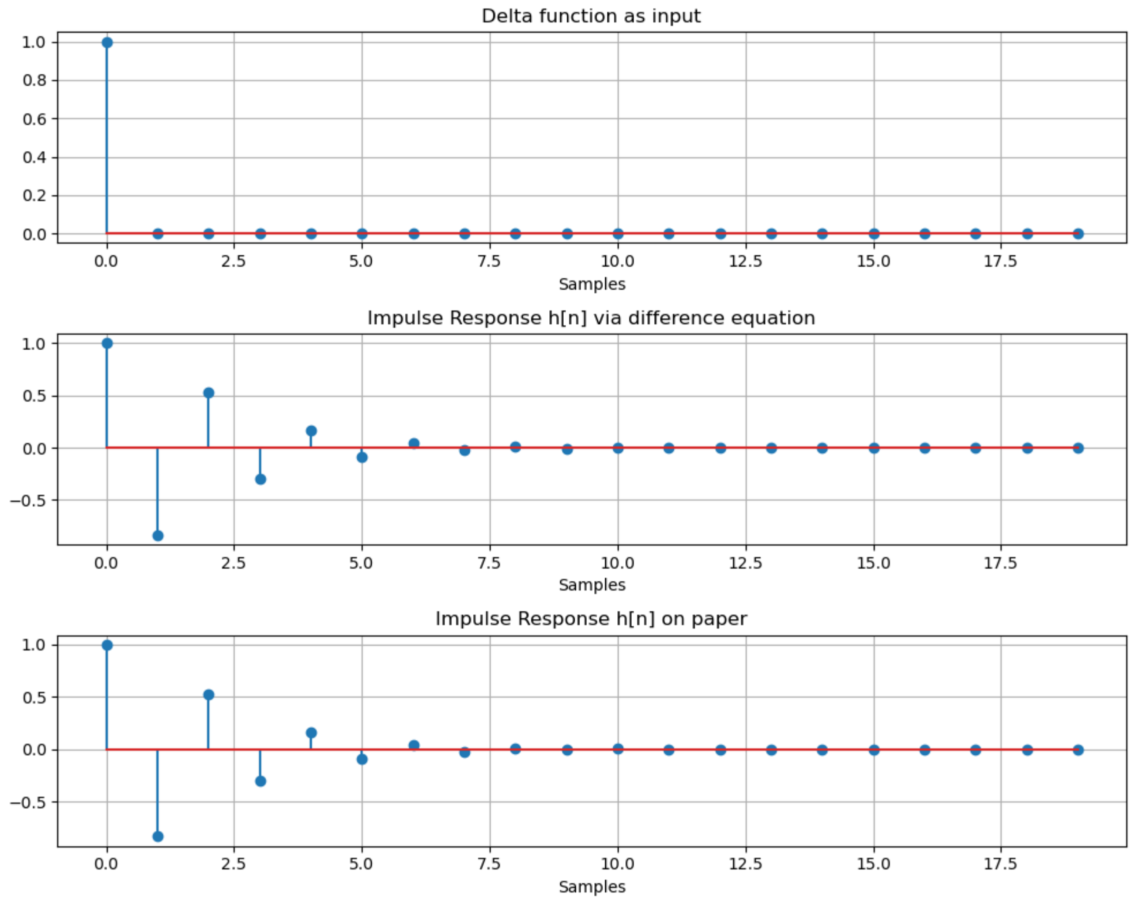
$$\boxed{-\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = -\frac{5}{6}} \quad (6)$$

Από (5), (6), έχουμε $c_1 = -2$, $c_2 = 3$.

Άρα τελικά, $h[n] = -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$.

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Python:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πόσα δείγματα θέλω να παράξω?
N = 20

# Αρχικοποίηση
h = np.zeros((N))

# Ψευδοαρχικές συνθήκες
h[0] = 1
h[1] = -5/6

# Είσοδος: συνάρτηση Δέλτα
x = np.zeros((N))
x[0] = 1

# Υλοποιώ από n = 2 και μετά
for n in range(2,N):
    h[n] = -5/6*h[n-1] - 1/6*h[n-2]

# Συνέλιξη στο χαρτί
nn = np.arange(0, N)
h_p = -2*(-1/3)**nn + 3*(-1/2)**nn

# Γραφήματα
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(np.arange(0, N), x)
axs[0].set_title('Delta function as input')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')
```




```python
axs[1].stem(np.arange(0, N), h)
axs[1].set_title('Impulse Response h[n] via difference equation')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(nn, h_p)
axs[2].set_title('Impulse Response h[n] on paper')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Παρατηρήσεις:

1. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=2x[n]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n]=2h[n]=2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

2. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=4x[n]-2x[n-2]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n]=4h[n]-2h[n-2]$$

$$=4\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]-2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}+3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]u[n-2]$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση.

Θεωρούμε το απλό σύστημα

$$S_b: \quad y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] \quad !$$

με κρουστική απόκριση $h_b[n]$. Θέτω $x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

και τότε

$$h_b[n] + \frac{2}{3}h_b[n-1] + \frac{1}{9}h_b[n-2] = \delta[n] \quad (1)$$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{9} \xRightarrow{\varepsilon\xi.} \gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{9} = 0 \overset{\text{ρίζα}}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{3}$

$$\left(\gamma + \frac{1}{3}\right)\left(\gamma + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\left(\gamma + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$$

Άρα

$$h_b[n] = c_0\gamma_1^n + n c_1 \gamma_1^n, \quad n \geq 0$$

$$= c_0\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_1 n\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Από την (1) $\Longrightarrow$ $n=0: \quad h_b[0] + \frac{2}{3}\cancelto{0}{h_b[-1]} + \frac{1}{3}\cancelto{0}{h_b[-2]} = \delta[0] = 1$

$$\boxed{h_b[0] = 1} \quad (3)$$

$n=1: \quad h_b[1] + \frac{2}{3}\cancelto{1}{h_b[0]} + \frac{1}{3}\cancelto{0}{h_b[-1]} = \delta[1] = 0$

$$h_b[1] + \frac{2}{3}\cdot 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{h_b[1] = -\frac{2}{3}} \quad (4)$$

Οπότε από (2) $\xrightarrow[(4)]{(3)}$ $h_b[0] = 1 \Longleftarrow c_0\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_1\cdot 0\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{c_0 = 1} \quad (5)$$

$$h_b[1] = -\frac{2}{3} \Longrightarrow c_0\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + 1\cdot c_1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_1 = 1} \quad (6)$$

Άρα η (2) $\xrightarrow[(6)]{(5)}$ $h_b[n] = (n+1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \; n \geq 0$

$$= \left[(n+1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n].$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Άρα για το αρχικό μας σύστημα, η κρουστική απόκριση θα είναι:

$$h[n] = h_b[n] + 2h_b[n-1]$$

$$= (n+1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ