

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

Το συνολικό σύστημα $H(z)$ γράφεται ως

$$H(z) = H_{II}(z)G(z) \quad (1)$$

ενώ το σύστημα Τύπου II γραμμικής φάσης γράφεται ως

$$H_{II}(z) = P(z) = Q(z)(1 + z^{-1}) \quad (2)$$

με το γινόμενο να δείχνει ότι το σύστημα αυτό έχει μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο, όπως δείχνει το πολυώνυμο $Q(z)$, κι ένα μηδενικό στη συχνότητα $\omega = \pi$, όπως επιβάλλει ο Τύπος II του. Άρα

$$H(z) = Q(z)(1 + z^{-1})(1 - z^{-1}) \quad (3)$$

που σημαίνει ότι το συνολικό σύστημα θα έχει μηδενικά στις συχνότητες $\omega = 0, \omega = \pi$. Άρα θα είναι Τύπου III γραμμικής φάσης.

Άσκηση 2.

i. Το σύστημα δεν έχει απαραίτητα γραμμική φάση, αφού η απόκριση φάσης

$$G_1(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{\Im\{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\}}{\Re\{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\}} \quad (4)$$

δεν είναι απαραίτητα γραμμική. Ως αντιπαράδειγμα, έστω

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] \quad (5)$$

$$h_2[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n - 1] \quad (6)$$

$$g_1[n] = h_1[n] + h_2[n] = 3\delta[n] - \delta[n - 1] \quad (7)$$

$$G_1(e^{j\omega}) = 3 - \cos(\omega) + j \sin(\omega) \quad (8)$$

$$\angle G_1(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{\sin(\omega)}{3 - \cos(\omega)} \quad (9)$$

Είναι εμφανές ότι το σύστημα δεν έχει γραμμική φάση, παρόλο που τα επιμέρους συστήματα έχουν γραμμική φάση.

Εναλλακτικά, το παραπάνω αντιπαράδειγμα καταλήγει σε κρουστική απόκριση που δεν έχει καμιά συμμετρία από αυτές που γνωρίζουμε ότι έχουν τα συστήματα γραμμικής φάσης, άρα δεν είναι γραμμικής φάσης.

ii. Το σύστημα έχει γραμμική φάση αφού

$$G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) \quad (10)$$

$$\angle G_2(e^{j\omega}) = \angle H_1(e^{j\omega}) + \angle H_2(e^{j\omega}) \quad (11)$$

και το άθροισμα δυο γραμμικών αποκρίσεων φάσης δίνει γραμμική απόκριση φάσης.

iii. Το σύστημα δεν έχει απαραίτητα γραμμική φάση. Από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier, το ολοκλήρωμα αυτό (συνέλιξη) δίνει γινόμενο στο πεδίο του χρόνου. Είναι

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad (12)$$

$$h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \quad (13)$$

$$g_3[n] = h_1[n]h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] \quad (14)$$

$$G_3(e^{j\omega}) = 1 + 2\cos(\omega) - 2j\sin(\omega) \quad (15)$$

$$\angle G_3(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{2\sin(\omega)}{1 + 2\cos(\omega)} \quad (16)$$

το οποίο δεν έχει γραμμική φάση.

Εναλλακτικά, το παραπάνω αντιπαράδειγμα καταλήγει σε κρουστική απόκριση που δεν έχει καμιά συμμετρία από αυτές που γνωρίζουμε ότι έχουν τα συστήματα γραμμικής φάσης, άρα δεν είναι γραμμικής φάσης.

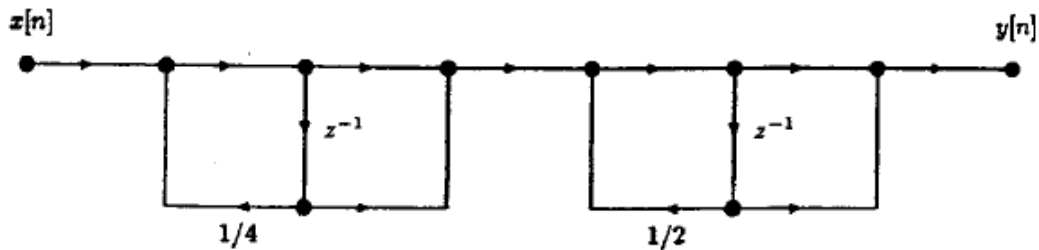
Άσκηση 3.

Η συνάρτηση μεταφοράς

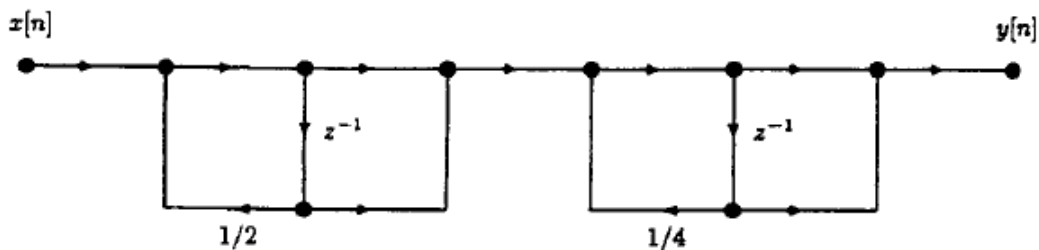
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \quad (17)$$

μπορεί να γραφεί υλοποιηθεί με τους ακόλουθους δυο τρόπους όπως στο Σχήμα 1.

$$H(z) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right) \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right).$$



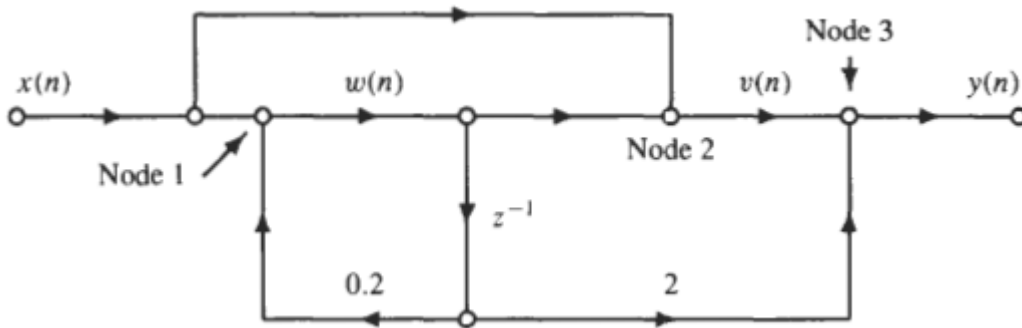
$$H(z) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right).$$



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 3α.

Άσκηση 4.

Ο γράφος της εκφώνησης μπορεί να τροποποιηθεί με ενδιάμεσες μεταβλητές για ευκολία όπως ο γράφος του Σχήματος 2. Για τους τρεις σημειωμένους κόμβους του Σχήματος 2, έχουμε τις εξισώσεις



Σχήμα 2: Γράφος Άσκησης 4.

$$w[n] = x[n] + 0.2w[n-1] \quad (18)$$

$$u[n] = x[n] + w[n] \quad (19)$$

$$y[n] = u[n] + 2w[n-1] \quad (20)$$

και πηγαίνοντας στο χώρο του Z, έχουμε

$$W(z) = \frac{1}{1 - 0.2z^{-1}}X(z) \quad (21)$$

ενώ για τη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$U(z) = X(z) + W(z) = X(z) + \frac{1}{1 - 0.2z^{-1}}X(z) = \frac{2 - 0.2z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}}X(z) \quad (22)$$

Τέλος, με μετασχ. Z στην τρίτη εξίσωση, έχουμε

$$Y(z) = V(z) + 2z^{-1}W(z) = \frac{2 + 1.8z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}}X(z) \quad (23)$$

Οπότε

$$H(z) = \frac{2 + 1.8z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}} \quad (24)$$

Η κρουστική απόκριση, ανάλογα την αιτιατότητα ή μη του συστήματος, είναι

$$h[n] = 2(0.2)^n u[n] + 1.8(0.2)^{n-1} u[n-1] \quad (25)$$

$$h[n] = -2(0.2)^n u[-n-1] - 1.8(0.2)^{n-1} u[-n] \quad (26)$$

Άσκηση 5.

Προσθέτοντας ενδιάμεσες μεταβλητές, έχουμε τον παρακάτω γράφο του Σχήματος 3. Οι εξισώσεις του δίνονται ως

$$w[n] = x[n] - 0.49e[n-1] \quad (27)$$

$$r[n] = w[n] - 0.4698r[n-1] \quad (28)$$

$$e[n] = 0.4698r[n] + r[n-1] \quad (29)$$

$$y[n] = 2.4698r[n] - e[n] \quad (30)$$

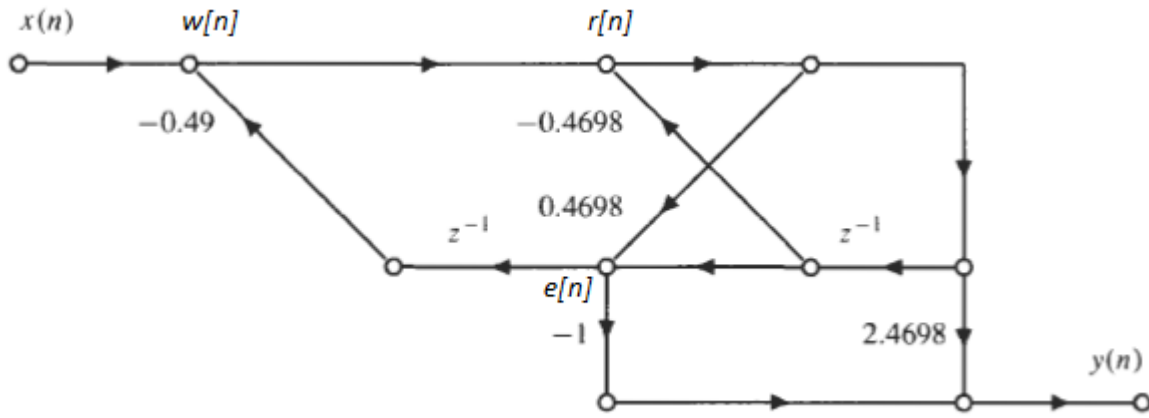
και στο χώρο του Z, είναι

$$W(z) = X(z) - 0.49z^{-1}E(z) \quad (31)$$

$$R(z) = W(z) - 0.4698z^{-1}R(z) \quad (32)$$

$$E(z) = 0.4698R(z) + z^{-1}R(z) \quad (33)$$

$$Y(z) = 2.4698R(z) - E(z) \quad (34)$$



Σχήμα 3: Γράφος Άσκησης 5.

και ισοδύναμα

$$W(z) = X(z) - 0.49z^{-1}(0.4698R(z) + z^{-1}R(z)) \quad (35)$$

$$W(z) = R(z)(1 + 0.4698z^{-1}) \quad (36)$$

$$Y(z) = 2R(z) - z^{-1}R(z) \quad (37)$$

δηλ.

$$X(z) = R(z)(1 + 0.4698z^{-1}) + 0.49z^{-1}(0.4698R(z) + z^{-1}R(z)) \quad (38)$$

$$Y(z) = (2 - z^{-1})R(z) \quad (39)$$

και τέλος

$$X(z) = R(z)(1 + 0.4698z^{-1} + 0.23z^{-1} + 0.49z^{-2}) \quad (40)$$

$$Y(z) = (2 - z^{-1}) \frac{1}{1 + 0.6998z^{-1} + 0.49z^{-2}} X(z) \quad (41)$$

οπότε

$$H(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 + 0.6998z^{-1} + 0.49z^{-2}} \quad (42)$$

Άσκηση 6.

Με χρήση ενδιαμεσων μεταβλητών, έχουμε τον παρακάτω γράφο του Σχήματος 4. Οι εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου είναι

$$y[n] = f[n] \quad (43)$$

$$e[n] = x[n] + a_1 w[n] \quad (44)$$

$$f[n] = e[n] + a_2 r[n] \quad (45)$$

$$r[n] = x[n] - f[n - 2] \quad (46)$$

$$w[n] = x[n] - f[n - 1] \quad (47)$$

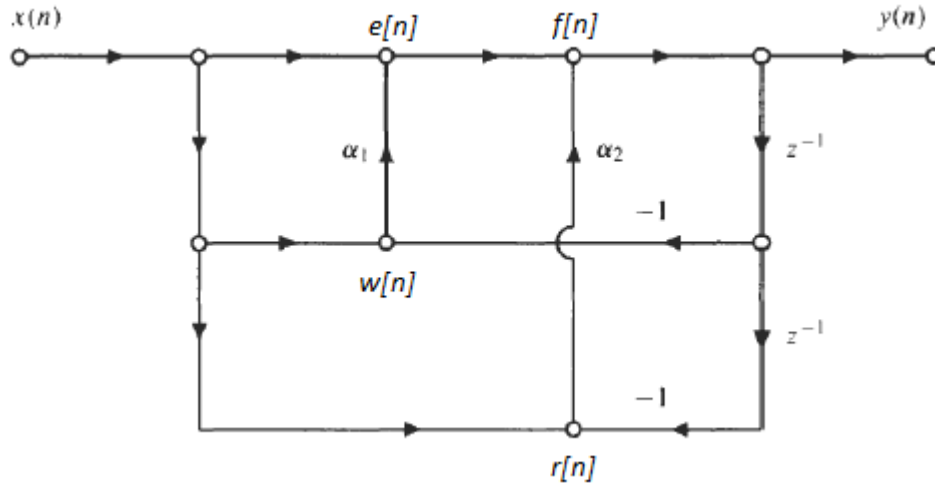
και βλέποντας ότι η μεταβλητή $f[n]$ είναι περιττή, έχουμε

$$e[n] = x[n] + a_1 w[n] \quad (48)$$

$$y[n] = e[n] + a_2 r[n] \quad (49)$$

$$r[n] = x[n] - y[n - 2] \quad (50)$$

$$w[n] = x[n] - y[n - 1] \quad (51)$$



Σχήμα 4: Γράφος Άσκησης 6.

Στο πεδίο του μετασχ. Z είναι

$$E(z) = X(z) + a_1 W(z) \quad (52)$$

$$Y(z) = E(z) + a_2 R(z) \quad (53)$$

$$R(z) = X(z) - z^{-2} Y(z) \quad (54)$$

$$W(z) = X(z) - z^{-1} Y(z) \quad (55)$$

και λύνοντας έχουμε

$$Y(z) = X(z) + a_1 (X(z) - z^{-1} Y(z)) + a_2 (X(z) - z^{-2} Y(z)) \quad (56)$$

$$= X(z) + a_1 X(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 X(z) - a_2 z^{-2} Y(z) \quad (57)$$

$$Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) = X(z) + a_1 X(z) + a_2 X(z) \quad (58)$$

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = X(z)(1 + a_1 + a_2) \quad (59)$$

$$H(z) = \frac{1 + a_1 + a_2}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (60)$$