

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/11/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 10/12/2024, ως τη λήξη του μαθήματος
ή ηλεκτρονικά στο patsoura@csd.uoc.gr

Άσκηση 1.

Βρείτε το μετασχ. Ζ για τα παρακάτω σήματα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες του μετασχ. Ζ για να κάνετε τη λύση σας απλούστερη και ευκολότερη.

(α) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n]$

(β) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] + 3^n u[-n-1]$

(γ) $x[n] = \alpha^{|n|}, |\alpha| < 1$

Απ: (α) $X(z) = \frac{1}{1-3z}, |z| < \frac{1}{3}$
(β) $X(z) = \frac{4z^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-3z^{-1}}, \frac{1}{2} < |z| < 3$
(γ) $X(z) = \frac{1-\alpha^2}{(1-az^{-1})(1-az)}, \alpha < |z| < \frac{1}{\alpha}$

Άσκηση 2.

Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων

$$x[n] = 3^n u[-n] \quad (1)$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (2)$$

μέσω ιδιοτήτων και γνωστών ζευγών του μετασχ. Ζ.

Απ: $y[n] = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{6}{5} 3^n u[-n-1]$

Άσκηση 3.

Έστω το σήμα $x[n]$ με μετασχ. Ζ ως

$$X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} \quad (3)$$

με άγνωστο πεδίο σύγκλισης.

(α) Βρείτε *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά του.

(β) Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

(γ) Ποιά είναι τα πιθανά πεδία σύγκλισης του παραπάνω μετασχ. Ζ;

(δ) Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχ. Ζ (δηλ. το σήμα στο χρόνο $x[n]$) για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.

(ε) Για ποιο πεδίο σύγκλισης από όσα βρήκατε μπορεί κανείς να υπολογίσει το μετασχ. Fourier από το μετασχ. Z;

$$\underline{\text{Απ:}} \text{ (δ) } x[n] = \begin{cases} 2(-2)^n u[n] - (-1)^n u[n] \\ (-2)^{n+1} u[-n-1] - (-1)^n u[n] \\ (-2)^{n+1} u[-n-1] + (-1)^n u[-n-1] \end{cases}$$

Άσκηση 4.

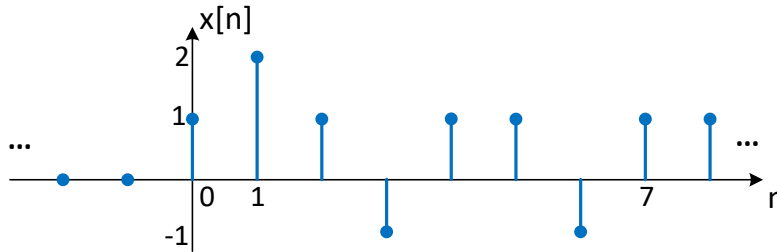
Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \quad (4)$$

(α) Έστω ότι το σύστημα είναι ευσταθές. Βρείτε την έξοδο $y[n]$ όταν η είσοδος του είναι $x[n] = u[n]$.

$$\underline{\text{Απ:}} y[n] = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{5} (3)^n u[-n-1] - u[n]$$

(β) Έστω ότι η περιοχή σύγκλισης του $H(z)$ περιλαμβάνει το $z = \infty$. Βρείτε την τιμή του $y[2]$ όταν το $x[n]$ δίνεται όπως στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 4.

$$\underline{\text{Απ:}} y[0] = 0, y[1] = 0, y[2] = 1$$

(γ) Έστω ότι θέλουμε να ανακτήσουμε το $x[n]$ από το $y[n]$ περνώντας το τελευταίο από ένα αντίστροφο σύστημα με κρουστική απόκριση $h_i[n]$. Βρείτε την. Εξαρτάται η μορφή της από το πεδίο σύγκλισης του $H(z)$;

$$\underline{\text{Απ:}} h_i[n] = \delta[n+2] - \frac{7}{2}\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n]$$

Άσκηση 5.

Σας δίνονται τα παρακάτω FIR συστήματα.

$$H_1(z) = 6 + z^{-1} - z^{-2} \quad (5)$$

$$H_2(z) = 1 - z^{-1} - 6z^{-2} \quad (6)$$

$$H_3(z) = 1 - \frac{5}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2} \quad (7)$$

$$H_4(z) = 1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} \quad (8)$$

Βρείτε ποιο από τα παραπάνω είναι ελάχιστης φάσης. Δικαιολογήστε την επιλογή σας επαρκώς.

Απ: Προφανώς πρέπει να τη βρείτε μόνοι/ες σας! :)

Άσκηση 6.

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 4z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (9)$$

(α) Διασπάστε τη σε έναν όρο ελάχιστης φάσης και έναν όρο all-pass, σχεδιάζοντας τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών τους. Περιγράψτε ακριβώς τα βήματα που ακολουθείτε.

(β) Βρείτε τον όρο ελάχιστης φάσης χωρίς να κάνετε την παραπάνω διάσπαση. Εξηγήστε.

$$\underline{\text{Απ:}} \quad H(z) = \frac{z^{-1} - 4}{(1 - \frac{3}{10}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \times \frac{z^{-1} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$