

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

(α) Από τη σχέση

$$y[n] = x[-n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[n] \longleftrightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad |z| > 3 \quad (1)$$

έχουμε ότι

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{1}{1 - 3z}, \quad |z| < \frac{1}{3} \quad (2)$$

(β) Έχουμε

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[n+2] \longleftrightarrow \frac{4z^2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (3)$$

Όμοια,

$$3^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad |z| < 3 \quad (4)$$

Άρα

$$X(z) = \frac{4z^2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 3 \quad (5)$$

(γ) Έχουμε

$$x[n] = a^{|n|} = a^n u[n] + a^{-n} u[-n] - \delta[n] \quad (6)$$

και εφαρμόζοντας μετασχ. Z και ιδιότητες έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - az} - 1 = \frac{1 - a^2}{(1 - az^{-1})(1 - az)}, \quad a < |z| < \frac{1}{a} \quad (7)$$

Άσκηση 2.

Θα έχουμε

$$x[n] = 3^n u[-n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z} = -\frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}, \quad |z| < 3 \quad (8)$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (9)$$

και άρα

$$Y(z) = -\frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{με } \frac{1}{2} < |z| < 3 \quad (10)$$

και με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$Y(z) = \frac{A}{1 - 3z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{με } \frac{1}{2} < |z| < 3 \quad (11)$$

$$= \frac{-\frac{6}{5}}{1 - 3z^{-1}} + \frac{\frac{6}{5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{με } \frac{1}{2} < |z| < 3 \iff \{|z| > \frac{1}{2}\} \cap \{|z| < 3\} \quad (12)$$

Στο πεδίο του χρόνου έχουμε, χρησιμοποιώντας γνωστά ζεύγη, ότι

$$y[n] = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{6}{5} 3^n u[-n - 1] \quad (13)$$

Άσκηση 3.

Για το σήμα

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}, \quad R_x \quad (14)$$

έχουμε

(α) Το σήμα γράφεται ως

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2}{(z + 2)(z + 1)} \quad (15)$$

άρα έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = -1, z = -2$ και δυο μηδενικά στο $z = 0$.

(β) Εύκολο. :)

(γ) Αφού το σήμα έχει δυο πόλους επάνω στον πραγματικό άξονα, θα έχει τρία πιθανά πεδία σύγκλισης.

- $|z| > 2$
- $|z| < 1$
- $1 < |z| < 2$

(δ) Με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, το $X(z)$ γράφεται ως

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{A}{1 + 2z^{-1}} + \frac{B}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{1 + 2z^{-1}} - \frac{1}{1 + z^{-1}} \quad (16)$$

Για τα αντίστοιχα πεδία σύγκλισης όπως αναφέρθηκαν παραπάνω, θα είναι (μέσω των πινάκων ζευγών του μετασχηματισμού)

- $x[n] = 2(-2)^n u[n] - (-1)^n u[n]$
- $x[n] = (-2)^{n+1} u[-n - 1] + (-1)^n u[-n - 1]$
- $x[n] = (-2)^{n+1} u[-n - 1] - (-1)^n u[n]$

(ε) Για κανένα, γιατί κανένα πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο - υπάρχει πόλος στη θέση $z = -1$ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση 4.

(α) Είναι

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \quad (17)$$

κι αφού είναι ευσταθές τότε το πεδίο σύγκλισής του περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο και άρα

$$R_H : \left\{ \frac{1}{2} < |z| < 3 \right\}$$

Είναι

$$x[n] = u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \quad (18)$$

και άρα

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{4}{5} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{5} \frac{1}{1 - 3z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad 1 < |z| < 3 \quad (19)$$

αφού εφαρμόσαμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Αντιστρέφοντας στο χρόνο, έχουμε

$$y[n] = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] - \frac{1}{5} 3^n u[-n - 1] - u[n] \quad (20)$$

(β) Αφού η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει το άπειρο, τότε το $h[n]$ είναι αιτιατό. Δεδομένου ότι και το $x[n]$ είναι αιτιατό, θα είναι και το $y[n]$ αιτιατό. Άρα

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \quad (21)$$

$$Y(z) - \frac{7}{2} z^{-1} Y(z) + \frac{3}{2} Y(z) z^{-2} = z^{-2} X(z) \quad (22)$$

και στο πεδίο του χρόνου θα είναι

$$y[n] - \frac{7}{2} y[n - 1] + \frac{3}{2} y[n - 2] = x[n - 2] \quad (23)$$

Αφού $y[n] = 0$, $n < 0$, τότε με αναδρομικό τρόπο βρίσκουμε ότι

$$y[0] = 0, \quad y[1] = 0, \quad y[2] = 1 \quad (24)$$

(γ) Το αντίστροφο σύστημα θα είναι το

$$H_i(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 3z^{-1})}{z^{-2}} = (z - 1/2)(z - 3) = z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2} \quad (25)$$

με πεδίο σύγκλισης ολόκληρο το z -επίπεδο πλην του άπειρου, και άρα

$$h_i[n] = \delta[n + 2] - \frac{7}{2} \delta[n + 1] + \frac{3}{2} \delta[n] \quad (26)$$

Άσκηση 5.

Τα δοθέντα συστήματα γράφονται ως

$$H_1(z) = 6 + z^{-1} - z^{-2} = (1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) \quad (27)$$

$$H_2(z) = 1 - z^{-1} - 6z^{-2} = (1 - 3z^{-1})(1 + 2z^{-1}) \quad (28)$$

$$H_3(z) = 1 - \frac{5}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2} = (1 - 3z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) \quad (29)$$

$$H_4(z) = 1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} = (1 + 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) \quad (30)$$

Παρατηρούμε ότι ελάχιστης φάσης είναι το $H_1(z)$, εφόσον έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Άσκηση 6.

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 4z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})} \quad (31)$$

γράφεται ως

$$H(z) = \frac{z(z - 4)}{(z - 0.5)(z - 0.3)} \quad (32)$$

και άρα έχει δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 0$, $z = 4$, και δυο πόλους στις θέσεις $z = 1/2$ και $z = 3/10$. Προφανώς το μηδενικό εκτός μοναδιαίου κύκλου ($z = 4$) θα πρέπει να δημιουργήσει ένα σύστημα all-pass, ως συζυγές αμοιβαίο ζεύγος με τον πόλο $z = 1/4$, δηλ.

$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 4z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (33)$$

Το παραπάνω σύστημα δεν έχει μοναδιαία απόκριση πλάτους, οπότε

$$H_{ap}(z) = -4 \frac{z^{-1} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (34)$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει τα υπόλοιπα στοιχεία του αρχικού συστήματος, με την προσθήκη ενός μηδενικού στη θέση $z = 1/4$ που θα ακυρώνει τον πόλο του all-pass στην ίδια θέση. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})} \quad (35)$$

και με τη μεταφορά της σταθεράς -4 από το all-pass σύστημα, θα είναι

$$H_{min}(z) = \frac{z^{-1} - 4}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})}, \quad H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (36)$$

(β) Μπορούμε να βρούμε το σύστημα ελάχιστης φάσης απλά “καθρεπτίζοντας” το μηδενικό που βρίσκεται εκτός μοναδιαίου κύκλου στο συζυγές αμοιβαίο εντός του, με χρήση της αλλαγής

$$1 - az^{-1} \longrightarrow z^{-1} - a^* \quad (37)$$

με a το μηδενικό εκτός μοναδιαίου κύκλου, και στην περίπτωσή μας, $a = 4$. Οπότε

$$H_{min}(z) = \frac{z^{-1} - 4}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (38)$$