ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/10/2024 Ημερομηνία Παράδοσης: 4/11/2024

Άσκηση 1.

(α΄) Μπορούμε να βρούμε εύκολα την κρουστική απόκριση θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \tag{1}$$

(β΄) Το σύστημα είναι πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) και άρα ικανοποιεί τη συνθήκη ευστάθειας

$$\sum |h[n]| < +\infty \tag{2}$$

(γ΄) Έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2])e^{-j\omega n} = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \tag{3}$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega}) = e^{-j\omega}(2 + 2\cos(\omega)) = 2e^{-j\omega}(1 + \cos(\omega)) \tag{4}$$

(δ΄) Για την απόκριση πλάτους, έχουμε

$$|H(e^{j\omega})| = |2e^{-j\omega}(1 + \cos(\omega))| = 2|e^{-j\omega}||(1 + \cos(\omega))| = 2|1 + \cos(\omega)| \tag{5}$$

ενώ για την απόκριση φάσης

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle 2 + \angle e^{-j\omega} + \angle(1 + \cos(\omega)) = 0 + (-\omega) + 0 = -\omega \tag{6}$$

καθώς ο όρος $1 + \cos(\omega)$ είναι ≥ 0 για κάθε ω. Δείτε το Σχήμα 1.

(ε΄) Το νέο σύστημα θα έχει κρουστική απόκριση (με χρήση της ιδιότητας μετατόπισης στη συχνότητα) ως

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)}) \longleftrightarrow h_1[n] = e^{j\pi n}h[n] = (-1)^n h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \tag{7}$$

Εναλλακτικά

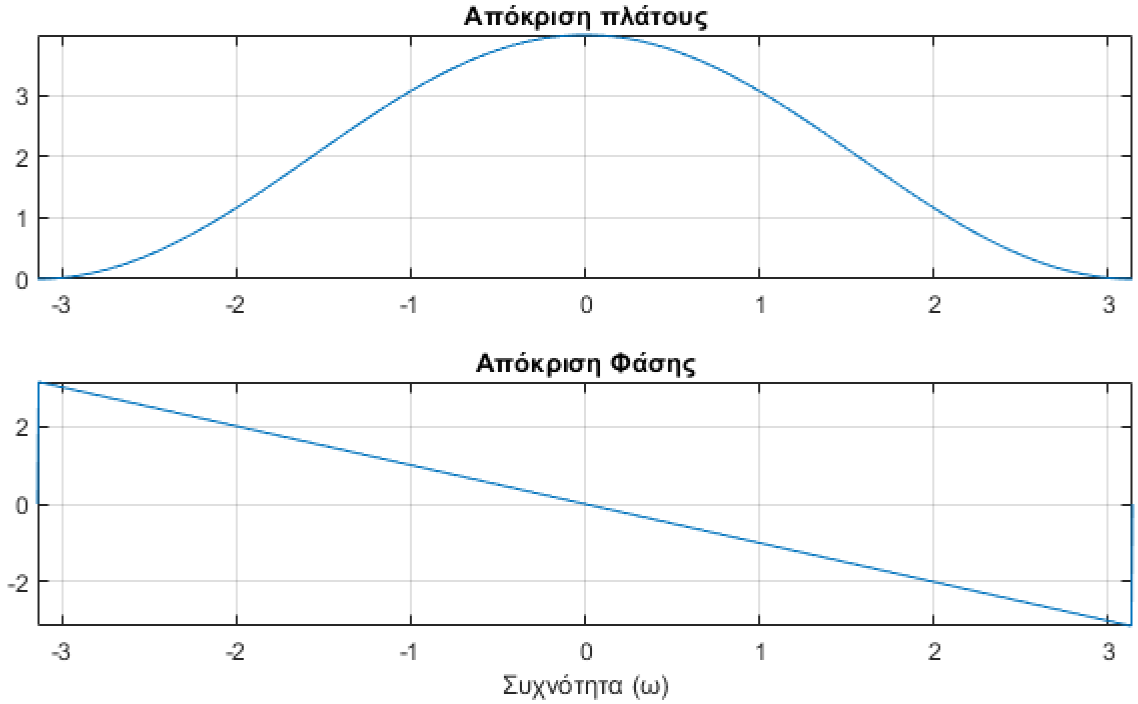
$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)}) = H(e^{j\omega}e^{-j\pi}) = H(-e^{j\omega}) \tag{8}$$

κι από το ερώτημα (γ) θα έχουμε

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\Big|_{e^{j\omega}:=-e^{j\omega}} = 1 - 2e^{-j\omega} + (-e^{-j\omega})(-e^{-j\omega}) = 1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \tag{9}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$h_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \tag{10}$$



Σχήμα 1: *Απόκριση πλάτους και φάσης 'σκησης 1.*

Άσκηση 2.

(α΄) Αν

$$X(e^{j\omega}) = \frac{3}{(1-0.5e^{-j\omega})^4} \tag{11}$$

τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=0} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} \tag{12}$$

Άρα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = X(e^{j0}) = \frac{3}{(1-0.5)^4} = \frac{3}{(0.5)^4} = 48 \tag{13}$$

(β΄) Αν

$$X(e^{j\omega}) = \cos^3(4\omega) \tag{14}$$

τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega n}\Big|_{\omega=\pi} = X(e^{j\pi}) \tag{15}$$

Άρα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] = X(e^{j\pi}) = \cos^3(4\pi) = (1)^3 = 1 \tag{16}$$

(γ΄) Είναι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-0.25e^{-j\omega}} e^{j\omega} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-0.25e^{-j\omega}} e^{j\omega n} d\omega\Big|_{n=1} = 2\pi(0.25)^n u[n]\Big|_{n=1} = 2\pi 0.25 = 0.5\pi \tag{17}$$

Άσκηση 3.

Το σύστημα $h[n]$ είναι μια καθυστερημένη κατά $n_0 = 1$ δείγματα και κλιμακωμένη κατά $A = 4$ έκδοση του γνωστού χαμηλοπερατού φίλτρου

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \longleftrightarrow H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{18}$$

Από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier έχουμε

$$h[n] = 4h_{lp}[n-1] \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = 4H_{lp}(e^{j\omega})e^{-j\omega} = \begin{cases} 4e^{-j\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{19}$$

με

$$|H(e^{j\omega})| = 4 \tag{20}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega \tag{21}$$

για $|\omega| < \frac{\pi}{2}$.

Είναι εμφανές ότι το φίλτρο αυτό κόβει συχνότητες που είναι εκτός του διαστήματος $(-\pi/2, \pi/2)$. Άρα η συνιστώσα $8\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$ δε θα περάσει στην έξοδο. Άρα στην έξοδο θα έχουμε (από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης) ότι

$$y[n] = 2|H(e^{j\pi/4})|\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \angle H(e^{j\pi/4})\right) \tag{22}$$

$$= 2 \times 4\cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{23}$$

$$= 8\cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right) \tag{24}$$

Άσκηση 4.

(α΄) Είναι

$$2Y(e^{j\omega}) - e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + 3e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) + 2e^{-j3\omega}X(e^{j\omega}) \tag{25}$$

και διαιρώντας με $X(e^{j\omega})$ έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j\omega}\frac{1 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\omega}} \tag{26}$$

(β΄) Τα συστήματα σε σειρά δίνουν συνολική απόκριση πλάτους ίση με το γινόμενο των επιμέρους αποκρίσεων πλάτους. Το πρώτο σύστημα έχει απόκριση πλάτους

$$|H_1(e^{j\omega})| = \left|\frac{e^{-j\omega} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right| = \frac{|e^{-j\omega} - \frac{1}{2}|}{|1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}|} = 1 \tag{27}$$

αφού ο αριθμητής $|e^{-j\omega} - \frac{1}{2}| = |e^{-j\omega}||1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}| = |1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}| = |1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}|$, ως συζυγείς παραστάσεις. Το δεύτερο σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H_2(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \tag{28}$$

με

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{29}$$

Άρα η απόκριση πλάτους του θα είναι

$$|H_2(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{30}$$

Συνολικά λοιπόν

$$|H_1(e^{j\omega})||H_2(e^{j\omega})| = 1 \times |H_2(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{31}$$