

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

Είναι

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] = \sum_{k=-\infty}^n \rho^k u[k] \quad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^n \rho^k = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} \quad (2)$$

για $n \geq 0$. Οπότε

$$s[n] = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} u[n] \quad (3)$$

Άσκηση 2.

i. Είναι εμφανές από το σχήμα ότι

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) = h_1[n] * h_2[n] + h_1[n] * h_3[n] \quad (4)$$

λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης.

ii. Θα είναι

$$h_1[n] * h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] * \delta[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] \quad (5)$$

λόγω ιδιοτήτων της συνάρτησης Δέλτα. Επίσης

$$h_1[n] * h_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k+2] u[n-k-1] = \sum_{k=-2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (6)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$= 8 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq -1 \quad (8)$$

αφού

$$u[k+2]u[n-k-1] = 1, \quad \text{για } -2 \leq k \leq n-1 \implies n \geq -1 \quad (9)$$

κι έτσι

$$h_1[n] * h_3[n] = 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1] \quad (10)$$

Οπότε συνολικά

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] + \left(8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) u[n+1] \quad (11)$$

Άσκηση 3.

- i. • Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο

$$y_1[n] = nx_1[n + 2]$$

Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι

$$y_2[n] = nx_2[n + 2]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = n(ax_1[n + 2] + bx_2[n + 2]) = nax_1[n + 2] + nbx_2[n + 2] = ay_1[n] + by_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε $|y[n]| = |n||x[n + 2]| < |n|B_x \rightarrow +\infty$, για μεγάλα n . Άρα είναι ασταθές.
- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα δεν είναι αιτιατό.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x_1[n] = x[n - n_0]$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = nx[n - n_0 + 2]$$

Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι

$$y[n - n_0] = (n - n_0)x[n - n_0 + 2] \neq nx[n - n_0 + 2]$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

- ii. • Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο

$$y_1[n] = \sin(x_1[n + 1]) - x_1[n]$$

Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι

$$y_2[n] = \sin(x_2[n + 1]) - x_2[n]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = \sin((ax_1[n + 1] + bx_2[n + 1])) - (ax_1[n] + bx_2[n]) \neq ay_1[n] + by_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι μη-γραμμικό.

- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = |\sin(x[n + 1]) - x[n]| \leq |\sin(x[n + 1])| + |x[n]| \leq 1 + |x[n]| < 1 + B_x$$

άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι μη αιτιατό.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x_1[n] = x[n - n_0]$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = \sin(x[n - n_0 + 1]) - x[n - n_0]$$

Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι

$$y[n - n_0] = \sin(x[n - n_0 + 1]) - x[n - n_0]$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά αμεταβλητό.

- iii. • Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο $y_1[n] = 2x_1[2^n]$. Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι

$$y_2[n] = 2x_2[2^n]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = 2(ax_1[2^n] + bx_2[2^n]) = 2ax_1[2^n] + 2bx_2[2^n]$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = 2|x[2^n]| < 2B_x$$

αρα το σύστημα είναι ευσταθές.

- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι μη αιτιατό (π.χ. $y[2] = 2x[4]$).
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

η έξοδος θα είναι

$$y[n] = 2x[2^n - n_0]$$

Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι

$$y[n - n_0] = 2x[2^{n-n_0}]$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

Άσκηση 4.

(α) Είναι

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-3]u[n-k] = \sum_{k=3}^n 1 = (n-3+1) = n-2, \quad n \geq 3 \quad (12)$$

αφού

$$u[k-3]u[n-k] = 1, \quad 3 \leq k \leq n \quad (13)$$

Άρα

$$c[n] = (n-2)u[n-3] \quad (14)$$

(β) Είναι

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k-2]u[n-k] = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (15)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad n \geq 2 \quad (16)$$

αφού

$$u[k-2]u[n-k] = 1, \quad 2 \leq k \leq n \quad (17)$$

Άρα

$$c[n] = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u[n-2] \quad (18)$$

(γ) Η γραφική λύση είναι διαισθητικότερη σε αυτήν την άσκηση αλλά ας δοκιμάσουμε την αλγεβρική λύση. Είναι

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]u[n-k-2] \quad (19)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} u[n-k-2]\gamma^k + \sum_{k=0}^{+\infty} u[n-k-2]\psi^k \quad (20)$$

Η βηματική $u[n-k-2]$ είναι ίση με 1, αν $k \leq n-2$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $n-2 < 0$: τότε

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-2} \gamma^k = \sum_{k=2-n}^{+\infty} (\gamma^{-1})^k = \frac{\gamma^{n-2}}{1-\gamma^{-1}} = \frac{\gamma^{n-1}}{\gamma-1}, \quad |\gamma| > 1 \quad (21)$$

- $n-2 \geq 0$: τότε

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma^k + \sum_{k=0}^{n-2} \psi^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma^{-k} + \sum_{k=0}^{n-2} \psi^k \quad (22)$$

$$= \frac{\gamma^{-1}}{1-\gamma^{-1}} + \frac{1-\psi^{n-1}}{1-\psi} = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1-\psi^{n-1}}{1-\psi}, \quad |\psi| < 1 \quad (23)$$

ωστε το δεύτερο άθροισμα να συγκλίνει. Συνολικά

$$c[n] = \frac{\gamma^{n-1}}{\gamma-1} u[-n+1] + \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1-\psi^{n-1}}{1-\psi} \right) u[n-2] \quad (24)$$

Άσκηση 5.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς εξίσωσης είναι $\gamma - \frac{1}{5}$, με χαρακτηριστική ρίζα το $\gamma = \frac{1}{5}$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad (25)$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$y[-1] = c \left(\frac{1}{5} \right)^{-1} = 5c = 1 \iff c = \frac{1}{5} \quad (26)$$

και έτσι

$$y_{zi}[n] = \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1}, \quad n \geq 0 = \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} u[n] \quad (27)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε το σύστημα

$$S_0 : y[n] - \frac{1}{5}y[n-1] = x[n] \quad (28)$$

με κρουστική απόκριση $h_0[n]$. Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τότε το σύστημα γράφεται ως

$$h[n] - \frac{1}{5}h[n-1] = \delta[n] \quad (29)$$

Η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_0[n] = c \left(\frac{1}{5} \right)^n, \quad n \geq 0 \quad (30)$$

Για $n = 0$, έχουμε $h[0] = 1$, και άρα $c = 1$, οπότε

$$h_0[n] = \left(\frac{1}{5} \right)^n u[n] \quad (31)$$

Η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος

$$S : y[n] - \frac{1}{5}y[n-1] = 2x[n] \quad (32)$$

που μας ζητείται θα είναι

$$h[n] = 2h_0[n] = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] \quad (33)$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι η απόκριση του συστήματος για την είσοδο $x[n]$ χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τις αρχικές συνθήκες. Έτσι

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k} u[k]u[n-k] \quad (34)$$

$$= 2 \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^{-k} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \left(-\frac{3}{5}\right)^k \quad (35)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 + \frac{3}{5}}, \quad n \geq 0 \quad (36)$$

αφού

$$u[k]u[n-k] = 1, \quad 0 \leq k \leq n \quad (37)$$

και έτσι

$$y_{zs}[n] = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 + \frac{3}{5}} u[n] \quad (38)$$

Οπότε συνολικά

$$y[n] = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 + \frac{3}{5}} \right) u[n] \quad (39)$$

και με λίγες ακόμα πράξεις στον 2ο όρο, καταλήγουμε στο

$$y_t[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{5}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \right] u[n] \quad (40)$$

Άσκηση 6.

- i. Ναι, είναι γιατί οι χαρακτηριστικές του ρίζες, $\gamma_1 = -0.3$ και $\gamma_2 = 0.2$, είναι μικρότερες της μονάδας.
- ii. Οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι $\gamma_1 = -1.3$ και $\gamma_2 = 0.2$, κι εφόσον η μια είναι μεγαλύτερη της μονάδας, τότε το σύστημα είναι ασταθές.