Σχεσιακός Λογισμός Πεδίων

Χαρίδημος Κονδυλάκης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών,
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σχεσιακός Λογισμός

- Γλώσσα βασισμένη στον Κατηγορηματικό Λογισμό 1ης Τάξης (First Order Predicate Calculus)
- Οι περισσότερες γλώσσες επερώτησης σχεσιακών βάσεων δεδομένων βασίζονται στον Σχεσιακό Λογισμό
- Σχεσιακός Λογισμός και Σχεσιακή Άλγεβρα έχουν την ίδια εκφραστική δύναμη
- Μια γλώσσα επερωτήσεων είναι πλήρης αν έχει την ίδια εκφραστική δύναμη με τη Σχεσιακή Άλγεβρα ή με τον Σχεσιακό Λογισμό
- Διακρίνεται σε
  - Σχεσιακό Λογισμό Πλειάδων (Tuple Relational Calculus - TRC)
  - Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων (Domain Relational Calculus - DRC)

Σχεσιακός Λογισμός Πεδίων

- Μεταβλητές: x, y, z, X, Y, Z, … x_1, x_2, … x_k
  - Οι τιμές των μεταβλητών είναι τιμές γνωρισμάτων των σχεσιακών πινάκων
- Σύμβολα Σχέσεων: R, S, T, … ενός *συγκεκριμένου βαθμού*
  - αντιστοιχούν σε *ονόματα σχέσεων*
- Ατομικές ή Βασικές Προτάσεις
  - $R(x_1, x_2, \ldots x_k)$ όπου R είναι ένα σύμβολο για σχέση k-βαθμού
    - $R(x_1, x_2, \ldots x_k)$ ισοδύναμη έκφραση με $(x_1, x_2, \ldots x_k) \in R$
  - επιτρέπεται η χρήση ίδιων μεταβλητών
  - $x\ \theta\ y$ όπου x, y είναι μεταβλητές και $\theta \in \{\leq, \geq, \neq, <, =, >\}$
  - $x\ \theta\ c$ όπου x είναι μεταβλητή, *c* είναι μια σταθερά, θ όπως πριν.

Προτάσεις Σχεσιακού Λογισμού

- Κάθε ατομική πρόταση, είναι πρόταση του σχεσιακού λογισμού.
- Αν οι F1, F2 είναι προτάσεις του σχεσιακού λογισμού, τότε και οι
  - $(F1 \wedge F2)$, $(F1 \vee F2)$, $\neg F1$, $(F1 \rightarrow F2)$
  - $(\exists\ x\ F)$ (υπάρχει μια τιμή της x ώστε η πρόταση F είναι αληθής)
  - $(\forall\ x\ F)$ (για κάθε τιμή της x, η πρόταση F είναι αληθής)

είναι προτάσεις του σχεσιακού λογισμού

Προτάσεις Σχεσιακού Λογισμού

- Προτεραιότητα τελεστών
  1. $\neg, \exists, \forall$: από αριστερά προς τα δεξιά
  2. $\wedge$ (σύζευξη) : από αριστερά προς τα δεξιά
  3. $\vee$ (διάζευξη) : από αριστερά προς τα δεξιά

Παράδειγμα:

✓ Η πρόταση $(\forall x_1) \neg P(x_1,x_2) \vee Q(x_2) \wedge R(x_1)$ ομαδοποιείται ως $(\forall x_1) (\neg P(x_1,x_2)) \vee (Q(x_2) \wedge R(x_1))$

Προτάσεις Σχεσιακού Λογισμού

- Οι προτάσεις του Σχεσιακού Λογισμού δηλώνουν σχέσεις (μπορεί και μη-πεπερασμένες)
- Κάθε πρόταση χρησιμοποιεί ένα σύνολο μεταβλητών
  - Ελεύθερες (free)
  - Δεσμευμένες (bound)

Η χρήση ενός ποσοδείκτη ($\exists$, $\forall$) δεσμεύει κάθε στιγμιότυπο της μεταβλητής που εισάγει ο ποσοδείκτης μέσα σε μια πρόταση

Παραδείγματα προτάσεων σχεσιακού λογισμού πεδίων

- Έστω R μια σχέση βαθμού 2
  1. $(\exists\, x)\ R(x,x)$
  2. $(\forall\, x)\ (\forall\, y)\ (\exists\, z)\ (R(x,y) \wedge R(y,z))$
  3. $(\exists\, z_1)\ (\exists\, z_2)\ (R(x, z_1) \wedge R(z_1, z_2) \wedge R(z_2, y))$
  4. $(\exists\, y)\ (\exists\, z)\ (R(x, y) \wedge R(x,z) \wedge R(y, z))$
- Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές
  - Στις (1), (2) δεν υπάρχει ελεύθερη μεταβλητή
  - Στην (3) ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x,y
  - Στην (4) ελεύθερη μεταβλητή είναι η x

Μια μεταβλητή είναι <u>ελεύθερη</u> αν πρέπει να <u>δεσμευτεί</u> σε μια τιμή ώστε να μπορούμε να κρίνουμε την πρόταση ως αληθή
Οι ελεύθερες μεταβλητές δεν σχετίζονται με ποσοδείκτες.

Προτάσεις Σχεσιακού Λογισμού Πεδίων

- Μια Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού Πεδίων έχει τη μορφή

  $$\{(x_1, x_2, \dots x_k) : F(x_1, x_2, \dots x_k)\}$$

  όπου F είναι μια πρόταση του σχεσιακού λογισμού και $x_1, x_2, \dots x_κ$ είναι ελεύθερες μεταβλητές
- Όταν μια έκφραση Σχεσιακού Λογισμού Πεδίων $\{(x_1, x_2, \dots x_k) : F(x_1, x_2, \dots x_k)\}$ αποτιμάται σε μια σχεσιακή βάση D επιστρέφει μια σχέση k-βαθμού η οποία περιέχει όλες εκείνες τις πλειάδες $(a_1, a_2, \dots a_k)$ που κάνουν αληθή την πρόταση F στη βάση D.

Παράδειγμα:

- Έκφραση $\{(x, z) : \exists y\, R(x,y) \wedge R(y,z)\}$ επιστρέφει όλα τα ζεύγη τιμών (a,b) για τις οποίες υπάρχει τιμή για την μεταβλητή y ώστε R(a,y) και R(y,b) να είναι αληθή.

Παράδειγμα (1)

`Customers(cid, cname,city,discount)`

- «Βρείτε τους κωδικούς και τα ονόματα των πελατών»
  - Σχέση: Customers
  - Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4
  - Ατομική Πρόταση: Customers(x_1, x_2, x_3, x_4)
  - Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

$\{(x_1, x_2) : (\exists\, x_3)\ (\exists\, x_4)\ \ \text{Customers}(x_1, x_2, x_3, x_4)\ \}$

Παράδειγμα (2)

`Customers(cid, cname,city,discount)`

- «Βρείτε τους κωδικούς και τα ονόματα των πελατών που ζουν στη Νέα Υόρκη»
  - Σχέση : Customers
  - Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4
  - Ατομική Πρόταση: Customers(x_1, x_2, x_3, x_4)
  - Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

$$\{(x_1, x_2):(\exists\, x_3)(\exists\, x_4)\ \ Customers(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge x_3 = \text{'NY'}\}$$

Παράδειγμα (3)

`Customers(cid, cname,city,discount)`

- «Βρείτε το αναγνωριστικό των πελατών με έδρα την Νέα Υόρκη που έχουν την μεγαλύτερη έκπτωση »

  - ✓ Σχέση : Customers
  - ✓ Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4
  - ✓ Ατομική Πρόταση: $Customers(x_1, x_2, x_3, x_4)$
  - ✓ Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού

$$\{x_1 : (\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(Customers(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge x_3 = \text{'NY'} \wedge (\forall y_1, y_2, y_3, y_4 (Customers(y_1, y_2, y_3, y_4) \wedge y_3 = \text{'NY'}) \rightarrow y_4 \leq x_4))\}$$

Σχεσιακός Λογισμός: Πράξη Σύζευξης

- Έστω R(A,B,C) και S(B, C, D) δυο σχέσεις βαθμού 3.
  - Η πράξη σύζευξης στην Σχεσιακή Άλγεβρα (Σ.Α.) R JOIN S εκφράζεται με τη χρήση των τελεστών επιλογής (σ), καρτεσιανού γινομένου ($\times$) και προβολής (π)

    $$R \text{ JOIN } S = \pi_{R.A,\ R.B,\ R.C,\ S.D}(\sigma_{R.B=S.B \wedge R.C=S.C}(R \times S))$$

  - Η έκφραση Σχεσιακού Λογισμού (Σ.Λ.) που εκφράζει την πράξη σύζευξης είναι

    $$\{ (x_1, x_2, x_3, x_4): R(x_1, x_2, x_3) \wedge S(x_2, x_3, x_4) \}$$

    - ✓ $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \pi_{R.A,\ R.B,\ R.C,\ S.D}$
    - ✓ $R(\dots) \wedge S(\dots) \rightarrow R \times S$
    - ✓ χρήση των ίδιων μεταβλητών $\rightarrow \sigma_{R.B=S.B \wedge R.C=S.C}$

Παράδειγμα (4a)

Products(pid, pname,city,quantity, price)

Orders(orderid,cid,aid,pid,qty,amt)

- «Βρείτε τα ονόματα και την τιμή των προϊόντων που παραγγέλνει ο πελάτης c002.»
  - Σχέση : Products
    - Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
  - Σχέση : Orders
    - Μεταβλητές: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$
  - Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού
    - $\{ (x_2, x_5) \mid (\exists x_1) (\exists x_3) (\exists x_4) (\exists y_1) (\exists y_2) (\exists y_3) (\exists y_4) (\exists y_5) (\exists y_6)$ $\text{Products}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \wedge \text{Orders}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \wedge y_2 = \text{“c002”} \wedge x_1 = y_4 \}$

Παράδειγμα (4b)

Products(pid, pname,city,quantity, price)

Orders(orderid,cid,aid,pid,qty,amt)

- «Βρείτε τα ονόματα και την τιμή των προϊόντων που παραγγέλνει ο πελάτης c002.»
  - Σχέση : Products
    - Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
  - Σχέση : Orders
    - Μεταβλητές: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$
  - Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού
    - $\{ (x_2, x_5) \mid (\exists x_1) (\exists x_3) (\exists x_4) (\exists y_1) (\exists y_3) (\exists y_5) (\exists y_6)$ $\text{Products}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \wedge \text{Orders}(y_1, c002, y_3, x_1, y_5, y_6) \}$

Παράδειγμα (5a)

```
(P) Products(pid, pname,city,quantity, price)
(O) Orders(orderid,cid,aid,pid,qty,amt)
```

- «Βρείτε τα <u>ονόματα</u> και την τιμή των προϊόντων που παραγγέλνει ο πελάτης c002 μέσω του πράκτορα a01»
  - <u>Σχέση</u> : Products
    - Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
  - <u>Σχέση</u> : Orders
    - Μεταβλητές: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$
  - <u>Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού</u>
    - $\{ (x_2, x_5) \mid (\exists x_1) (\exists x_3) (\exists x_4) (\exists y_1) (\exists y_2) (\exists y_3) (\exists y_4) (\exists y_5) (\exists y_6)$ $\text{Products}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \wedge \text{Orders}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \wedge$ $y_2 = \text{“c002”} \wedge y_3 = \text{“a01”} \wedge x_1 = y_4\}$

Παράδειγμα (5b)

(P) Products(<u>pid</u>, pname,city,quantity, price)

(O) Orders(<u>orderid</u>,cid,aid,pid,qty,amt)

- «Βρείτε τα <u>ονόματα</u> και την τιμή των προϊόντων που παραγγέλνει ο πελάτης c002 μέσω του πράκτορα a01»
  - <u>Σχέση</u> : Products
    - Μεταβλητές: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
  - <u>Σχέση</u> : Orders
    - Μεταβλητές: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$
  - <u>Έκφραση Σχεσιακού Λογισμού</u>
    - $\{ (x_2, x_5) \mid (\exists x_1) (\exists x_3) (\exists x_4) (\exists y_1) (\exists y_5) (\exists y_6)$ $\text{Products}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \wedge \text{Orders}(y_1, \text{c002}, \text{a01}, x_1, y_5, y_6)\}$

Σχεσιακός Λογισμός: Πράξη Διαίρεσης

- ✓ Η πράξη της διαίρεσης στην Σχεσιακή Άλγεβρα (Σ.Α.) $R \div S$ εκφράζεται με τη χρήση των τελεστών καρτεσιανού γινομένου ($\times$) προβολής (π) και αφαίρεσης ($-$).
  - Έστω σχέσεις R, S με $Head(R) = \{A_1, A_2, \ldots A_r, B_1, B_2, \ldots B_s\}$ και $Head(S) = \{B_1, B_2, \ldots B_s\}$ με $r,s \geq 0$.

    $R \div S := \pi_{A1, A2, \ldots Ar}(R) - \pi_{A1, A2, \ldots Ar}((\pi_{A1, A2, \ldots Ar}(R) \times S) - R)$
- Η σχέση $T = R \div S$
  - έχει βαθμό $r - s$ όπου r, s είναι οι βαθμοί της R, S αντίστοιχα
  - Περιέχει όλες τις πλειάδες $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-s})$ τέτοιες ώστε, για κάθε πλειάδα $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ της S, υπάρχει η πλειάδα $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-s}, b_1, b_2, \ldots, b_s)$ στην R.
- Έστω R(A,B,C,D,E) και S(C, D, E) δυο σχέσεις βαθμού 5 και 3.
  - Η έκφραση Σχεσιακού Λογισμού (Σ.Λ.) που εκφράζει την πράξη διαίρεσης για τις $R(x_1,x_2, x_3, x_4, x_5)$, $S(x_3,x_4,x_5)$ είναι

$$\{(x_1,x_2): (\forall x_3)(\forall x_4)(\forall x_5)(S(x_3,x_4,x_5) \rightarrow R(x_1,x_2, x_3, x_4, x_5))\}$$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

- *Θεώρημα 1:* Κάθε έκφραση της Σχεσιακής Άλγεβρας (Σ.Α.) μπορεί να εκφραστεί στον Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων (Σ.Λ.Π.)
- **Απόδειξη:** Χρησιμοποιώντας επαγωγή στον αριθμό των τελεστών της αλγεβρικής έκφρασης ότι για κάθε έκφραση *E* της Σ.Α. η οποία ορίζει μια σχέση βαθμού *k*, υπάρχει μια πρόταση F του Σ.Λ.Π. η οποία ορίζει την ίδια σχέση.
  - Βάση Επαγωγής: Αν Ε είναι μια σχέση R με βαθμό k, τότε η έκφραση Σ.Λ. είναι $\{(x_1,x_2,\ldots x_k): R(x_1,x_2,\ldots x_k)\}$
  - Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι για τις εκφράσεις Σ.Α. E_1, E_2, οι οποίες ορίζουν σχέσεις βαθμού *k*, υπάρχουν προτάσεις F_1, F_2 του Σ.Λ. οι οποίες ορίζουν τις ίδιες σχέσεις.
  - Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξουμε ότι υπάρχουν προτάσεις του Σ.Λ.Π. οι οποίες ορίζουν τις ίδιες σχέσεις με τις εκφράσεις: $E_1 \cup E_2$, $E_1 - E_2$, $\pi_X(E_1)$, $E_1 \times E_2$, $\sigma_F(E_1)$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

1. $E = E_1 \cup E_2$.
   - ✓ E_1 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1,x_2,\ldots x_k)$
   - ✓ E_2 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση $F_2(x_1,x_2,\ldots x_k)$

   όπου $x_1,x_2,\ldots x_k$ Σ.Λ.Π. ελεύθερες μεταβλητές

   - ✓ Έκφραση Σ.Λ.Π. για $E = E_1 \cup E_2$.

   $\{(x_1,x_2,\ldots x_k): F_1(x_1,x_2,\ldots x_k) \vee F_2\ (x_1,x_2,\ldots x_k)\}$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

2. $E = E_1 - E_2$
   - ✓ E_1 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1,x_2,\ldots x_k)$
   - ✓ E_2 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_2(x_1,x_2,\ldots x_k)$

   όπου $x_1,x_2,\ldots x_k$ ελεύθερες μεταβλητές

   - ✓ Έκφραση Σ.Λ.Π. για $E = E_1 - E_2$

   $\{(x_1,x_2,\ldots x_k): F_1(x_1,x_2,\ldots x_k) \wedge \neg F_2(x_1,x_2,\ldots x_k)\}$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

3. $E = E_1 \times E_2$
   - ✓ E_1 είναι σχέση n-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$
   - ✓ E_2 είναι σχέση m-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_2(y_1, y_2, \ldots y_m)$
   - ✓ $\{x_1, x_2, \ldots x_k \} \cap \{y_1, y_2, \ldots y_m\} = \emptyset$.
   - ✓ Έκφραση Σ.Λ. για $E = E_1 \times E_2$

$$\{(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m): F_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \wedge F_2 (y_1, y_2, \ldots y_m)\}$$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

4. $E = \pi_{\text{xi1, xi2, … xin}} (E_1)$
   - ✓ E_1 είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1,x_2,\ldots x_k)$
   - ✓ $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in}\} \cap \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots x_{jm}\} = \varnothing$ και
   - ✓ $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in}\} \cup \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots x_{jm}\} = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$
   - ✓ $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in}\} \subseteq \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$
   - ✓ $\{x_{j1}, x_{j2}, \ldots x_{jm}\} \subseteq \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$
   - ✓ Έκφραση Σ.Λ. για $\pi_{\text{xi1, xi2, … xin}} (E_1)$

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in}): (\exists x_{j1}) (\exists x_{j2}) \ldots (\exists x_{jm}) F_1(x_1, x_2, \ldots x_k)\}$$

Σχεσιακή Άλγεβρα → Σχεσιακό Λογισμό Πεδίων

5. $E = \sigma_{xi\,\theta\,xj}(E1)$.
   - ✓ είναι σχέση k-βαθμού - αντιστοιχεί στην πρόταση Σ.Λ.Π. $F_1(x_1,x_2,\ldots x_k)$
   - ✓ $x_i , x_j \in \{x_1,x_2,\ldots x_k\}$
   - ✓ Έκφραση Σ.Λ.
   - ✓ $\{(x_1, x_2, \ldots x_k): F_1(x_1, x_2, \ldots x_k) \wedge (x_i\, \theta\, x_j)\}$

Πεδίο Τιμών

- Κάθε μεταβλητή σε μια πρόταση του σχεσιακού λογισμού πεδίων παίρνει τιμές από ένα πεδίο τιμών
  - Περιλαμβάνει τις τιμές που εμφανίζονται στην ίδια την πρόταση σχεσιακού λογισμού πεδίων και στη βάση δεδομένων

- Το πεδίο τιμών μιας πρότασης F - dom(F) - ορίζεται ως η ένωση
  - των συνόλων όλων των σταθερών που εμφανίζονται στην F
  - τις προβολές των γνωρισμάτων όλων των σχέσεων της F

- dom(F): εξαρτάται από τις σχέσεις που βρίσκονται στην πρόταση F

Πεδία Τιμών – Παράδειγμα (9)

1. **Πρόταση:**
   - $F = P(x,y) \wedge Q\ (y,z) \vee x > 10 = (\ P(x,y) \wedge Q\ (y,z)\ ) \vee (\ x > 10)$

   Πεδίο Τιμών:
   - $dom(F) = \{10\} \cup \pi_x\ (P) \cup \pi_y\ (P) \cup \pi_y\ (Q) \cup \pi_z\ (Q)$
2. **Πρόταση:**
   - $F = \neg Reserves(x, y, z)$

   Πεδίο Τιμών:
   - $dom(F) = \pi_x\ (Reserves) \cup \pi_y\ (Reserves) \cup \pi_z\ (Reserves)$

Διαισθητικά, μια πρόταση λέγεται ανεξάρτητη πεδίου αν η σχέση την οποία ορίζει <u>δεν</u> μπορεί να περιέχει πλειάδες οι οποίες περιλαμβάνουν σταθερές που <u>δεν ανήκουν</u> στο πεδίο της

Προτάσεις Ανεξάρτητες Πεδίου

- *Ορισμός:* Έστω F $(x_1, x_2, \dots x_n)$ μια πρόταση στου Σ.Λ.Π. και dom(F) $\subseteq$ D με D ένα σύνολο τιμών.

  Ορίζουμε τη σχέση της F αναφορικά με το σύνολο τιμών D ως το σύνολο των πλειάδων $(a_1, a_2, \dots a_n)$ του D^n οι οποίες είναι τέτοιες ώστε, όταν κάθε x_i αντικατασταθεί με την τιμή a_i τότε η F $(a_1, a_2, \dots a_n)$ είναι αληθής.
- Η πρόταση F λέγεται ανεξάρτητη πεδίου αν η σχέση της αναφορικά με το D <u>δεν εξαρτάται</u> από το ίδιο το D.
- Αν η F είναι ανεξάρτητη πεδίου, τότε η σχέση της αναφορικά με οποιοδήποτε σύνολο D, είναι η ίδια με τη σχέση της αναφορικά με το σύνολο dom(F).

Παραδείγματα (10)

1. **Πρόταση:**
   - $F_1 = \neg R(x,y)$
- **Πεδίο Τιμών:**
  - $dom(F1) = \pi_x (R) \cup \pi_y (R)$
- F_1 δεν είναι ανεξάρτητη πεδίου.
  - Αν $D \supseteq dom(F1)$, τότε η σχέση που ορίζει η F1 αποτελείται από όλες τις πλειάδες που ανήκουν στο $D \times D$ και δεν ανήκουν στην R.
  - Έστω τιμή α, ανήκει στο D, και δεν ανήκει στο $dom(F_1)$.
  - Η πλειάδα (α, α) ανήκει στη σχέση που ορίζει η F_1 αναφορικά με το D, αλλά όχι στη σχέση της F_1 αναφορικά με το $dom(F_1)$.

Παραδείγματα (11)

2. **Πρόταση:**
   - $F_2 = (\exists y)\ (R(x,y) \vee Q(y,z)\ )$

Πεδίο Τιμών:

- $dom(F2) = \pi_x\,(R) \cup \pi_y\,(R) \cup \pi_y(Q) \cup \pi_Z\,(Q)$
- Έστω R = {(a,b), (c,d)} και Q= {(e,f)}
- dom(F2) = {a,b,c,d,e,f}

- F_2 δεν είναι ανεξάρτητη πεδίου.
  - Αν D = {a,b,c,d,e,f,g } $\supseteq$ dom(F2) τότε η πλειάδα (a,g) ανήκει στη σχέση που ορίζει η F2 αναφορικά με το D αλλά όχι στη σχέση που ορίζει αναφορικά με το dom(F2).

Παραδείγματα (12)

2. Πρόταση:

- $F_3 = (\exists y)\ (R(x,y) \wedge Q(y,z)\ )$

Πεδίο Τιμών:

- $dom(F3) = \pi_x (R) \cup \pi_y (R) \cup \pi_y (Q) \cup \pi_z (Q)$

- F_3 είναι ανεξάρτητη πεδίου.

1. Έστω (a,b) μια πλειάδα στη σχέση της F_3 αναφορικά με το σύνολο D.
2. Πρέπει να υπάρχει μια τιμή c τέτοια ώστε $R(a,c) \wedge Q(c,b)$ να είναι αληθής -- $(a,c) \in R$, $(c,b) \in Q$.
3. $a \in \pi_x (R)$, $b \in \pi_z (Q)$, και $\{a, b\} \in dom(F_3)$.
4. Για οποιοδήποτε $D \supset dom(F_3\ )$, το σύνολο των ζευγών τιμών στη σχέση της F_3 αναφορικά με το D θα είναι το ίδιο με τη σχέση της F_3 αναφορικά με το $dom(F_3)$.

Ασφαλείς Προτάσεις

- Η ανεξαρτησία πεδίου είναι μια έννοια η οποία αφορά τη σημασιολογία των προτάσεων του σχεσιακού λογισμού.
- Δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει αν μια πρόταση είναι ανεξάρτητη πεδίου
- Ασφαλείς προτάσεις: υποσύνολο των προτάσεων που είναι ανεξάρτητες πεδίου και ορίζουν πεπερασμένες σχέσεις.
  - **Παράδειγμα:** Η έκφραση $\{ (x, y) \mid \neg R(x,y) \}$ ορίζει μια μη-πεπερασμένη σχέση
- Υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος εξετάζει την σύνταξη των προτάσεων για να αποφασίσει αν μια πρόταση είναι ασφαλής ή όχι.

Ασφαλείς Προτάσεις

- *Ορισμός:* Μια πρόταση του Σ.Λ.Π. είναι ασφαλής αν:

1. Δεν χρησιμοποιείται ο καθολικός ποσοδείκτης $\forall$
2. Αν $F = F_1 \vee F_2$ τότε F_1 και F_2 έχουν τις ίδιες ελεύθερες μεταβλητές.
3. Για οποιαδήποτε υπο-πρόταση $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots F_m$ της F όλες οι ελεύθερες μεταβλητές των F_i πρέπει να είναι περιορισμένες:

   Μια μεταβλητή είναι περιορισμένη εάν

   a. είναι ελεύθερη σε μια υπο-πρόταση F_i όπου η F_i δεν είναι αριθμητική σύγκριση και δεν προηγείται η άρνηση $\neg$
   b. αν F_i είναι της μορφής $X = c$ όπου c είναι μια σταθερά τότε η X είναι περιορισμένη μεταβλητή
   c. αν F_i είναι της μορφής $X = Y$ και η Y είναι περιορισμένη, τότε η X είναι περιορισμένη.

4. Η F είναι ασφαλής αν είναι της μορφής $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots H_j \wedge \neg G \wedge I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots I_k$ και οι συζεύξεις ικανοποιούν τον παραπάνω κανόνα και αν τουλάχιστον ένα από τα H ή I δεν έχει άρνηση.

Παραδείγματα (13)

1. **Πρόταση :** x=y : δεν είναι ασφαλής
   - ✓ καμία από τις x, y δεν είναι περιορισμένη
2. **Πρόταση :** $(x=y) \wedge R(x,y)$: είναι ασφαλής
3. **Πρόταση :** $(x=y) \vee R(x,y)$: δεν είναι ασφαλής
4. **Πρόταση :** $R(x,y,z) \wedge \neg(Q(x,y) \vee S(y,z))$: δεν είναι ασφαλής
5. **Πρόταση :** $R(x,y,z) \wedge \neg Q(x,y) \wedge \neg S(y,z)$: ασφαλής
   - ✓ ισοδύναμη με την (4)