
HY 280 — Θεωρία Υπολογισμού

Ασκήσεις 7,8 — Κανονικές Γλώσσες, Κανονικές Εκφράσεις, ε-NFAs, DFAs
Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Οδηγίες για τις ασκήσεις

- **Ασκήσεις 1-6, 7a, 8:** Αποτελούν μέρος του παραδοτέου. Μόνο το (β) ερώτημα της άσκησης 7 είναι προαιρετικό.
- Κάποιες από τις ασκήσεις θα συζητηθούν εκτενώς στο φροντιστήριο της Παρασκευής, μην το χάσετε!

Άσκηση 1 (Βασικές ιδιότητες πράξεων γλωσσών). Έστω Σ ένα πεπερασμένο αλφάβητο και $A, B, L \subseteq \Sigma^*$ αυθαίρετες γλώσσες.

Να αποδείξετε τις ακόλουθες ισότητες:

(α') Η συνένωση με την κενή γλώσσα δίνει πάντοτε την κενή γλώσσα:

$$\emptyset \cdot L = L \cdot \emptyset = \emptyset.$$

(β') Η συνένωση με τη γλώσσα που περιέχει μόνο την κενή λέξη δεν αλλάζει τη γλώσσα:

$$\{\varepsilon\} \cdot L = L \cdot \{\varepsilon\} = L.$$

(γ') Για οποιεσδήποτε γλώσσες A, B , ισχύει:

$$(A \cup B)^* = (A^* \cdot B^*)^*.$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε τις δύο εγκλείσεις. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\varepsilon \in A^*, B^*$.

Άσκηση 2 (Περιγραφή γλωσσών). Για κάθε μία από τις παρακάτω κανονικές εκφράσεις πάνω στο $\Sigma = \{0, 1\}$, περιγράψτε με λόγια τη γλώσσα που ορίζει.

(α') $(0^*1^*)^*0$.

(β') $(01^*)^*0$.

(γ') $(00 + 11 + (01 + 10)(00 + 11)^*(01 + 10))^*$.

Άσκηση 3 (Απλοποίηση κανονικών εκφράσεων). Απλοποιήστε τις ακόλουθες κανονικές εκφράσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(α') $(00)^*0 + (00)^*$.

(β') $(0 + 1)(\varepsilon + 00)^+ + (0 + 1)$.

(γ') $(0 + \varepsilon)0^*1$.

Άσκηση 4 (Δυαδικές αναπαραστάσεις δυνάμεων του 4). Να βρείτε μια κανονική έκφραση για τη γλώσσα των δυαδικών αναπαραστάσεων των αριθμών 4^n , $n \geq 0$, χωρίς αρχικά μηδενικά.

Άσκηση 5 (Κατασκευή κανονικών εκφράσεων). Για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες πάνω στο $\Sigma = \{0, 1\}$, κατασκευάστε μία κανονική έκφραση.

- (α') Όλες οι συμβολοσειρές των οποίων το πέμπτο σύμβολο από τα δεξιά (δηλαδή δια-
βάζοντας από τα δεξιά προς τα αριστερά) είναι 0.
- (β') Όλες οι συμβολοσειρές που περιέχουν το 000 ή το 111 ως υποσυμβολοσειρά.
- (γ') Όλες οι συμβολοσειρές που δεν περιέχουν ούτε το 000 ούτε το 111 ως υποσυμβολο-
σειρά.

Άσκηση 6 (Ισοδυναμία κανονικών εκφράσεων). Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{0,1\}$. Γνω-
ρίζουμε ότι η κανονική έκφραση $(0+1)^*$ περιγράφει το σύνολο Σ^* όλων των δυαδικών
λέξεων. Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω κανονικές εκφράσεις είναι ισο-
δύναμη με την $(0+1)^*$.

(α') $R_1 = \varepsilon + 0(0+1)^* + 1(1+0)^*$.

(β') $R_2 = 0^* + 0^*1(0+1)^*$.

(γ') $R_3 = ((\varepsilon+0)(\varepsilon+1))^*$.

(δ') $R_4 = 0^*(10^*)^*$.

Υπόδειξη: Για κάθε έκφραση R_i , αποδείξτε ότι $L(R_i) = \Sigma^*$.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις δύο εγκλείσεις

$$L(R_i) \subseteq \Sigma^*, \quad \Sigma^* \subseteq L(R_i).$$

Η πρώτη εγκύλιση είναι άμεση. Για τη δεύτερη, θεωρήστε μία αυθαίρετη δυαδική λέξη
και βρείτε πώς μπορεί να διασπαστεί σύμφωνα με τη δομή της αντίστοιχης κανονικής
έκφρασης.

Άσκηση 7 (Αντιστροφή λέξεων και κλειστότητα κανονικών γλωσσών). Έστω Σ ένα
πεπερασμένο αλφάβητο.

Υπενθυμίζουμε ότι η αντιστροφή w^R μιας λέξης $w \in \Sigma^*$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$w^R = \begin{cases} \varepsilon, & \text{αν } w = \varepsilon, \\ x^R a, & \text{αν } w = ax, \quad a \in \Sigma, x \in \Sigma^*. \end{cases}$$

Για παράδειγμα,

$$(00101)^R = 10100.$$

Για κάθε γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$, ορίζουμε την αντίστροφη γλώσσα

$$L^R = \{w^R \mid w \in L\}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι, για κάθε γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$,

$$(L^*)^R = (L^R)^*.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της επανάληψης Kleene και την ιδιότητα

$$(xy)^R = y^R x^R.$$

(β') Να αποδείξετε ότι, αν η L είναι κανονική γλώσσα, τότε και η L^R είναι κανονική.

Υπόδειξη: Ξεκινήστε από ένα DFA που αναγνωρίζει τη L και κατασκευάστε ένα ε -
NFA για την L^R .

Αντιστρέψτε τη φορά όλων των μεταβάσεων και προσέξτε τι πρέπει να γίνει με τις
αρχικές και τις τελικές καταστάσεις.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του (α).

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}L^* L^* &= L^*, \\(w^R)^R &= w, \\(xy)^R &= y^R x^R.\end{aligned}$$

Άσκηση 8 (Κανονικές γλώσσες και διπλασιασμός συμβόλων). Έστω Σ ένα πεπερασμένο αλφάβητο. Ορίζουμε αναδρομικά τη συνάρτηση

$$\text{stutter} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

ως εξής:

$$\text{stutter}(w) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{αν } w = \varepsilon, \\ aa \cdot \text{stutter}(x), & \text{αν } w = ax, \quad a \in \Sigma, x \in \Sigma^*. \end{cases}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση stutter αντικαθιστά κάθε σύμβολο μιας λέξης με δύο διαδοχικά αντίγραφα του.

Για παράδειγμα, αν $\Sigma = \{0, 1\}$, τότε

$$\begin{aligned}\text{stutter}(\varepsilon) &= \varepsilon, \\ \text{stutter}(01) &= 0011, \\ \text{stutter}(101) &= 110011.\end{aligned}$$

Για κάθε γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$, ορίζουμε

$$\text{stutter}(L) = \{\text{stutter}(w) \mid w \in L\}.$$

Έστω τώρα L μία αυθαίρετη κανονική γλώσσα. Να αποδείξετε ότι η γλώσσα $\text{stutter}(L)$ είναι επίσης κανονική.

Υπόδειξη: Εφόσον η L είναι κανονική, υπάρχει DFA

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

που την αναγνωρίζει.

Κατασκευάστε ένα νέο αυτόματο M' που, για κάθε σύμβολο a , προσομοιώνει μια μετάβαση του M διαβάζοντας το ζεύγος aa . Αποδείξτε με επαγωγή πως $L(M') = \text{stutter}(L)$.