HY 280 - Θεωρία Υπολογισμού

Ασκήσεις -- Γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα και αυτόματα στοίβας

Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Οδηγίες. Όλες οι ασκήσεις είναι παραδοτέες.

Άσκηση 1 (Ισομήκης συνένωση)**.** Για δύο γλώσσες $A, B \subseteq \Sigma^*$ ορίζουμε την ισομήκη συνένωσή τους ως

$$\mathrm{EC}(A, B) = \{xy : x \in A,\ y \in B,\ |x| = |y|\}.$$

Αποδείξτε ότι αν οι A και B είναι κανονικές, τότε η $\mathrm{EC}(A, B)$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Άσκηση 2 (Λήμμα άντλησης και παλίνδρομες λέξεις)**.** Έστω B η γλώσσα όλων των παλίνδρομων λέξεων πάνω στο $\{0, 1\}$ που περιέχουν ίσο πλήθος 0 και 1.

(α′) Αποδείξτε με το λήμμα άντλησης ότι η B δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

(β′) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα για να αποδείξετε ότι οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα δεν είναι κλειστές ως προς την τομή.

Άσκηση 3 (Κατασκευή γραμματικών χωρίς συμφραζόμενα)**.** Κατασκευάστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις εξής γλώσσες:

(α′) $L_1 = \{a^i b^j c^k : i \neq j \ \vee \ j \neq k\}$.

(β′) $L_2 = \{a^i b^j a^k : i + k = j\}$.

Αιτιολογήστε σύντομα την ορθότητα των γραμματικών σας.

Άσκηση 4 (Μη αμφίσημη γραμματική)**.** ⋆ Κατασκευάστε μια μη αμφίσημη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα που παράγει τη γλώσσα των ορθά ισορροπημένων ακολουθιών παρενθέσεων. Αποδείξτε ότι η γραμματική σας είναι μη αμφίσημη.

Άσκηση 5 (Κατασκευή αυτομάτων στοίβας)**.** ⋆ Κατασκευάστε αυτόματα στοίβας (PDA) που αναγνωρίζουν τις εξής γλώσσες:

(α′) $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* : w = w^R\}$ (παλίνδρομες λέξεις).

(β′) Τη γλώσσα των ορθά ισορροπημένων ακολουθιών παρενθέσεων.

(γ′) $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = 2|w|_b\}$, δηλαδή τις λέξεις με διπλάσιο πλήθος a από b.

Μια ακριβής περιγραφή των καταστάσεων και των μεταβάσεων αρκεί. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα των κατασκευών σας.

Άσκηση 6 (Κλειστότητα ως προς την αντιστροφή)**.** ⋆⋆ Δίνεται ένα αυτόματο στοίβας M που αναγνωρίζει μια γλώσσα L. Κατασκευάστε ένα αυτόματο στοίβας που αναγνωρίζει τη γλώσσα

$$L^R = \{w^R : w \in L\},$$

όπου w^R είναι η αντίστροφη λέξη της w.

Άσκηση 7 (Εφαρμογή του αλγορίθμου CYK)**.** Δίνεται η ακόλουθη γραμματική σε κανονική μορφή Chomsky (CNF), με αρχικό σύμβολο S:

$$S \to AB \mid BC, \quad A \to BA \mid a,$$
$$B \to CC \mid b, \qquad C \to AC \mid a.$$

Έστω η λέξη $w = \mathsf{aabab}$.

(α′) Συμπληρώστε όλα τα κελιά του πίνακα του αλγορίθμου CYK. Στο κελί $T_{i,j}$ να αναγράψετε το σύνολο των μη τερματικών συμβόλων που παράγουν την υπολέξη $w_i \cdots w_j$ (οι θέσεις αριθμούνται από το 1).

(β′) Αποφασίστε αν $w \in L(G)$ και αιτιολογήστε την απάντησή σας με βάση τον πίνακα.

(γ′) Αν η λέξη ανήκει στη γλώσσα, ανακατασκευάστε ένα συντακτικό δέντρο (parse tree) από τον πίνακα CYK.

Άσκηση 8 (Μετατροπή σε κανονική μορφή Chomsky και συντακτικά δέντρα)**.** Δίνεται η γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G, με αρχικό σύμβολο S και κανόνες παραγωγής

$$S \to aSb \mid A, \qquad A \to cA \mid \varepsilon.$$

(α′) Μετατρέψτε τη G σε ισοδύναμη γραμματική G' σε κανονική μορφή Chomsky (CNF). Να παρουσιάσετε όλα τα ενδιάμεσα βήματα: εισαγωγή νέου αρχικού συμβόλου, απαλοιφή κανόνων ε, απαλοιφή μοναδιαίων κανόνων και μετατροπή των υπολοίπων κανόνων σε CNF. Διατηρήστε την κενή λέξη στη γλώσσα.

(β′) Σχεδιάστε ένα συντακτικό δέντρο για τη λέξη $w = \texttt{accb}$ στην αρχική γραμματική G.

(γ′) Σχεδιάστε ένα συντακτικό δέντρο για την ίδια λέξη στη γραμματική G'. Συγκρίνετε τα δύο δέντρα: ποιον ρόλο παίζουν οι νέες μεταβλητές;