
HY 280 — Θεωρία Υπολογισμού

Ασκήσεις 6 — Γλώσσες
Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Οδηγίες για τις ασκήσεις

- **Ασκήσεις 1-4:** Αποτελούν μέρος του παραδοτέου.

Άσκηση 1 (★ Πληθάριθος της συνένωσης). Για πεπερασμένες γλώσσες A, B υπάρχουν ακριβώς $|A||B|$ ζεύγη $(x, y) \in A \times B$, και κάθε ζεύγος παράγει τη συμβολοσειρά xy .

(α') Για $A = \{0, 1\}$ και $B = \{1, 2\}$ βρείτε το AB και συγκρίνετε το $|AB|$ με το $|A||B|$.

(β') Για $A = \{0, 01\}$ και $B = \{1, 11\}$ βρείτε το AB . Ισχύει $|AB| = |A||B|$;

(γ') Αποδείξτε ότι για πεπερασμένες γλώσσες A, B ισχύει

$$|AB| \leq |A||B|.$$

Άσκηση 2 (★★ Η γλώσσα $\{0, 10\}^*$). Έστω

$$L = \{0, 10\}^*$$

και έστω K η γλώσσα που περιέχει την ε και όλες τις μη κενές δυαδικές συμβολοσειρές που

(α') τελειώνουν σε 0, και

(β') δεν περιέχουν την υποσυμβολοσειρά 11.

(α') Γράψτε πέντε συμβολοσειρές του L και επαληθεύστε ότι ανήκουν στο K .

(β') Αποδείξτε ότι $L \subseteq K$.

(γ') Αποδείξτε ότι $K \subseteq L$.

(δ') Συμπεράνετε ότι $L = K$

Άσκηση 3 (★★ Συμπλήρωμα συμβολοσειράς). Για κάθε συμβολοσειρά $w \in \{0, 1\}^*$, ορίζουμε το *συμπλήρωμα* w^c αντικαθιστώντας κάθε 0 με 1 και κάθε 1 με 0.

Ισοδύναμα, η συνάρτηση συμπληρώματος ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$w^c = \begin{cases} \varepsilon, & w = \varepsilon, \\ 1x^c, & w = 0x, \\ 0x^c, & w = 1x. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι:

(α') Για κάθε $w \in \{0, 1\}^*$,

$$|w| = |w^c|.$$

(β') Για κάθε $x, y \in \{0, 1\}^*$,

$$(xy)^c = x^c y^c.$$

(γ') Για κάθε $w \in \{0,1\}^*$,

$$\#(1, w) = \#(0, w^c).$$

(δ') Για κάθε $w \in \{0,1\}^*$,

$$(w^R)^c = (w^c)^R.$$

(ε') Για κάθε $w \in \{0,1\}^*$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(w^n)^c = (w^c)^n.$$

Άσκηση 4 (★★ Αντιστροφή γλώσσας). Υπενθυμίζουμε ότι η *αντιστροφή* w^R μιας συμβολοσειράς w ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$w^R = \begin{cases} \varepsilon, & w = \varepsilon, \\ x^R a, & w = ax, \end{cases}$$

όπου $a \in \Sigma$ και $x \in \Sigma^*$.

Η *αντιστροφή* μιας γλώσσας L ορίζεται ως

$$L^R = \{w^R \mid w \in L\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε γλώσσα L , $(L^*)^R = (L^R)^*$.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$L^* L^* = L^*, (w^R)^R = w, (xy)^R = y^R x^R.$$