

HY 280 — Θεωρία Υπολογισμού

Ασκήσεις 5 — Συμβολοσειρές

Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Οδηγίες για τις ασκήσεις

- **Ασκήσεις 1-4:** Αποτελούν μέρος του παραδοτέου.
- Στην Άσκηση 1, για τις ερωτήσεις Σωστό/Λάθος δεν χρειάζεται να γράψετε αιτιολόγηση. Θα πρέπει, ωστόσο, να γνωρίζετε την αιτιολόγηση της απάντησής σας.
- Όπου ζητείται επαγωγή, γράψτε καθαρά βάση, επαγωγική υπόθεση και βήμα.
- **Αξιοποιήστε τις ώρες γραφείου** αφού πρώτα προσπαθήσετε τις ασκήσεις.

Άσκηση 1 (★ Έλεγχος κατανόησης). Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$ και $x, y, z \in \Sigma^*$.

Σωστό ή Λάθος.

(α') Αν $|xy| = |xz|$, τότε $y = z$.

(β') Αν $xy = xz$, τότε $y = z$.

(γ') Για κάθε x, y , $(xy)^R = x^R y^R$.

(δ') Αν x είναι prefix της y , τότε x^R είναι suffix της y^R .

(ε') Αν $xy = yx$, τότε $x = y$.

(ζ') Αν $xyz = \varepsilon$, τότε $x = y = z = \varepsilon$.

Άσκηση 2 (★ Η αναδρομική συνάρτηση *hanoi*). Ορίζουμε

$$\text{hanoi}(w) = \begin{cases} \varepsilon, & w = \varepsilon, \\ \text{hanoi}(x) a \text{ hanoi}(x), & w = ax. \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε $\text{hanoi}(0)$, $\text{hanoi}(01)$ και $\text{hanoi}(010)$.

(β') Αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$|\text{hanoi}(w)| = 2^{|w|} - 1$$

για κάθε w .

Άσκηση 3 (★★ Αναδρομικά ορισμένη γλώσσα). Ορίζουμε $L \subseteq \{0, 1\}^*$ ως τη μικρότερη γλώσσα που ικανοποιεί:

- $\varepsilon \in L$,
- αν $x, y \in L$, τότε $0x1y0 \in L$.

(α') Δείξτε ότι $010 \in L$, $001010 \in L$ και $00101010010 \in L$.

(β') Αποδείξτε με δομική επαγωγή ότι κάθε $w \in L$ ικανοποιεί

$$\#_0(w) = 2\#_1(w).$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε $\#_a(xy) = \#_a(x) + \#_a(y)$.

(γ') Δώστε συμβολοσειρά με διπλάσια 0 από 1 που δεν ανήκει στη L .

Άσκηση 4 (★★ Η συνάρτηση καταμέτρησης). Για σύμβολο $a \in \Sigma$ και $w \in \Sigma^*$, έστω $\#(a, w)$ το πλήθος εμφανίσεων του a στη w .

(α') Δώστε αναδρομικό ορισμό της

$$\# : \Sigma \times \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}.$$

(β') Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \Sigma$ και $x, y \in \Sigma^*$,

$$\#(a, xy) = \#(a, x) + \#(a, y).$$

(γ') Αποδείξτε ότι για κάθε $w \in \Sigma^*$,

$$|w| = \sum_{a \in \Sigma} \#(a, w).$$