

HY 280 — Θεωρία Υπολογισμού

Ασκήσεις 4ης διάλεξης: Επαγωγή

Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Πώς να δουλέψετε το φύλλο.

- Οι Ασκήσεις 1, 2, 3 είναι παραδοτέες.
- Η άσκηση με τη **νιφάδα του Koch** είναι **προαιρετική**, αλλά συνιστάται. Συνδέει την επαγωγή με τη γεωμετρία και τις λέξεις πάνω σε ένα αλφάβητο, οδηγώντας σε ένα εντυπωσιακό αποτέλεσμα: ένα σχήμα με άπειρη περίμετρο αλλά πεπερασμένο εμβαδόν! Δοκιμάστε να την προσεγγίσετε βήμα προς βήμα, ακόμη κι αν δεν ολοκληρώσετε όλα τα ερωτήματα.
- **Ξεκινήστε νωρίς και ελάτε στις ώρες γραφείου**
- Σύμβαση: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Άσκηση 1 (Πύργοι του Ανόι). Έχουμε n δίσκους διαφορετικού μεγέθους στον στύλο A , με τον μεγαλύτερο στη βάση, και θέλουμε να τους μεταφέρουμε στον στύλο C , με βοηθητικό τον B . Σε κάθε κίνηση μετακινούμε έναν δίσκο από την κορυφή ενός στύλου, χωρίς να τον τοποθετήσουμε ποτέ πάνω σε μικρότερο.

- (α) Περιγράψτε αναδρομικό αλγόριθμο και γράψτε την αναδρομική σχέση $H(n)$ για το πλήθος των κινήσεών του.
- (β) Αποδείξτε ότι $H(n) = 2^n - 1$.
- (γ) ★ Δείξτε ότι *κάθε* αλγόριθμος χρειάζεται τουλάχιστον $2^n - 1$ κινήσεις. Γιατί το (β) μόνο του δεν το δείχνει αυτό;

Άσκηση 2 (Δυαδική αναπαράσταση).

Αποδείξτε με ισχυρή επαγωγή ότι κάθε ακέραιος $n \geq 1$ έχει δυαδική αναπαράσταση, δηλαδή γράφεται ως $n = \sum_{i=0}^r b_i 2^i$ με $b_i \in \{0, 1\}$ και $b_r = 1$.

Άσκηση 3 (Δύο ακολουθίες, μία επαγωγική πρόταση). Οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) ορίζονται ταυτόχρονα ως εξής:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n, \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (α) Υπολογίστε τα ζεύγη (a_n, b_n) για $n = 0, 1, 2, 3$.
- (β) Αποδείξτε *ταυτόχρονα* ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$A(n) : a_n = \frac{3^n + 1}{2}, \quad B(n) : b_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

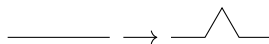
Όπως στο παράδειγμα του διακόπτη στις διαφάνειες, χρησιμοποιήστε την πρόταση $Q(n) := A(n) \wedge B(n)$.

- (γ) Ένας φοιτητής υποθέτει μόνο την $A(k)$, αλλά στον υπολογισμό του $a_{k+1} = 2a_k + b_k$ αντικαθιστά και το b_k με $(3^k - 1)/2$, χωρίς άλλη αιτιολόγηση. Ποιο είναι το κενό και πώς το αποφεύγει η απόδειξη του (β);

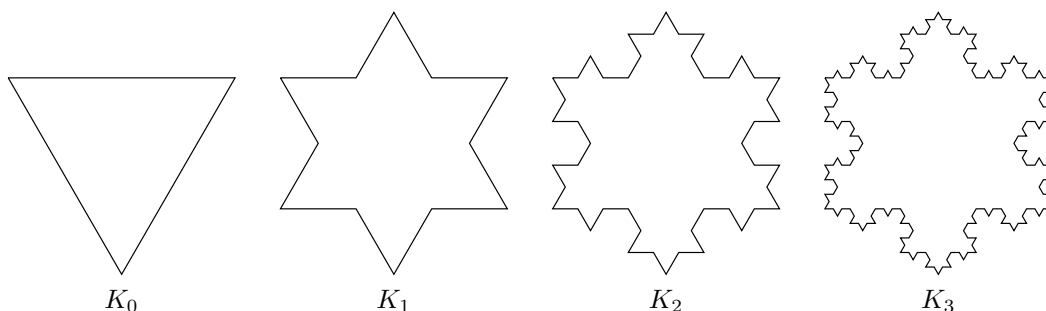
Άσκηση 4 (★★★) Η νιφάδα του Koch: άπειρη περίμετρος, πεπερασμένο εμβαδόν).

Η νιφάδα του Koch κατασκευάζεται αναδρομικά μέσω μιας ακολουθίας πολυγωνικών χωρίων $K_0, K_1, K_2, \dots$. Κάθε χωρίο περιλαμβάνει το εσωτερικό και το σύνορό του.

- K_0 : ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1.
- K_{n+1} : κάθε πλευρά του συνόρου του K_n χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα. Στο μεσαίο τρίτο κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο προς το εξωτερικό του K_n . Αντικαθιστούμε το μεσαίο τρίτο με τις δύο άλλες πλευρές του νέου τριγώνου:



Το K_{n+1} είναι το νέο χωρίο που προκύπτει.



Έστω N_n το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων του συνόρου του K_n , ℓ_n το μήκος καθενός, $P_n = N_n \ell_n$ η περίμετρος και A_n το εμβαδόν του K_n .

- (α) **Πλήθος τμημάτων και περίμετρος.** Υπολογίστε τα N_n, ℓ_n, P_n για $n = 0, 1, 2$. Γράψτε αναδρομικές σχέσεις για τα N_{n+1} και ℓ_{n+1} και αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$N_n = 3 \cdot 4^n, \quad \ell_n = 3^{-n} \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Βρείτε έναν τύπο για την P_n . Τι συμβαίνει στην περίμετρο καθώς $n \rightarrow \infty$;

- (β) **Η αναδρομική σχέση του εμβαδού.** Εξηγήστε γιατί στο πέρασμα $K_n \rightarrow K_{n+1}$ προστίθενται ακριβώς N_n ισόπλευρα τρίγωνα, το καθένα με πλευρά $\ell_n/3$. Συμπεράνετε ότι

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad A_{n+1} = A_n + N_n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\ell_n}{3} \right)^2.$$

Μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένο ότι τα εσωτερικά των νέων τριγώνων είναι ξένα μεταξύ τους και δεν τέμνουν το K_n . Κοινές πλευρές ή κορυφές επιτρέπονται.

- (γ) **Πεπερασμένο εμβαδόν.** Αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Συμπεράνετε ότι $A_n < \frac{8}{5} A_0$ για κάθε $n \geq 0$ και υπολογίστε το $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει αντίφαση με το αποτέλεσμα του (α).

- (δ) **★ Από το σχήμα στη λέξη.** Το σύνορο μπορεί να περιγραφεί και ως λέξη πάνω στο αλφάβητο $\Sigma = \{F, +, -\}$, όπως στη χελώνα της Logo.

Κατά τη σχεδίαση της λέξης w_n , τα σύμβολα ερμηνεύονται ως εξής:

- F : προχώρα κατά 3^{-n} ,
- $+$: στρίψε 60° αριστερά,
- $-$: στρίψε 60° δεξιά.

Ξεκινάμε με

$$w_0 = F--F--F.$$

Η w_{n+1} προκύπτει από τη w_n αν αντικαταστήσουμε ταυτόχρονα κάθε εμφάνιση του F σύμφωνα με τον κανόνα

$$F \mapsto F+F--F+F.$$

Τα σύμβολα $+$ και $-$ παραμένουν ως έχουν.

Αποδείξτε με επαγωγή ότι το πλήθος των εμφανίσεων του F στη w_n είναι $3 \cdot 4^n$ και ότι

$$|w_n| = 7 \cdot 4^n.$$

Το $|w_n|$ μετρά όλα τα σύμβολα της λέξης, όχι μόνο τις εμφανίσεις του F .