

HY 280 — Θεωρία Υπολογισμού

Ασκήσεις 3ης διάλεξης
Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Πώς να δουλέψετε το φύλλο.

- Η πλειοψηφία είναι ασκήσεις βασικής κατανόησης: πρώτα ένας υπολογισμός για να «πιάσετε» τον ορισμό, μετά μια μικρή απόδειξη που μιμείται ένα παράδειγμα από τις διαφάνειες και, τέλος, μια μικρή παραλλαγή.
- Οι ασκήσεις με ★ είναι λίγο πιο απαιτητικές.
- **Ξεκινήστε νωρίς και ελάτε στις ώρες γραφείου**
- Σύμβαση: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- **Παραδοτέες στο τέλος του εξαμήνου από αυτό το φύλλο.** Οι υπόλοιπες θα παραμείνουν για προαιρετική εξάσκηση.

Ενότητα	Ασκήσεις για παράδοση
Σύνολα, υποσύνολα, δυναμοσύνολο	2, 6
Ζεύγη, σχέσεις, συναρτήσεις	9, 12, 14
Ισοπληθικότητα, αριθμησιμότητα, dovetailing	16, 17, 18, 19, 20
Γραφήματα, ιδιότητες σχέσεων, κλειστότητες	24, 27
Συνεπαγωγή, αντιθετοαντιστροφή, ποσοδείκτες	33, 34
Τεχνικές απόδειξης	37, 39

1 Σύνολα, υποσύνολα, δυναμοσύνολο

Άσκηση 1 (Υπολογισμός). Έστω σύμπαν $Q = \{p, q, r, s\}$, $A = \{p, q\}$ και $B = \{q, r\}$. Υπολογίστε τα $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $Q \setminus A$ και $Q \setminus (A \cap B)$. Επαληθεύστε στο παράδειγμα ότι $Q \setminus (A \cup B) = (Q \setminus A) \cap (Q \setminus B)$.

Άσκηση 2 (Σωστό ή λάθος;). Αιτιολογήστε σύντομα την απάντησή σας για κάθε πρόταση.

- (α) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- (β) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- (γ) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
- (δ) $\{p\} \in \{p, q\}$
- (ε) $\{p\} \subseteq \{p, q\}$
- (στ) $\{p, p, q\} = \{q, p\}$
- (ζ) $|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$

Άσκηση 3 (Μίμηση του παραδείγματος των διαφανειών). Για σύνολα A, B δείξτε ότι $A \subseteq B \iff A \cap B = A$. Αποδείξτε ρητά και τις δύο κατευθύνσεις.

Άσκηση 4 (Διπλός εγκλεισμός). Για $A, B \subseteq Q$ δείξτε ότι $A \setminus B = A \cap (Q \setminus B)$.

Άσκηση 5 (Νόμος De Morgan). Για $A, B \subseteq Q$ αποδείξτε ότι $Q \setminus (A \cup B) = (Q \setminus A) \cap (Q \setminus B)$.

Άσκηση 6 (Δυναμοσύνολα). (α) Γράψτε όλα τα στοιχεία του $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Πόσα είναι;

(β) Υπολογίστε τα $\mathcal{P}(\emptyset)$ και $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

(γ) Πόσα στοιχεία έχει το $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{p\}))$;

Άσκηση 7 (★). Δείξτε ότι $S \subseteq T \iff \mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T)$.

2 Ζεύγη, σχέσεις, συναρτήσεις

Άσκηση 8 (Καρτεσιανό γινόμενο). Για $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{x, y\}$ γράψτε τα $A \times B$ και $B \times A$. Πόσα στοιχεία έχει το καθένα; Είναι ίσα;

Άσκηση 9 (Σχέση ή συνάρτηση). Έστω $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{x, y\}$. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις $A \rightarrow B$;

(α) $\{(1, x), (2, x), (3, y)\}$

(β) $\{(1, x), (2, y)\}$

(γ) $\{(1, x), (2, x), (3, x)\}$

(δ) $\{(1, x), (1, y), (2, x), (3, y)\}$

(ε) $\emptyset$

★ Πόσες συναρτήσεις $A \rightarrow B$ υπάρχουν; Πόσες σχέσεις $R \subseteq A \times B$;

Άσκηση 10 (Σχέση ως συνάρτηση με τιμές σύνολα). Έστω $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$.

(α) Για $R = \{(1, x), (1, y), (3, y)\}$ υπολογίστε τα $F_R(1), F_R(2), F_R(3)$.

(β) Αντίστροφα: αν $F(1) = \{y\}$, $F(2) = \{x, y\}$, $F(3) = \emptyset$, ποια είναι η σχέση R ;

(γ) Για ποιες σχέσεις R ισχύει $|F_R(a)| = 1$ για κάθε $a \in A$;

Άσκηση 11 (Εικόνα). Βρείτε την εικόνα καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 3$

(β) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(z) = z^2$

(γ) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(n) = \lfloor n/2 \rfloor$

Άσκηση 12 (Το σύνολο άφιξης έχει σημασία). Συμπληρώστε τον πίνακα με Ναι/Όχι και δώστε αντιπαράδειγμα για κάθε «Όχι».

Συνάρτηση	1-1	Επί
$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f_1(n) = n + 3$		
$f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f_2(z) = z + 3$		
$f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f_3(z) = z^2$		
$f_4 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f_4(n) = \lfloor n/2 \rfloor$		
$f_5 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f_5(n) = 2n + 1$		
$f_6 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f_6(z) = -z$		

Άσκηση 13 (Απόδειξη 1-1 / επί). Θεωρήστε τον τύπο $x \mapsto 3x + 7$.

(α) Δείξτε ότι η $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + 7$, είναι 1-1 αλλά όχι επί.

(β) Δείξτε ότι η $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $g(x) = 3x + 7$, είναι αμφιμονοσήμαντη και βρείτε την g^{-1} .

Άσκηση 14 (Αντίστροφη σχέση). (α) Για $\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ με $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 1$, γράψτε την π^{-1} ως σύνολο ζευγών και ελέγξτε ότι είναι συνάρτηση.
 (β) Για $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, h(z) = |z|$, εξηγήστε γιατί η h^{-1} δεν είναι συνάρτηση $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.
 (γ) Για $h' : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, h'(z) = |z|$, βρείτε έναν δεύτερο λόγο για τον οποίο η h'^{-1} δεν είναι συνάρτηση $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Άσκηση 15 (★ Σύνθεση). Για $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$ ορίζουμε $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Δείξτε ότι:

- (α) αν οι f, g είναι 1-1, τότε και η $g \circ f$ είναι 1-1.
- (β) αν οι f, g είναι επί, τότε και η $g \circ f$ είναι επί.

Συμπεράνετε ότι αν $|A| = |B|$ και $|B| = |C|$, τότε $|A| = |C|$.

3 Ισοπληθικότητα, αριθμησιμότητα, dovetailing

Άσκηση 16 (Ξενοδοχείο του Hilbert). Δώστε αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις (α) $\mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$, (β) $\mathbb{N} \rightarrow \{10, 11, 12, \dots\}$, (γ) $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 3, 6, 9, \dots\}$. Αποδείξτε το (α) πλήρως. Τι λέει το (α) για ένα άπειρο σύνολο και ένα γνήσιο υποσύνολό του;

Άσκηση 17 (Η άσκηση των διαφανειών: οι ακέραιοι).

Η απαρίθμηση $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ ορίζει μια συνάρτηση $e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

- (α) Υπολογίστε τα $e(0), \dots, e(6)$.
- (β) Δώστε κλειστό τύπο για την e (με περιπτώσεις).
- (γ) Δώστε την αντίστροφη $e^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ και ελέγξτε ότι $e^{-1}(e(n)) = n$.

Άσκηση 18 (Dovetailing με και χωρίς επικάλυψη). (α) Για $A = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{3n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ γράψτε τους πρώτους 8 όρους της $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots$

- (β) Για $A = \{2n\}$ και $B = \{3n\}$ (τα σύνολα δεν είναι ξένα) γράψτε τους πρώτους 8 όρους μετά την παράλειψη επαναλήψεων.
- (γ) Γιατί η παράλειψη επαναλήψεων δεν «χάνει» κανένα στοιχείο;

Άσκηση 19 (Κωδικοποίηση ζευγών). Με $\pi(i, j) = T_{i+j} + j$, όπου $T_s = \frac{s(s+1)}{2}$, υπολογίστε τα $\pi(0, 0), \pi(1, 1), \pi(3, 0), \pi(0, 3), \pi(2, 2)$ και $\pi(4, 3)$. Για καθένα γράψτε ρητά «διαγώνιος, αρχή, μετατόπιση».

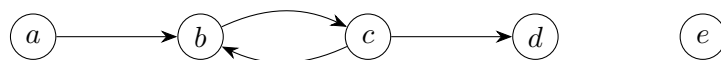
Άσκηση 20 (Αποκωδικοποίηση (φροντιστήριο)). (α) Σε ποια διαγώνιο βρίσκεται το $n = 5$; Ποιο ζεύγος είναι το $\pi^{-1}(5)$;

- (β) Βρείτε με τον ίδιο τρόπο τα $\pi^{-1}(11), \pi^{-1}(20), \pi^{-1}(31)$.
- (γ) Περιγράψτε τη γενική διαδικασία: δεδομένου n , βρείτε s , μετά j , μετά i .
- (δ) ★ Δείξτε ότι $s = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right\rfloor$.

Άσκηση 21 (★ Τριάδες). Δείξτε ότι $|\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, χρησιμοποιώντας τη π δύο φορές.

4 Γραφήματα, ιδιότητες σχέσεων, κλειστότητες

Σε όλη την ενότητα χρησιμοποιούμε το γράφημα των διαφανειών: $V = \{a, b, c, d, e\}$ και $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d)\}$.



Άσκηση 22 (Διαδρομές). (α) Είναι η a, c, d διαδρομή; Είναι η a, b, c, b, c, d ; Τι μήκος έχει; (β) Βρείτε διαδρομή μήκους ακριβώς 4 από το a στο c . (γ) Υπάρχει διαδρομή μήκους ακριβώς 2 από το a στο d ; Μήκους 3;

Άσκηση 23 (Ιδιότητες σχέσεων). Για κάθε σχέση αποφασίστε αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- (α) Στο $\{1, 2, 3\}$: $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$.
- (β) Στο $\{1, 2, 3\}$: $R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$.
- (γ) Στο $\{1, 2, 3\}$: $R_3 = \emptyset$.
- (δ) Στο $\mathbb{N}$: $x \leq y$.
- (ε) Στο $\mathbb{Z}$: $x \sim y \iff x - y$ άρτιος. Αποδείξτε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας.

Άσκηση 24 (Δυνάμεις μιας σχέσης). Για το R του γραφήματος υπολογίστε τα R^2 , R^3 , R^+ και R^* . Ισχύει $(a, a) \in R^+$; $(b, b) \in R^+$; Εξηγήστε τη διαφορά.

Άσκηση 25 (★ Η R^+ είναι μεταβατική). Χρησιμοποιώντας την ερμηνεία « $(u, v) \in R^k$ σημαίνει διαδρομή μήκους ακριβώς k », δείξτε ότι η R^+ είναι μεταβατική.

Άσκηση 26 (Διάδοχοι και κλειστά σύνολα). (α) Υπολογίστε τα $\text{Post}_R(\{a\})$, $\text{Post}_R(\{b, c\})$ και $\text{Post}_R(\{d, e\})$.

- (β) Ποια από τα $\emptyset$, $\{a\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, c, d\}$, V είναι R -κλειστά;

Άσκηση 27 (Υπολογισμός κλειστότητας). Με την επανάληψη $S_0 = S$, $S_{i+1} = S_i \cup \text{Post}_R(S_i)$ υπολογίστε τα $\text{cl}_R(\{c\})$, $\text{cl}_R(\{e\})$ και $\text{cl}_R(\{a, e\})$, δείχνοντας τον πίνακα των γύρων.

Άσκηση 28 (★ Ιδιότητες κλειστότητας από τον ορισμό). Χρησιμοποιώντας μόνο τον χαρακτηρισμό « $\text{cl}_R(S)$ είναι το μικρότερο R -κλειστό σύνολο που περιέχει το S » (ιδιότητες 1-3 της διαφάνειας 31), δείξτε:

- (α) μονοτονία: $S \subseteq T \Rightarrow \text{cl}_R(S) \subseteq \text{cl}_R(T)$.
- (β) ιδιοδυναμία: $\text{cl}_R(\text{cl}_R(S)) = \text{cl}_R(S)$.
- (γ) αν τα C_1, C_2 είναι R -κλειστά, τότε και το $C_1 \cap C_2$ είναι R -κλειστό.

5 Συνεπαγωγή, αντιθετοαντιστροφή, ποσοδείκτες

Άσκηση 29 (Πίνακες αλήθειας). Κατασκευάστε τον πίνακα αλήθειας των $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow P$ και $\neg P \vee Q$. Ποιες από αυτές είναι λογικά ισοδύναμες;

Άσκηση 30 (Αντίστροφη και αντιθετοαντίστροφη). Για κάθε πρόταση γράψτε την αντίστροφη και την αντιθετοαντίστροφη, και αποφασίστε ποιες είναι αληθείς.

- (α) Για $n \in \mathbb{Z}$: αν $6 \mid n$, τότε $3 \mid n$.
- (β) Για σύνολα A, B : αν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$.
- (γ) Για $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$: αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε είναι 1-1.

Άσκηση 31 (Κενή αλήθεια). (α) Είναι αληθής η πρόταση «κάθε στοιχείο του $\emptyset$ είναι άρτιος αριθμός»; Και η «κάθε στοιχείο του $\emptyset$ είναι περιττός αριθμός»;

- (β) Γράψτε την πρώτη στη μορφή $\forall x (x \in \emptyset \rightarrow P(x))$ και εξηγήστε με τον πίνακα αλήθειας.

Άσκηση 32 (Άρνηση). Γράψτε την άρνηση καθεμιάς πρότασης μεταφέροντας το $\neg$ «προς τα μέσα», και αποφασίστε ποια από τις δύο (πρόταση ή άρνηση) είναι αληθής.

(α) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 2$

(β) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$

(γ) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : x + y = 0$

(δ) «Η $f : A \rightarrow B$ είναι 1-1» και «η $f : A \rightarrow B$ είναι επί» (ως τύποι με ποσοδείκτες).

Άσκηση 33 (Σειρά ποσοδεικτών). Στο $\mathbb{Z}$, ποιες προτάσεις είναι αληθείς; Για κάθε αληθή δώστε μάρτυρα και για κάθε ψευδή δώστε αντιπαράδειγμα στην άρνησή της.

(α) $\forall x \exists y : y < x$ (β) $\exists y \forall x : y < x$ (γ) $\exists y \forall x : x + y = x$

Τι αλλάζει στην (α) αν αντικαταστήσουμε το $\mathbb{Z}$ με το $\mathbb{N}$;

Άσκηση 34 (Η δομή «για κάθε υποψήφιο, ένα αντιπαράδειγμα»). Μια $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ λέγεται *φραγμένη* αν $\exists M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq M$.

(α) Γράψτε τον ορισμό του «μη φραγμένη» με ποσοδείκτες.

(β) Αποδείξτε ότι η $f(n) = n$ είναι μη φραγμένη.

(γ) Συγκρίνετε τη δομή με τη διαφάνεια της μη υπολογισιμότητας: ποιο παίζει τον ρόλο του αλγορίθμου P και ποιο της εισόδου D ;

Άσκηση 35 (Όριο ακολουθίας). (α) Δείξτε ότι $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: για δοσμένο $\varepsilon > 0$ βρείτε ρητά ένα N .

(β) Δείξτε ότι $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. (Υπόδειξη: υπολογίστε το $|a_n - 1|$.)

(γ) ★ Δείξτε ότι η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει. Ξεκινήστε γράφοντας την άρνηση του ορισμού.

6 Τεχνικές απόδειξης

Άσκηση 36 (Ευθεία απόδειξη). (α) Δείξτε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων είναι περιττός.

(β) Δείξτε ότι αν ο x είναι περιττός, τότε ο $x^2 + 3x + 5$ είναι περιττός.

Άσκηση 37 (Αντιθετοαντιστροφή). (α) Για $x \in \mathbb{Z}$: αν ο $5x - 7$ είναι άρτιος, τότε ο x είναι περιττός.

(β) Για $a, b \in \mathbb{R}$: αν $a + b \geq 20$, τότε $a \geq 10$ ή $b \geq 10$.

Γράψτε πρώτα ρητά την αντιθετοαντίστροφη και μετά αποδείξτε την.

Άσκηση 38 (Περιπτώσεις). (α) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο $n^2 + n$ είναι άρτιος.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$: $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$.

(γ) ★ Δείξτε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε $8 \mid n^2 - 1$.

Άσκηση 39 (Απόδειξη με αντίφαση). (α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει μικρότερος θετικός ρητός αριθμός.

(β) Δείξτε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το «αν ο n^2 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος» από τις διαφάνειες.

Άσκηση 40 (Κατασκευαστική απόδειξη). (α) Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε ο $n^2 + n + 41$ να μην είναι πρώτος. (Υπόδειξη: δοκιμάστε ένα n που κάνει τον 41 να εμφανίζεται ως κοινός παράγοντας. Αν θέλετε γράψτε ένα προγραμματάκι Python εναλλακτικά.)

- (β) Γέφυρα με χρόνους 1, 2, 5, 8: δείξτε ότι όλοι μπορούν να περάσουν σε 15 λεπτά.
- (γ) ★ Γέφυρα με χρόνους 1, 20, 21, 22: υπολογίστε τον χρόνο της στρατηγικής «ο 1 συνοδεύει όλους» και της στρατηγικής των διαφανειών (οι δύο αργοί μαζί). Ποια είναι καλύτερη εδώ; Τι μας διδάσκει αυτό για το τι αποδεικνύει μια κατασκευή;