

HY 280 — Θεωρία Υπολογισμού

Ασκήσεις 2ης διάλεξης
Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Οδηγίες για τις ασκήσεις

- **Ασκήσεις 1-4:** Αποτελούν μέρος του παραδοτέου των ασκήσεων του μαθήματος.
- **Άσκηση 4 (★★★):** Είναι απαιτητική. Ασχοληθείτε μαζί της μόνο αφού έχετε ολοκληρώσει και κατανοήσει τις τρεις πρώτες ασκήσεις.
- **Άσκηση 5 — προαιρετική:** Δεν αποτελεί μέρος του παραδοτέου, αλλά μέρος της περιέργειας που χαρακτηρίζει έναν επιστήμονα υπολογιστών: μπορεί ένα πρόγραμμα να εκτυπώσει τον ίδιο του τον κώδικα; Η άσκηση είναι αρκετά απαιτητική, ιδιαίτερα αν συναντάτε για πρώτη φορά την έννοια της αυτοαναφοράς. Χρειάζεται ένα ευρηματικό τέχνασμα, οπότε μην απογοητευτείτε αν δεν το ανακαλύψετε αμέσως! Αν δεν νιώθετε ακόμη άνετα με κάποια γλώσσα προγραμματισμού, προτείνω να την αφήσετε.
- **Αξιοποιήστε τις ώρες γραφείου** για τις απορίες σας, αφού κατανοήσετε τις ασκήσεις και τις προσπαθήσετε.

Άσκηση 1 (★ Διαγωνιοποίηση και προτιμήσεις παγωτού). Τρεις μαθητές δηλώνουν ποιες γεύσεις παγωτού τούς αρέσουν:

	Σοκολάτα	Βανίλια	Φράουλα
James	Ναι	Όχι	Ναι
Joe	Όχι	Όχι	Ναι
John	Ναι	Ναι	Ναι

Ένα *προφίλ προτιμήσεων* είναι μια τριάδα απαντήσεων «Ναι» ή «Όχι», μία για κάθε γεύση με την παραπάνω σειρά.

- (α') Κατασκευάστε ένα προφίλ που διαφέρει από εκείνο του James στη σοκολάτα, του Joe στη βανίλια και του John στη φράουλα.
- (β') Εξηγήστε γιατί το προφίλ σας είναι διαφορετικό από καθένα από τα τρία δοσμένα προφίλ. Χρειάζεται να διαφέρει από κάθε μαθητή και στις τρεις γεύσεις;
- (γ') Κωδικοποιήστε το «Ναι» με 1 και το «Όχι» με 0. Αν a_{ij} είναι η απάντηση του i -οστού μαθητή για την j -οστή γεύση, δώστε έναν τύπο για την i -οστή απάντηση b_i του νέου προφίλ.
- (δ') Γενικεύστε: δίνονται n μαθητές και n γεύσεις, όπου $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι μπορείτε πάντοτε να κατασκευάσετε ένα προφίλ διαφορετικό από τα προφίλ όλων των μαθητών, ακόμη και αν κάποιοι μαθητές έχουν ίδιες προτιμήσεις.

Άσκηση 2 (★★ Το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Στόχος της άσκησης είναι να αποδείξετε ότι το διάστημα $(0, 1)$ είναι μη αριθμήσιμο.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει μια λίστα $x_1, x_2, x_3, \dots$ που περιέχει όλους τους αριθμούς του $(0, 1)$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots \\ x_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

όπου $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εξής γνωστό γεγονός: κάθε πραγματικός αριθμός στο $(0, 1)$ έχει μοναδική δεκαδική ανάπτυξη που δεν τελειώνει σε άπειρα 9. Για κάθε x_i επιλέγουμε αυτή την ανάπτυξη.

- (α') Τι συμβολίζει το a_{ij} ; Ποια ψηφία βρίσκονται στη διαγώνιο του παραπάνω πίνακα;
 (β') Γιατί αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αριθμό $y \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $y \neq x_i$ για κάθε $i \geq 1$;
 (γ') Θέλουμε να κατασκευάσουμε τον αριθμό

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

χρησιμοποιώντας μόνο τα ψηφία 1 και 2. Συμπληρώστε τον κανόνα ώστε $b_i \neq a_{ii}$:

$$b_i = \begin{cases} \text{—}, & \text{αν } a_{ii} = 1, \\ \text{—}, & \text{αν } a_{ii} \neq 1. \end{cases}$$

- (δ') Αν τα πρώτα πέντε ψηφία της διαγωνίου είναι 1, 4, 2, 1, 0, ποια είναι τα πρώτα πέντε ψηφία του y ;
 (ε') Αποδείξτε ότι $y \in (0, 1)$.
 (ς') Γνωρίζουμε ότι

$$0,5000\dots = 0,4999\dots$$

Γιατί η διαφορά σε ένα δεκαδικό ψηφίο δεν αρκεί γενικά για να συμπεράνουμε ότι δύο αριθμοί διαφέρουν; Εξηγήστε γιατί το πρόβλημα αυτό δεν εμφανίζεται στη συγκεκριμένη κατασκευή.

- (ζ') Αποδείξτε ότι $y \neq x_i$ για κάθε $i \geq 1$ και ολοκληρώστε την απόδειξη. Χρειάζεται ο y να διαφέρει από τον x_i σε όλα τα ψηφία;
 (η') Κάποιος προτείνει: «Ας προσθέσουμε τον y στην αρχή της λίστας. Τώρα η λίστα είναι πλήρης!» Εξηγήστε γιατί η πρόταση αυτή δεν επιλύει το πρόβλημα.

Άσκηση 3 (★★ Η λογική μορφή της διαγωνιοποίησης). Έστω μη κενό σύνολο S . Μια συνάρτηση $f: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow S$ περιγράφει τη λίστα

$$f(1), f(2), f(3), \dots$$

Επιτρέπονται επαναλήψεις στοιχείων.

- (α') Για δεδομένη συνάρτηση f , γράψτε με ποσοδείκτες: «Η λίστα που περιγράφει η f περιέχει κάθε στοιχείο του S ».
 (β') Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα, διατυπώστε συμβολικά: «Υπάρχει πλήρης λίστα των στοιχείων του S ».
 (γ') Αρνηθείτε την πρόταση του προηγούμενου ερωτήματος. Μεταφέρετε την άρνηση προς τα μέσα, αλλάζοντας διαδοχικά τους ποσοδείκτες, μέχρι να εμφανιστεί μόνο μια ανισότητα στο εσωτερικό. Σε κάθε βήμα αναφέρετε τον κανόνα που χρησιμοποιείτε.

(δ') Με βάση τον τελικό τύπο, συμπληρώστε:

- Μας δίνεται μια αυθαίρετη _____.
- Πρέπει να βρούμε ένα _____.
- Πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε $i \geq 1$, _____.

Το στοιχείο που βρίσκουμε επιτρέπεται να εξαρτάται από τη λίστα f ; Αιτιολογήστε.

(ε') Ένας φοιτητής γράφει:

$$\exists s \in S \forall f : \mathbb{N}_{>0} \rightarrow S \forall i \geq 1 : s \neq f(i).$$

Τι ισχυρίζεται αυτός ο τύπος; Γιατί είναι ψευδής για κάθε μη κενό S ;

Υπόδειξη: για ένα υποψήφιο s , εξετάστε τη σταθερή λίστα $f(i) = s$.

Άσκηση 4 (★★★ Διαγωνιοποίηση και σταθερά σημεία). Έστω T ένα μη κενό σύνολο και $f : T \rightarrow T$ μια συνάρτηση *χωρίς σταθερά σημεία*, δηλαδή

$$f(t) \neq t \quad \text{για κάθε } t \in T.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε μη κενό σύνολο S , δεν υπάρχει επί συνάρτηση

$$g : S \longrightarrow T^S,$$

όπου

$$T^S = \{h \mid h : S \rightarrow T\}$$

είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το S στο T .

Άσκηση 5 (★★★★ Ένα πρόγραμμα που εκτυπώνει τον εαυτό του). Στη γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας, γράψτε ένα *quine*: ένα πρόγραμμα του οποίου η έξοδος είναι ακριβώς ο ίδιος ο πηγαίος κώδικάς του.

Το πρόγραμμα δεν πρέπει να δέχεται είσοδο ούτε να διαβάζει το αρχείο του πηγαίου κώδικά του. Προσέξτε τα εισαγωγικά, τα κενά και τις αλλαγές γραμμής.

Εξηγήστε πώς το πρόγραμμά σας επιτυγχάνει την αυτοαναπαραγωγή του χωρίς να διαβάζει τον εαυτό του από κάποιο αρχείο.