HY 280 --- Θεωρία Υπολογισμού
Ασκήσεις Διαλέξεων 11, 12 -- Λήμμα Άντλησης και Myhill--Nerode
Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Οδηγίες. Όλες οι ασκήσεις είναι παραδοτέες.

Άσκηση 1 (Κλειστότητα και γινόμενο αυτομάτων)**.** Έστω $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ κανονικές γλώσσες.

(α′) Αποδείξτε με κατασκευή DFA ότι η συμμετρική διαφορά $L_1 \triangle L_2$ είναι κανονική.

(β′) Αν L_1 είναι οι λέξεις με άρτιο πλήθος 0 και L_2 οι λέξεις με άρτιο πλήθος 1, κατασκευάστε DFA για τη συμμετρική διαφορά (πίνακας μεταβάσεων αρκεί).

Άσκηση 2 (Λήμμα άντλησης: αυστηρή ανισότητα)**.** Αποδείξτε ότι $A = \{0^i 1^j : i, j \geq 0,\ i > j\}$ δεν είναι κανονική, χρησιμοποιώντας το λήμμα άντλησης. Να αντιμετωπίσετε *κάθε* νόμιμη διάσπαση.

Άσκηση 3 (Λήμμα άντλησης: τέλειοι κύβοι)**.** Έστω $B = \{1^{n^3} : n \geq 0\}$. Δείξτε ότι η B δεν είναι κανονική. *Υπόδειξη:* συγκρίνετε $p^3 + t$ με $(p+1)^3$.

Άσκηση 4 (Αποφασισιμότητα για DFA)**.** Έστω DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ με $n = |Q|$.

(α′) Περιγράψτε αλγόριθμο προσβασιμότητας που αποφασίζει αν $L(M) = \varnothing$.

(β′) Περιγράψτε αλγόριθμο που αποφασίζει αν $L(M)$ είναι άπειρη, χρησιμοποιώντας κύκλους στον γράφο μεταβάσεων. Αιτιολογήστε την ορθότητα και τον τερματισμό.

(γ′) Δώστε παράδειγμα DFA με κύκλο που αναγνωρίζει πεπερασμένη γλώσσα.

Υπενθύμιση Myhill--Nerode. Για $L \subseteq \Sigma^*$ ορίζουμε $x \equiv_L y$ όταν για κάθε $z \in \Sigma^*$ ισχύει $xz \in L \iff yz \in L$. Ένα επίθημα z που κάνει ακριβώς μία από τις xz, yz αποδεκτή *διακρίνει* τις x, y. Η L είναι κανονική αν και μόνο αν η σχέση έχει πεπερασμένο πλήθος κλάσεων. Ο αριθμός κλάσεων ισούται με το πλήθος καταστάσεων του ελάχιστου DFA.

Άσκηση 5. $\star$ Έστω $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ τελειώνει σε } 01\}$.

(α′) Δείξτε ότι οι ε, 0, 01 ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις, δίνοντας διακριτικά επιθήματα.

(β′) Κατασκευάστε DFA με τρεις καταστάσεις για τη L και αποδείξτε ότι είναι ελάχιστο.

Άσκηση 6. $\star\star\star$ Για κάθε σταθερό $k \geq 1$, έστω

$$L_k = \{w \in \{0,1\}^* : |w| \geq k \text{ και το } k\text{-οστό σύμβολο από το τέλος είναι } 1\}.$$

(α′) Δείξτε ότι οι 2^k δυαδικές λέξεις μήκους k είναι ανά δύο μη ισοδύναμες. Αν δύο λέξεις διαφέρουν στη θέση j από αριστερά, δοκιμάστε επίθημα μήκους $j - 1$.

(β′) Κατασκευάστε DFA με 2^k καταστάσεις για τη L_k. *Υπόδειξη:* αποθηκεύστε τα τελευταία k σύμβολα, συμπληρώνοντας αρχικά με 0.

(γ′) Συμπεράνετε το ακριβές πλήθος καταστάσεων του ελάχιστου DFA. Γιατί δεν αντιφάσκει αυτό με την ύπαρξη μικρού NFA για την ίδια γλώσσα;