

Άσκηση 1 (Αστέρι του Kleene). Έστω L μια γλώσσα.

(α') Έστω $\emptyset$ η κενή γλώσσα. Αποδείξτε ότι

$$\emptyset^* = \{\varepsilon\}.$$

(β') Αποδείξτε ότι

$$(L^*)^* = L^* \quad \text{και} \quad L^*L^* = L^*.$$

Άσκηση 2 (Βασικές ταυτότητες γλωσσών). Έστω A, B, C γλώσσες. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες:

(α') $A \cup B = B \cup A$.

(β') $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(γ') $\emptyset A = A\emptyset = \emptyset$.

(δ') $\{\varepsilon\}A = A\{\varepsilon\} = A$.

(ε') $(AB)C = A(BC)$.

(ζ') $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

(η') $(A \cup B)C = AC \cup BC$.

Άσκηση 3 (Πληθάριθμος της συνένωσης). Για πεπερασμένες γλώσσες A, B υπάρχουν ακριβώς $|A||B|$ ζεύγη $(x, y) \in A \times B$, και κάθε ζεύγος παράγει τη συμβολοσειρά xy .

(α') Για $A = \{0, 1\}$ και $B = \{1, 2\}$ βρείτε το AB και συγκρίνετε το $|AB|$ με το $|A||B|$.

(β') Για $A = \{0, 01\}$ και $B = \{1, 11\}$ βρείτε το AB . Ισχύει $|AB| = |A||B|$;

(γ') Αποδείξτε ότι για πεπερασμένες γλώσσες A, B ισχύει

$$|AB| \leq |A||B|.$$

Άσκηση 4 (Η γλώσσα $\{0, 10\}^*$). Έστω

$$L = \{0, 10\}^*$$

και έστω K η γλώσσα που περιέχει την ε και όλες τις μη κενές δυαδικές συμβολοσειρές που:

- τελειώνουν σε 0, και
- δεν περιέχουν την υποσυμβολοσειρά 11.

(α') Γράψτε πέντε συμβολοσειρές του L και επαληθεύστε ότι ανήκουν στο K .

(β') Αποδείξτε ότι $L \subseteq K$.

(γ') Αποδείξτε ότι $K \subseteq L$.

(δ') Συμπεράνετε ότι $L = K$

Άσκηση 5 (Συμπλήρωμα συμβολοσειράς). Για κάθε συμβολοσειρά $w \in \{0,1\}^*$, ορίζουμε το *συμπλήρωμα* w^c αντικαθιστώντας κάθε 0 με 1 και κάθε 1 με 0.

Ισοδύναμα, η συνάρτηση συμπληρώματος ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$w^c = \begin{cases} \varepsilon, & w = \varepsilon, \\ 1x^c, & w = 0x, \\ 0x^c, & w = 1x. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι:

(α') Για κάθε $x, y \in \{0,1\}^*$,

$$(xy)^c = x^c y^c.$$

(β') Για κάθε $w \in \{0,1\}^*$,

$$\#(1, w) = \#(0, w^c).$$