

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**  
**Εαρινό Εξάμηνο 2024-25**  
**Διδάσκων: Γ. Καφεντζής**  
**Εξέταση Προόδου**

**Θέμα 1 - Βαθμός: 20**

**Σωστό ή λάθος;** Δικαιολογήστε επαρκώς. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

(α') (2 μ.) Ισχύει

$$\operatorname{Im}\{(1+j)(\cos(t)+j\sin(t))\} = \sin(t) + \cos(t)$$

(β') (2 μ.) Ένα περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{1}{1+|k|} e^{j\pi/4}$$

είναι πραγματικό.

(γ') (2 μ.) Ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση έχει χαρακτηριστικές ρίζες

$$-3, -2, -1, 1$$

και έτσι το σύστημα είναι ασταθές.

(δ') (2 μ.) Αν  $z_1 = j$  μια ρίζα ενός *οποιοιδήποτε* πολυωνύμου τότε υποχρεωτικά ρίζα είναι και ο  $z_2 = -j$ .

(ε') (2 μ.) Για  $\epsilon > 0$ ,

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t-2\epsilon) dt = 1$$

(ς') (2 μ.) Ο τετραγωνικός παλμός

$$x(t) = \operatorname{rect}(t)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = u(t+1) - u(t-1)$$

(ζ') (2 μ.) Η περίοδος του σήματος

$$x(t) = -2\cos(2\pi 100t) + 4\sin(2\pi 60t)$$

ισούται με  $T_0 = 20$  s.

(η') (2 μ.) Το σήμα

$$x(t) = |t|$$

είναι σήμα ενέργειας.

(θ') (2 μ.) Ισχύει

$$u(at) = u(t)$$

για κάθε  $a > 0$ .

(ι') (2 μ.) Ισχύει

$$\sin(2\pi t)\delta(t+1) = 0$$

Λύση:

(α') Σωστό,

$$\operatorname{Im}\{(1+j)(\cos(t) + j\sin(t))\} = \operatorname{Im}\{\cos(t) + j\sin(t) + j\cos(t) - \sin(t)\} \quad (1)$$

$$= \operatorname{Im}\{\cos(t) - \sin(t) + j(\sin(t) + \cos(t))\} \quad (2)$$

$$= \sin(t) + \cos(t) \quad (3)$$

(β') Λάθος, οι συντελεστές Fourier ενός πραγματικού περιοδικού σήματος είναι συζυγώς συμμετρικοί, δηλ.

$$X_k = X_{-k}^* \quad (4)$$

Είναι

$$X_{-k}^* = \left( \frac{1}{1 + |-k|} e^{j\pi/4} \right)^* = \frac{1}{1 + |k|} e^{-j\pi/4} \neq X_k \quad (5)$$

(γ') Σωστό, μια από τις ρίζες, η  $\lambda = 1$  είναι θετική, και άρα το σύστημά μας είναι ασταθές.

(δ') Λάθος, για να ισχύει αυτό πρέπει το πολυώνυμο να έχει πραγματικούς συντελεστές (δεν μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο).

(ε') Λάθος, τα άκρα του ολοκληρώματος ορίζουν ένα διάστημα που δεν περιλαμβάνεται η συνάρτηση Δέλτα εντός του (η συνάρτηση Δέλτα “ζει” στο  $t = 2\epsilon$ , δηλ. εκτός του  $[-\epsilon, \epsilon]$ ).

(ς') Λάθος, ο συγκεκριμένος παλμός, μοναδιαίας διάρκειας, γράφεται ως

$$\operatorname{rect}(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad (6)$$

(ζ') Λάθος, η θεμελιώδης συχνότητα του περιοδικού σήματος είναι

$$f_0 = \text{M.K.}\Delta\{60, 100\} = 20 \text{ Hz} \quad (7)$$

και άρα η περίοδός του θα είναι

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{20} = 0.005 \text{ s} \quad (8)$$

(η') Λάθος, το σήμα δεν είναι σήμα ενέργειας καθώς οι τιμές του απειρίζονται όταν  $t \rightarrow \pm\infty$ .

(θ') Σωστό, αφού

$$u(at) = \begin{cases} 1, & at > 0 \\ 0, & at < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \frac{at}{a} > \frac{0}{a} \\ 0, & \frac{at}{a} < \frac{0}{a} \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (9)$$

(ι') Σωστό, αφού

$$\sin(2\pi t)\delta(t+1) = \sin(2\pi t)\Big|_{t=-1} \delta(t+1) = \sin(-2\pi)\delta(t+1) = 0 \cdot \delta(t+1) = 0 \quad (10)$$

**Θέμα 2 - Βαθμός: 25**

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = x(t)u(t - 2) \quad (11)$$

είναι **(7.5 μ.)** γραμμικό, **(7.5 μ.)** χρονικά αμετάβλητο, **(5 μ.)** ευσταθές, **(2.5 μ.)** αιτιατό, και **(2.5 μ.)** δυναμικό.

Λύση:

- Για να είναι το σύστημα γραμμικό πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό. Το σύστημα είναι ομογενές, γιατί για είσοδο  $ax(t)$  η έξοδος είναι

$$ax(t) \longrightarrow (ax(t))u(t - 2) = a(x(t)u(t - 2)) = ay(t) \quad (12)$$

Είναι και αθροιστικό, γιατί για επιμέρους εισόδους  $x_1(t), x_2(t)$

$$x_1(t) \longrightarrow x_1(t)u(t - 2) = y_1(t) \quad (13)$$

$$x_2(t) \longrightarrow x_2(t)u(t - 2) = y_2(t) \quad (14)$$

οπότε

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow (x_1(t) + x_2(t))u(t - 2) = x_1(t)u(t - 2) + x_2(t)u(t - 2) = y_1(t) + y_2(t) \quad (15)$$

Άρα είναι γραμμικό σύστημα.

- Δεν είναι Χ.Α. γιατί για είσοδο  $x(t - t_0)$  η έξοδος είναι

$$x(t - t_0) \longrightarrow x(t - t_0)u(t - 2) = y_d(t) \quad (16)$$

και η καθυστερημένη έξοδος κατά  $t_0$  δίνεται ως

$$y(t - t_0) = x(t - t_0)u(t - t_0 - 2) \neq y_d(t) \quad (17)$$

Οι δυο έξοδοι δεν είναι ίδιες οπότε το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί για

$$|x(t)| < B_x \implies |y(t)| = |x(t)u(t - 2)| = |x(t)||u(t - 2)| < B_x|u(t - 2)| = B_x \cdot 1 = B_x \quad (18)$$

αφού η βηματική συνάρτηση είναι φραγμένη από τη μονάδα.

- Είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου και όχι από μελλοντικές.
- Δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθήκευση άλλων χρονικών στιγμών (μελλοντικών ή παρελθοντικών) της εισόδου ή της εξόδου.

**Θέμα 3 - Βαθμός: 30**

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{1}{4}y(t) = x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) \quad (19)$$

και έχει αρχικές συνθήκες  $y(0^-) = 1, \frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0$ .

(α') **(7.5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου,  $y_{zi}(t)$ .

(β') **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική του απόκριση,  $h(t)$ .

(γ') **(7.5 μ.)** Βρείτε **αναλυτικά** την απόκριση μηδενικής κατάστασης,  $y_{zs}(t)$ , για  $x(t) = u(t)$ .

(δ') **(5.0 μ.)** Είναι το σύστημα ευσταθές; Δικαιολογήστε.

Λύση:

(α') Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 - \frac{1}{4} \quad (20)$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$  και  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ . Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{t/2}, \quad t > 0 \quad (21)$$

Από τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = 1 \quad (22)$$

$$y'_{zi}(0^-) = 0 \quad (23)$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \quad (24)$$

$$y'_{zi}(0^-) = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \quad (25)$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{2} \quad (26)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \quad (27)$$

Οπότε

$$y_{zi}(t) = \left[ \frac{1}{2} e^{-t/2} + \frac{1}{2} e^{t/2} \right] u(t) \quad (28)$$

(β') Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - \frac{1}{4} y(t) = x(t) \quad (29)$$

με κρουστική απόκριση  $h_o(t)$ . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 - \frac{1}{4} \quad (30)$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι - όπως πριν - οι  $\lambda_1 = -1/2$  και  $\lambda_2 = 1/2$ . Οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{t/2}, \quad t > 0 \quad (31)$$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι οι

$$h_o(0^+) = 0 \quad (32)$$

$$h'_o(0^+) = 1 \quad (33)$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \quad (34)$$

$$h'_o(0^+) = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1 \quad (35)$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = -1 \quad (36)$$

$$c_2 = 1 \quad (37)$$

Οπότε

$$h_o(t) = -e^{-t/2} + e^{t/2}, \quad t > 0 = (e^{t/2} - e^{-t/2}) u(t) \quad (38)$$

Για το δοθέν στην εκφώνηση σύστημα, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = h_o(t) + 2 \frac{d}{dt} h_o(t) \quad (39)$$

$$= (e^{t/2} - e^{-t/2}) u(t) + 2 ((e^{t/2} - e^{-t/2}) u(t))' \quad (40)$$

$$= (e^{t/2} - e^{-t/2}) u(t) + 2 ((e^{t/2} - e^{-t/2})' u(t)) + 2 ((e^{t/2} - e^{-t/2}) u'(t)) \quad (41)$$

$$= (e^{t/2} - e^{-t/2}) u(t) + (e^{t/2} + e^{-t/2}) u(t) + 2(e^{t/2} - e^{-t/2}) \delta(t) \quad (42)$$

$$= (e^{t/2} - e^{-t/2}) u(t) + (e^{t/2} + e^{-t/2}) u(t) + 2(e^{t/2} - e^{-t/2}) \Big|_{t=0} \delta(t) \quad (43)$$

$$= (e^{t/2} - e^{-t/2}) u(t) + (e^{t/2} + e^{-t/2}) u(t) + 2(1 - 1) \delta(t) \quad (44)$$

$$= 2e^{t/2} u(t) \quad (45)$$

(γ') Θα είναι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2(e^{\tau/2}) u(\tau)) u(t - \tau) d\tau \quad (46)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\tau/2}) u(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (47)$$

$$= 2 \int_0^t (e^{\tau/2}) d\tau \quad (48)$$

γιατί

$$u(\tau) u(t - \tau) = 1, \quad 0 < \tau < t \quad (49)$$

οπότε

$$y_{zs}(t) = 2 \int_0^t (e^{\tau/2}) d\tau = 2(2e^{\tau/2}) \Big|_0^t = 4e^{t/2} - 4 = 4(e^{t/2} - 1) \quad (50)$$

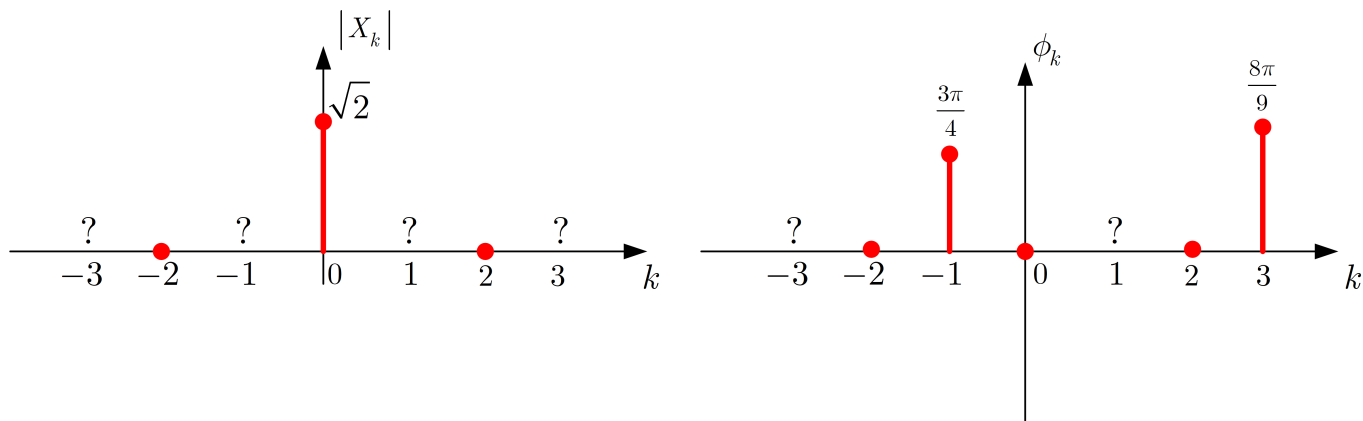
για  $t > 0$ , δηλ.

$$y_{zs}(t) = 4(e^{t/2} - 1) u(t) \quad (51)$$

(δ') Το σύστημα είναι ασταθές γιατί μια χαρακτηριστική του ρίζα είναι θετική, η  $1/2$ .

#### Θέμα 4 - Βαθμός: 35

Σας δίνεται το Σχήμα 1 που αναπαριστά **ελλιπώς** το φάσμα πλάτους και φάσης ενός πραγματικού περιοδικού σήματος  $x(t)$ .



Σχήμα 1: Φάσματα πλάτους και φάσης Θέματος 4.

Επίσης σας δίνονται οι εξής πληροφορίες:

$$(α) \frac{1}{2} \int_0^2 x^2(t) dt = 5,$$

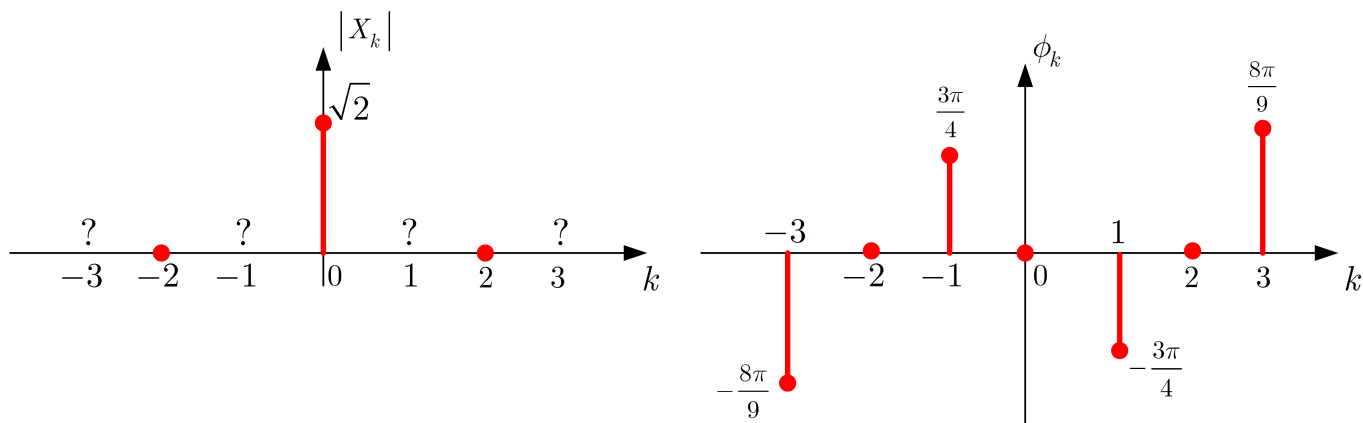
$$(β) X_k = 0, \quad |k| > 3,$$

$$(γ) \left| \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-j2\pi 3\frac{1}{2}t} dt \right| = 1$$

Βρείτε το περιοδικό σήμα  $x(t)$  σε μορφή εκθετικής (**20 μ.**) και τριγωνομετρικής (**10 μ.**) σειράς Fourier. Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του περιοδικού σήματος περιλαμβάνεται στους δυο πρώτους όρους ( $k = 1, 2$ ) της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (**5 μ.**) ;

Λύση:

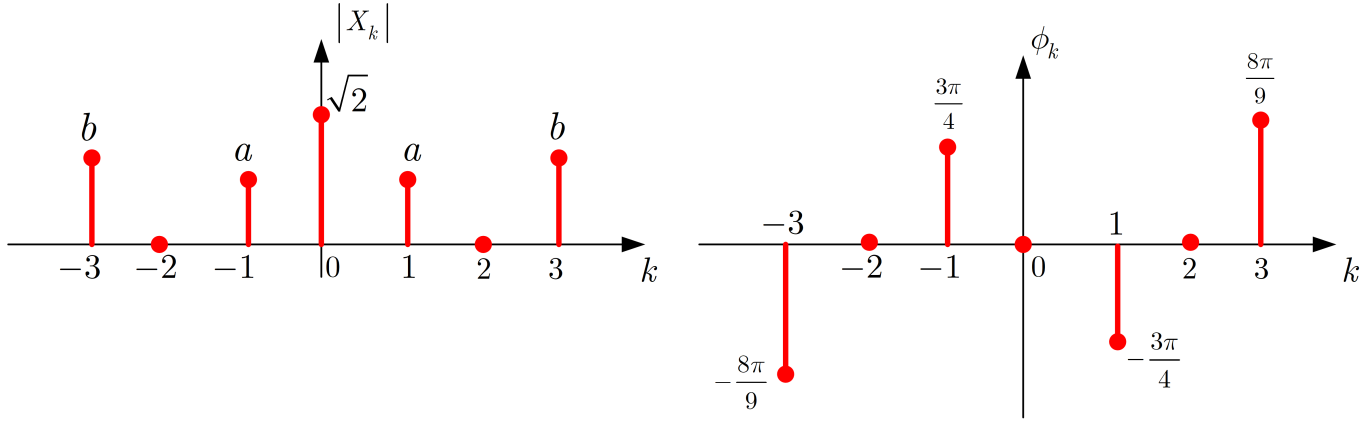
Αφού το σήμα είναι πραγματικό, τα φάσματα πλάτους και φάσης θα έχουν άρτια και περιττή συμμετρία αντίστοιχα. Από αυτό, μπορούμε να βρούμε το φάσμα φάσης πλήρως, το οποίο θα είναι όπως στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Συμπλήρωση φάσματος φάσης Θέματος 4.

Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το φάσμα πλάτους στις συχνότητες  $k = 1$  και  $k = -1$  θα έχει κάποια τιμή  $a$ , κοινή και στις δυο συχνότητες λόγω άρτιας συμμετρίας. Το ίδιο και για τις συχνότητες  $k = 3$  και  $k = -3$ , έστω  $b$  η τιμή του συντελεστή τους στο φάσμα πλάτους. Οπότε μπορούμε να φτιάξουμε το Σχήμα 3 και ζητούμε τα

$$|X_1| = |X_{-1}| = a, \quad |X_3| = |X_{-3}| = b \quad (52)$$



Σχήμα 3: Συμπλήρωση φάσματος πλάτους Θέματος 4.

Από τη σχέση

$$X_k = 0, \quad |k| > 3 \quad (53)$$

καταλαβαίνουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες φασματικές γραμμές παρά μόνο όσες βλέπουμε στα σχήματα. Από τη σχέση

$$\frac{1}{2} \int_0^2 x^2(t) dt = 5 = P_x \quad (54)$$

καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για τη μέση ισχύ του περιοδικού σήματος, η οποία ισούται με 5, και αναγνωρίζουμε και την περίοδο του σήματος,  $T_0 = 2$ , και τη θεμελιώδη συχνότητα,  $f_0 = \frac{1}{2}$ . Από τη σχέση

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-j2\pi 3 \frac{1}{2} t} dt \right| = 1 \quad (55)$$

συγκρίνοντάς τη με τη γενική μορφή των συντελεστών  $X_k$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (56)$$

καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για το συντελεστή  $X_3$ , και συγκεκριμένα για το μέτρο του, δηλ.

$$|X_3| = 1 \quad (57)$$

και το οποίο ισούται με τον άγνωστο  $b$  στο φάσμα πλάτους του Σχήματος 3. Τέλος, από τη σχέση του Parseval

$$\frac{1}{2} \int_0^2 x^2(t) dt = \sum_{k=-3}^3 |X_k|^2 = 5 \quad (58)$$

και άρα

$$(\sqrt{2})^2 + a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = 5 \quad (59)$$

$$2 + 2a^2 + 2 \cdot 1^2 = 5 \quad (60)$$

$$4 + 2a^2 = 5 \quad (61)$$

$$2a^2 = 1 \quad (62)$$

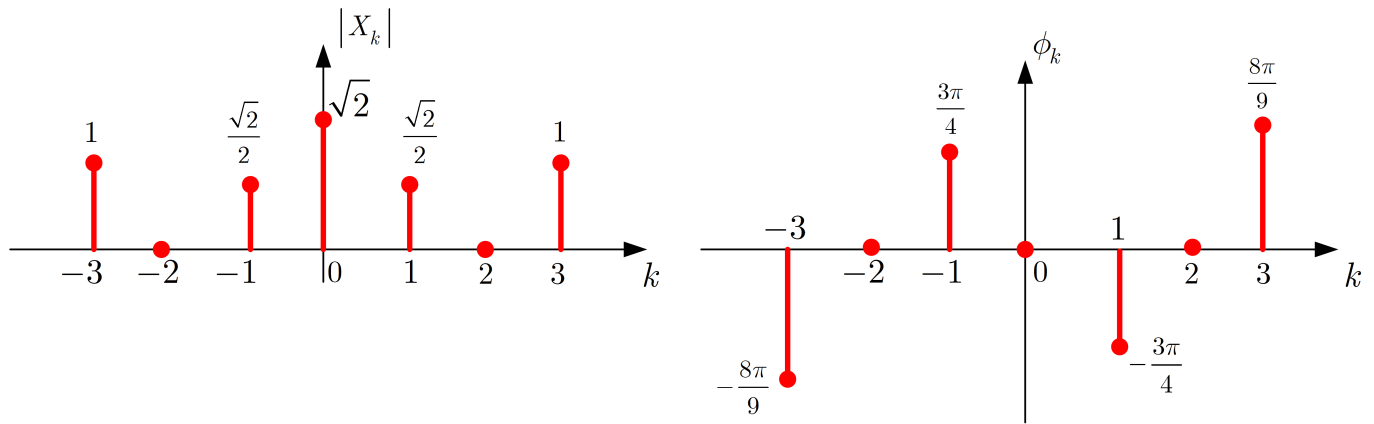
$$a^2 = \frac{1}{2} \quad (63)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (64)$$

και άρα

$$a = |X_1| = |X_{-1}| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (65)$$

Οπότε τα φάσματα είναι όπως στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Πλήρη φάσματα πλάτους και φάσης Θέματος 4.

Από την πληροφορία των φασμάτων πλάτους και φάσης, η εκθετική σειρά Fourier γράφεται ως

$$x(t) = \sqrt{2} + \sum_{k=-3, k \neq 0}^3 X_k e^{j2\pi k \frac{1}{2} t} \quad (66)$$

$$= \sqrt{2} + \sum_{k=-3, k \neq 0}^3 X_k e^{j\pi k t} \quad (67)$$

$$= \sqrt{2} + 1 \cdot e^{-j8\pi/9} e^{-j\pi 3t} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j3\pi/4} e^{-j\pi t} + 1 \cdot e^{j8\pi/9} e^{j\pi 3t} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j3\pi/4} e^{j\pi t} \quad (68)$$

και η τριγωνομετρική σειρά Fourier θα είναι

$$x(t) = \sqrt{2} + 1 \cdot e^{-j8\pi/9} e^{-j\pi 3t} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j3\pi/4} e^{-j\pi t} + 1 \cdot e^{j8\pi/9} e^{j\pi 3t} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j3\pi/4} e^{j\pi t} \quad (69)$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2} \cos\left(\pi t - \frac{3\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\pi 3t + \frac{8\pi}{9}\right) \quad (70)$$

Η τριγωνομετρική σειρά Fourier έχει όρους για  $k = 0$ ,  $k = 1$ ,  $k = 3$ , άρα μόνο αυτοί συνεισφέρουν στη συνολική ισχύ του περιοδικού σήματος. Ο όρος για  $k = 2$  έχει μηδενικό πλάτος, άρα η ισχύς του είναι μηδέν. Οπότε οι δυο πρώτοι όροι ( $k = 1$ ,  $k = 2$ ) έχουν ισχύ

$$P_{1 \rightarrow 2} = \sum_{k=1}^2 \frac{A_k^2}{2} \quad (71)$$

με  $A_k$  τα πλάτη των αντίστοιχων ημιτονειδών όρων, οπότε

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} + \frac{0^2}{2} = 1 \quad (72)$$

Το ποσοστό της συνολικής ισχύος που περιλαμβάνεται στους δυο πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier είναι  $1/5 = 0.2$ , δηλ. 20%.