

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ρήτρα εξέτασης: 4.5/10.0, Μονάδες εξέτασης: 110, Άριστα: 100

Θέμα 1ο - 20 μονάδες: overview

Σωστό ή Λάθος; **Δικαιολογήστε επαρκώς - απάντηση χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογείται.**

- (i.) **(7.5 μ.)** Αν $s = -1 + j2$ ένας πόλος μιας συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ που περιγράφει ένα ευσταθές σύστημα, τότε η απόκριση πλάτους θα απειρίζεται στη συχνότητα $f = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$ Hz.
- (ii.) **(5 μ.)** Αν $x(t)$ είναι ένα σήμα βασικής ζώνης με μέγιστη συχνότητα 2500 Hz, τότε η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 2500$ Hz είναι αρκετή για την τέλεια ανακατασκευή του $x(t)$ από τα δείγματά του.
- (iii.) **(7.5 μ.)** Για το σήμα $x(t) = -1 - \sin(2\pi 1200t + \pi/3)$, οι συντελεστές Fourier του, X_k , είναι όλοι μηδενικοί εκτός από τους

$$X_0, X_{-1}, X_1$$

Λύση:

- (i.) Λάθος. Ο πόλος απειρίζει την απόκριση πλάτους αν βρίσκεται ακριβώς πάνω στο φανταστικό άξονα. Προφανώς ο πόλος $-1 + j2$ δε βρίσκεται εκεί, άρα δεν απειρίζει την απόκριση πλάτους - την επηρεάζει δίνοντας της μεγάλες τιμές αλλά δεν την απειρίζει.
- (ii.) Λάθος. Η συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος για να μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το σήμα βασικής ζώνης από τα δείγματά του.
- (iii.) Σωστό. Η σταθερά -1 αποτελεί τον όρο X_0 και το ημίτονο μας δίνει

$$-\sin(2\pi 1200t + \pi/3) = -\frac{1}{2j}e^{j\pi/3}e^{j2\pi 1200t} + \frac{1}{2j}e^{-j\pi/3}e^{-j2\pi 1200t} = X_1e^{j2\pi 1200t} + X_{-1}e^{-j2\pi 1200t} \quad (1)$$

άρα οι συντελεστές X_1, X_{-1} είναι επίσης μη μηδενικοί.

Θέμα 2ο - 30 μονάδες: Αντιστοίχιση

Στο Σχήμα 2, έχετε μερικά διαγράμματα πόλων-μηδενικών για κάποιες συναρτήσεις μεταφοράς που περιγράφουν ευσταθή ΓΧΑ συστήματα της μορφής

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_N)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_M)} \quad (2)$$

με z_i τα μηδενικά και p_j οι πόλοι. Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

- (α') **(2.5 μ.)** Ποιό/α διάγραμμα/τα πόλων-μηδενικών έχει/ουν απόκριση πλάτους που είναι **μη μηδενική** για $f = 0$;
- (β') **(2.5 μ.)** Ποιό/α διάγραμμα/τα πόλων-μηδενικών έχει/ουν απόκριση πλάτους που είναι **μη μηδενική** για $f \rightarrow \infty$;

- (γ') (**5 μ.**) Υπάρχουν δυο διαγράμματα πόλων-μηδενικών που έχουν ζωνοπερατή συμπεριφορά στην απόκριση πλάτους (δηλ. έχουν μηδενική τιμή για $f = 0$ και μηδενικές τιμές για $|f| \rightarrow \infty$). Ποια είναι αυτά;
- (δ') (**5 μ.**) Ποιό διάγραμμα πόλων-μηδενικών έχει απόκριση πλάτους που πλησιάζει τη ζωνοφρακτική συμπεριφορά;
- (ε') (**10 μ.**) Ποιό διάγραμμα πόλων-μηδενικών έχει απόκριση πλάτους που είναι σταθερή για κάθε f ;
- (ς') (**5 μ.**) Ποιό διάγραμμα πόλων-μηδενικών έχει απόκριση πλάτους που πλησιάζει τη χαμηλοπερατή συμπεριφορά;

Λύση:

- (α') Για να είναι μη μηδενική η απόκριση πλάτους στο $f = 0$ πρέπει να **μην** υπάρχει κάποιο μηδενικό **επάνω** στην αρχή των αξόνων. Άρα τα (a, d, e, f) είναι συστήματα με μη μηδενική απόκριση πλάτους για $f = 0$.
- (β') Για να είναι μη μηδενική η απόκριση πλάτους στο $f \rightarrow \infty$ πρέπει να **μην** υπάρχει κάποιο μηδενικό **στο άπειρο** - πρέπει όλα τα μηδενικά να βρίσκονται στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο. Άρα τα (a, f) είναι συστήματα με μη μηδενική απόκριση πλάτους για $f \rightarrow \infty$.
- (γ') Τα (b, c) ικανοποιούν τις προδιαγραφές του ζωνοπερατού συστήματος, δηλ. έχουν μηδενική τιμή για $f = 0$ και μηδενικές τιμές για $|f| \rightarrow \infty$: με άλλα λόγια, έχουν μηδενικά στο $f = 0$ και στο $|f| \rightarrow \infty$.
- (δ') Η ζωνοφρακτική συμπεριφορά είναι η “αντίθετη” της ζωνοπερατής, άρα το (f) πλησιάζει μια τέτοια συμπεριφορά.
- (ε') Σταθερή απόκριση πλάτους έχει το σύστημα (a) γιατί γράφεται ως

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_1^*)}{(s - p_1)(s - p_1^*)} \implies |H(f)| = \frac{|j2\pi f - z_1||j2\pi f - z_1^*|}{|j2\pi f - p_1||j2\pi f - p_1^*|} \quad (3)$$

$$= \frac{|j2\pi f - (2 + 2j)||j2\pi f - (2 - 2j)|}{|j2\pi f - (-2 + 2j)||j2\pi f - (-2 - 2j)|} \quad (4)$$

$$= \frac{|-2 - j(2 - 2\pi f)||-2 + j(2 + 2\pi f)|}{|2 - j(2 - 2\pi f)||2 + j(2 + 2\pi f)|} \quad (5)$$

$$= \frac{\sqrt{4 + (2 - 2\pi f)^2} \sqrt{4 + (2 + 2\pi f)^2}}{\sqrt{4 + (2 - 2\pi f)^2} \sqrt{4 + (2 + 2\pi f)^2}} = 1 \quad (6)$$

- (ς') Χαμηλοπερατή συμπεριφορά έχει το διάγραμμα (d) καθώς έχει πόλους γύρω από τη μηδενική συχνότητα που δίνουν μεγάλες τιμές στην απόκριση πλάτους και μηδενικά στο άπειρο, που οδηγούν την απόκριση πλάτους να “σβήνει” όσο $|f| \rightarrow \infty$.

Θέμα 3ο - 15 μονάδες: Ψηφιακές Επικοινωνίες

Στη δεκαετία του 1980 – 90, η σύνδεση στο διαδίκτυο γινόταν μέσω ειδικών συσκευών – όπως και τώρα – που ονομάζονται modems, από το συνδυασμό των λέξεων modulator-demodulator, των οποίων οι ταχύτητες έφταναν στον “αστρονομικό” ρυθμό των 300 bits/second. Η αποστολή δεδομένων πάνω από ένα αναλογικό κανάλι γινόταν μέσω μιας μεθόδου γνωστή ως Frequency Shift Keying - Διαμόρφωση Μετατόπισης Συχνότητας. Για να σταλεί το ψηφιακό “0”, η μέθοδος κατασκευάζει κι έστειλε το σήμα

$$s_0(t) = A\phi_0(t) \quad (7)$$

ενώ για το ψηφιακό "1", η μέθοδος κατασκεύαζε κι έστελνε το σήμα

$$s_1(t) = A\phi_1(t) \quad (8)$$

Τα σήματα $\phi_0(t), \phi_1(t)$ σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση, δηλ.

$$\int_0^T \phi_k(t)\phi_j(t)dt = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (9)$$

Ο δέκτης προσπαθούσε να βρει μια σταθερά $R_i, i = 0, 1$ ως

$$R_i = \int_0^T r(t)\phi_i(t)dt \quad (10)$$

με $r(t)$ το σήμα που έλαβε. Υποθέστε ότι το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ ισούται με το σήμα που εστάλη (δηλ. δεν υπάρχει αλλοίωση στο σήμα κατά τη μεταφορά του μέσω του καναλιού), δηλ. $r(t) = s_0(t)$ ή $r(t) = s_1(t)$.

(α') **(5 μ.)** Αν εστάλη το σήμα $s_0(t)$ ως ένα "0", βρείτε τις σταθερές R_0, R_1 .

(β') **(5 μ.)** Αν εστάλη το σήμα $s_1(t)$ ως ένα "1", βρείτε τις σταθερές R_0, R_1 .

(γ') **(5 μ.)** Προτείνετε μια μέθοδο αναγνώρισης του bit "0" ή "1" στο δέκτη.

Λύση:

(α') Έχουμε

$$R_0 = \int_0^T r(t)\phi_0(t)dt = \int_0^T s_0(t)\phi_0(t)dt = A \int_0^T \phi_0(t)\phi_0(t)dt = A \quad (11)$$

$$R_1 = \int_0^T r(t)\phi_1(t)dt = \int_0^T s_0(t)\phi_1(t)dt = A \int_0^T \phi_0(t)\phi_1(t)dt = 0 \quad (12)$$

από τη Σχέση (9).

(β') Έχουμε

$$R_0 = \int_0^T r(t)\phi_0(t)dt = \int_0^T s_1(t)\phi_0(t)dt = A \int_0^T \phi_1(t)\phi_0(t)dt = 0 \quad (13)$$

$$R_1 = \int_0^T r(t)\phi_1(t)dt = \int_0^T s_1(t)\phi_1(t)dt = A \int_0^T \phi_1(t)\phi_1(t)dt = A \quad (14)$$

από τη Σχέση (9).

(γ') Η μέθοδος αναγνώρισης θα είναι: **Αν $R_i > 0$ αποφάσισε το i bit.**

Θέμα 4ο - 25 μονάδες: Μετασχηματισμός Fourier και Ιδιότητες

Έστω το αγαπημένο σας σήμα $z(t) = \text{sinc}(t)$ και το γινόμενο

$$x(t) = z(t) \cdot z(2t) \quad (15)$$

(α') **(15 μ.)** Βρείτε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier του $x(t)$.

(β) (5 μ.) Αν $h(t) = 3\text{sinc}(3t)$ η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος, τότε βρείτε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος αυτού για είσοδο το σήμα $x(t)$ παραπάνω.

(γ) (5 μ.) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt \quad (16)$$

Λύση:

(α) Θα είναι

$$F\{x(t)\} = X(f) = F\{z(t) \cdot x(2t)\} = Z(f) * \frac{1}{2}Z\left(\frac{f}{2}\right) = \text{rect}(f) * \frac{1}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \quad (17)$$

Εκτελούμε τη συνέλιξη διακρίνοντας τις περιπτώσεις όπως στο Σχήμα 1.

- Για $f + 1 < -\frac{1}{2} \implies f < -\frac{3}{2}$, είναι $X(f) = 0$.
- Για $-\frac{1}{2} < f + 1 < \frac{1}{2} \implies -\frac{3}{2} < f < -\frac{1}{2}$, είναι

$$X(f) = \int_{-1/2}^{f+1} \frac{1}{2} \cdot 1 du = \frac{1}{2}(f+1) + \frac{1}{4} \quad (18)$$

- Για $f - 1 < -\frac{1}{2}$ και $f + 1 > \frac{1}{2}$, δηλ. $-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$, είναι

$$X(f) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} \cdot 1 du = \frac{1}{2} \quad (19)$$

- Για $-\frac{1}{2} < f - 1 < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} < f < \frac{3}{2}$, είναι

$$X(f) = \int_{f-1}^{1/2} \frac{1}{2} \cdot 1 du = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(f-1) \quad (20)$$

- Για $f + 1 > \frac{1}{2} \implies f > \frac{3}{2}$, είναι $X(f) = 0$.

Άρα συνολικά

$$X(f) = \begin{cases} 0, & f < -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(f+1) + \frac{1}{4}, & -\frac{3}{2} < f < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(f-1), & \frac{1}{2} < f < \frac{3}{2} \\ 0, & f > \frac{3}{2} \end{cases} \quad (21)$$

ο οποίος μετασχηματισμός φαίνεται στο τέλος του Σχήματος 1.

(β) Η κρουστική απόκριση έχει συχνотική απόκριση

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) \quad (22)$$

δηλ. είναι ένας τετραγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους διάρκειας τριών Hz με κέντρο το $f = 0$, δηλ. “ζει” στο διάστημα $(-1.5, 1.5)$ Hz. Είναι προτιμότερο να βρούμε την έξοδο στο χώρο της συχνότητας: η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος στο χώρο του Fourier δίνεται από την πράξη του γινομένου στη συχνότητα μεταξύ του μετασχ. Fourier της εισόδου, $X(f)$, και της συχνотικής απόκρισης, $H(f)$, δηλ.

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (23)$$

Σχεδιάζοντας τη συχνотική απόκριση $H(f)$ πάνω στο φάσμα εισόδου $X(f)$ βλέπουμε ότι το τελευταίο μένει αναλλοίωτο, καθώς το μη μηδενικό κομμάτι του φάσματος της εισόδου βρίσκεται επίσης στο διάστημα $(-3/2, 3/2) = (-1.5, 1.5)$ Hz. Άρα η έξοδος ισούται με την είσοδο, $y(t) = x(t)$.

(γ') Για το ολοκλήρωμα, παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \Big|_{f=0} = Y(f) \Big|_{f=0} = Y(0) = X(0) = \frac{1}{2} \quad (24)$$

Θέμα 5ο - 20 μονάδες: συστήματα και μετασχ. Laplace

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \frac{d}{dt} y(t) + 3y(t) = x(t) \quad (25)$$

που περιγράφει ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα.

(α') (5 μ.) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$.

(β') (10 μ.) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(γ') (5 μ.) Ελέγξτε την ευστάθεια του συστήματος.

Λύση:

(α') Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της παραγώγισης του Μετασχ. Laplace στη διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = X(s) \iff Y(s)(s^2 + 4s + 3) = X(s) \iff H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \quad (26)$$

Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s_1 = -3$ και $s_2 = -1$, άρα λόγω αιτιατότητας η περιοχή σύγκλισης θα είναι η $\sigma > -1$.

(β') Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \quad (27)$$

με

$$A = H(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+3} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \quad (28)$$

$$B = H(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{2} \quad (29)$$

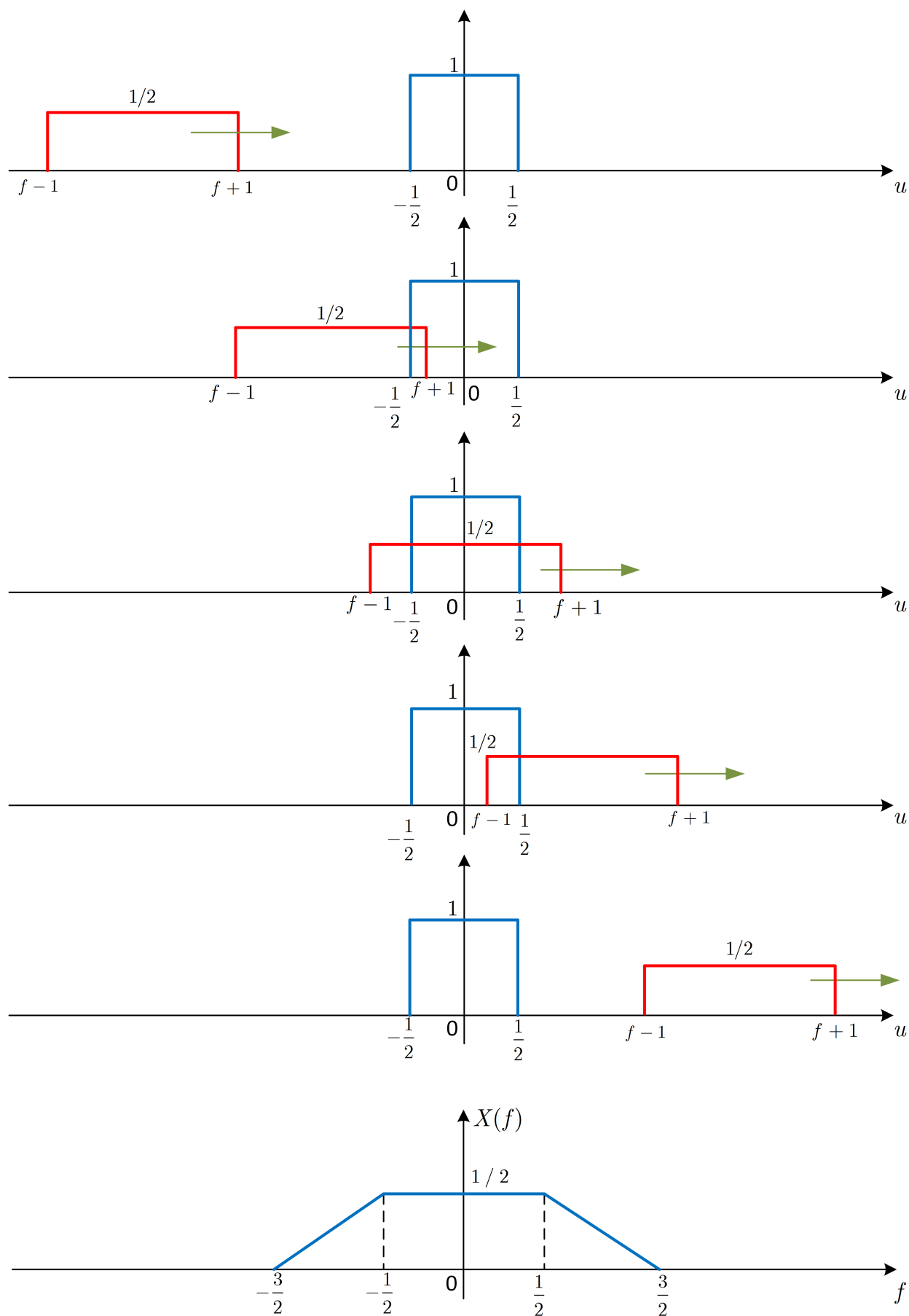
Οπότε

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} \quad (30)$$

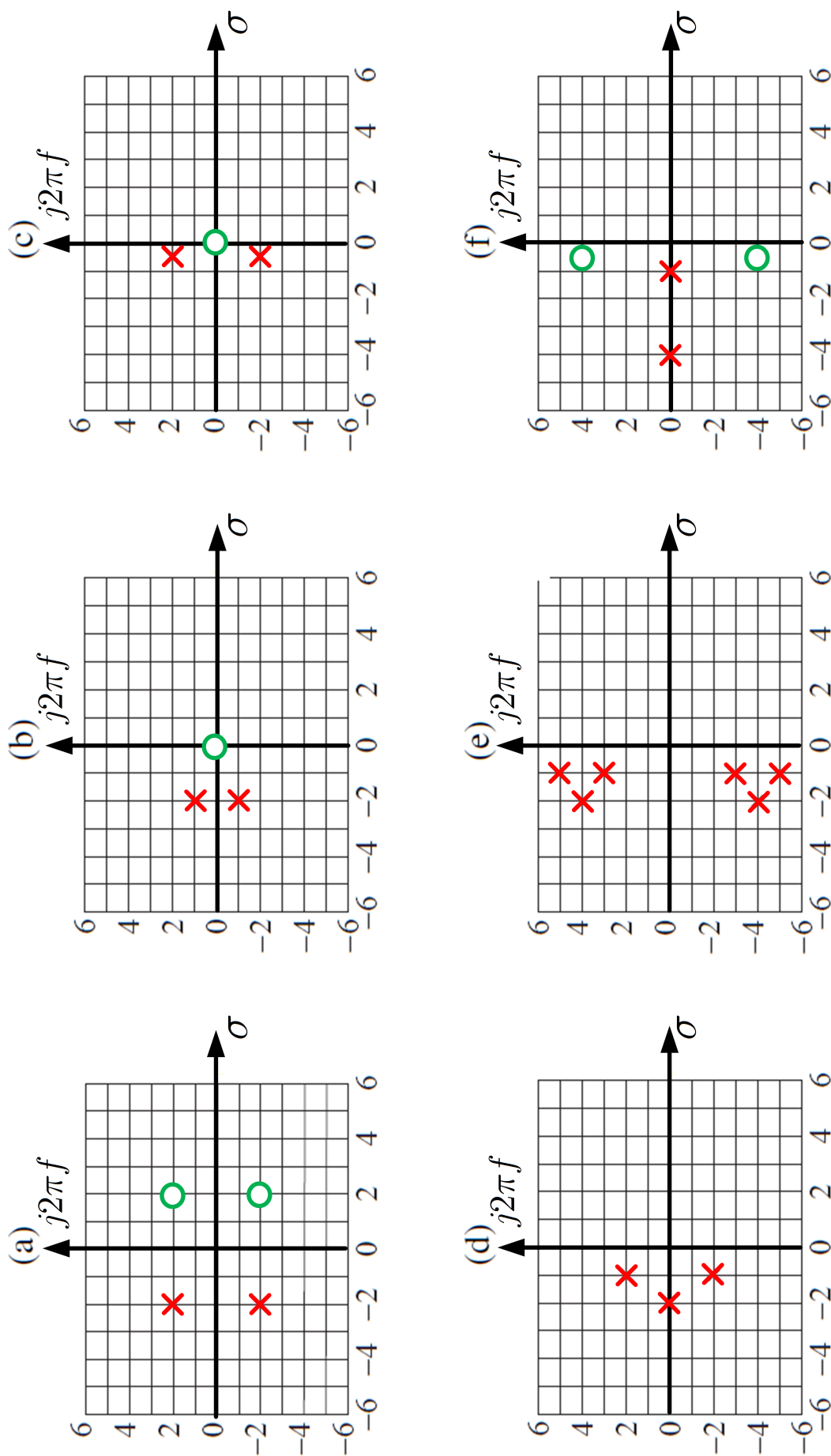
και λόγω αιτιατότητας, οι πίνακες έτοιμων ζευγών μετασχ. Laplace μας δίνουν

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-3t} u(t) \quad (31)$$

(γ') Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς, $\sigma > -1$, περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $\sigma = 0$.



Σχήμα 1: Σχήμα Θέματος 4.



Σχήμα 2: Σχήμα Θέματος 2.