

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
Ρήτρα εξέτασης: 4.5/10.0

Θέμα 1ο - 25 μονάδες: overview

Σωστό ή Λάθος; **Δικαιολογήστε επαρκώς - απάντηση χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογείται.**

(i.) (5 μ.) Αν δυο ΓΧΑ συστήματα έχουν την ίδια απόκριση πλάτους,

$$|H_1(f)| = |H_2(f)|$$

τότε έχουν υποχρεωτικά και τις ίδιες κρουστικές αποκρίσεις,

$$h_1(t) = h_2(t)$$

(ii.) (2.5 μ.) Αν $x(t)$ είναι ένα σήμα βασικής ζώνης με μέγιστη συχνότητα 1000 Hz, τότε η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1800$ Hz είναι αρκετή για την τέλεια ανακατασκευή του $x(t)$ από τα δείγματά του.

(iii.) (10 μ.) Αν $g(t)$ μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση με N απλές ρίζες $t_i, i = 1, \dots, N$, και γνωρίζετε ότι

$$\delta(g(t)) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(t - t_i)}{|g'(t_i)|} \quad (1)$$

τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t^2 - 1) f(t) dt = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} \quad (2)$$

για μια συνεχή συνάρτηση $f(t)$.

(iv.) (5 μ.) Για ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-at} u(t)$$

με $a > 0$, και απόκριση συχνότητας $H(f)$, θα ισχύει

$$|H(f)|^2 \leq H^2(0), \quad \forall f \quad (3)$$

(v.) (2.5 μ.) Για το σήμα $x(t) = 2 \cos(2\pi 200t)$, οι συντελεστές Fourier του, X_k , είναι όλοι μηδενικοί εκτός από τους

$$X_0, X_{-1}, X_1$$

Λύση:

i. Λάθος. Μπορεί να έχουν διαφορετική απόκριση φάσης, καθώς

$$H_1(f) = |H_1(f)| e^{j\phi_1(f)} \quad (4)$$

$$H_2(f) = |H_2(f)| e^{j\phi_2(f)} \quad (5)$$

Με ένα αντιπαράδειγμα, αν $h_1(t) = \delta(t)$ και $h_2(t) = \delta(t - 1)$, τότε $H_1(f) = 1$ και $H_2(f) = e^{-j2\pi f}$, για τα οποία ισχύει $|H_1(f)| = |H_2(f)| = 1$ αλλά $h_1(t) \neq h_2(t)$.

- ii. Λάθος. Με βάση το θεώρημα του Shannon, πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι τουλάχιστον η διπλάσια μέγιστη συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου. Εδώ, $f_{max} = 1000$ Hz, άρα πρέπει $f_s > 2000$ Hz.
- iii. Σωστό. Αν $g(t) = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$, δηλ. δυο ρίζες $t_1 = 1, t_2 = -1$, τότε $g'(t) = 2t$ και

$$\delta(g(t)) = \frac{1}{|g'(1)|}\delta(t - 1) + \frac{1}{|g'(-1)|}\delta(t + 1) = \frac{1}{2}\delta(t - 1) + \frac{1}{2}\delta(t + 1) \quad (6)$$

Οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t^2 - 1)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\delta(t - 1) + \frac{1}{2}\delta(t + 1) \right) f(t)dt \quad (7)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\delta(t - 1)f(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\delta(t + 1)f(t)dt \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) \quad (9)$$

- iv. Σωστό. Το σύστημα θα έχει απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (10)$$

και άρα

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (11)$$

Επίσης

$$H^2(0) = \frac{1}{a^2} \quad (12)$$

δηλ.

$$\frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \leq \frac{1}{a^2} \quad (13)$$

που ισχύει, καθώς για κάθε $f \neq 0$ ο όρος αριστερά θα είναι μικρότερος από αυτόν στα δεξιά (μεγαλώνει ο παρονομαστής του αριστερού όρου). Η ισότητα ισχύει μόνο για $f = 0$.

- v. Λάθος. Δεν υπάρχει σταθερός όρος στο σήμα $x(t)$, οπότε $X_0 = 0$.

Θέμα 2ο - 25 μονάδες: Αντιστοιχίση

Στο Σχήμα 1, αντιστοιχίστε τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών της αριστερής στήλης με τις αποκρίσεις πλάτους της δεξιάς στήλης. Τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών περιέχουν **όλη** την πληροφορία των συστημάτων που περιγράφουν. Ένα στοιχείο της μιας στήλης αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο της άλλης. **Η αντιστοιχίση να γραφεί στην κόλλα των απαντήσεών σας ως π.χ. (a) $\rightarrow$ (ii).** **Αντιστοιχίσεις στο φύλλο εκφωνήσεων δε θα ληφθούν υπ' όψη. Αιτιολογήστε επαρκώς κάθε αντιστοιχίση. Αντιστοιχίσεις χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

Λύση:

- Το (a) έχει ένα μηδενικό ακριβώς στο $s = 0$, δηλ. στη συχνότητα $f = 0$ της απόκρισης πλάτους, και έναν πόλο στο $s = -2$. Οι αποκρίσεις πλάτους (ii), (iii) μηδενίζονται στο $f = 0$, οπότε είναι υποψήφιος. Όμως το (ii) φαίνεται να έχει ξεκάθαρα δυο πόλους σε συχνότητες διάφορες του μηδενός, οπότε το σωστό είναι το (iii). Άρα $(a) \rightarrow (iii)$.

- Το (b) έχει δυο πόλους στις θέσεις $s = -3 \pm j4$ (και προφανώς δυο μηδενικά στο άπειρο). Οι συχνότητες $f = \pm \frac{2}{\pi}$ θα επηρεάζονται από τους πόλους αυτούς ενώ τα μηδενικά στο άπειρο θα οδηγούν την απόκριση πλάτους να “σβήνει” όσο $|f| \rightarrow \infty$. Άρα (b) $\rightarrow (iv)$.
- Το (c) έχει μόνο ένα πόλο στο $s = -5$ (και προφανώς ένα μηδενικό στο άπειρο). Ο πόλος αυτός επηρεάζει τη μηδενική συχνότητα $f = 0$, αυξάνοντας τις τιμές πλάτους της, και το μηδενικό στο άπειρο οδηγεί την απόκριση πλάτους να “σβήνει” όταν $|f| \rightarrow \infty$. Άρα (c) $\rightarrow (i)$.
- Το (d) έχει δυο πόλους στις θέσεις $s = -1 \pm 10j$ και ένα μηδενικό ακριβώς στο $s = 0$, δηλ. στη συχνότητα $f = 0$ της απόκρισης πλάτους (και προφανώς άλλο ένα μηδενικό στο άπειρο). Η μόνη εναπομείνουσα απόκριση πλάτους που μηδενίζεται στο $f = 0$ είναι η (ii), που ικανοποιεί και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά. Άρα (d) $\rightarrow (ii)$.
- Το (e) έχει έναν πόλο στη θέση $s = -1$ (και προφανώς έναν ακόμα στο άπειρο) και δυο μηδενικά στις θέσεις $s = \pm j2$, δηλ. ακριβώς πάνω στο φανταστικό άξονα, στις συχνότητες $f = \pm \frac{1}{\pi}$. Η απόκριση πλάτους (v) μηδενίζεται σε δυο τέτοιες συχνότητες και “φεύγει” στο άπειρο όσο $|f| \rightarrow \infty$, οπότε ικανοποιεί τα χαρακτηριστικά αυτά. Άρα (e) $\rightarrow (v)$.

Εναλλακτικές, αλλά πιο χρονοβόρες, λύσεις περιλαμβάνουν την εύρεση των αποκρίσεων πλάτους από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών. Για παράδειγμα,

$$H_{(a)}(s) = \frac{s}{s+2} \Rightarrow |H_{(a)}(f)| = \frac{|j2\pi f|}{|j2\pi f + 2|} = \frac{2\pi|f|}{\sqrt{4 + 4\pi^2 f^2}} \quad (14)$$

και επαληθεύοντας κάποιες τιμές, π.χ. $|H_{(a)}(0)| = 0$, ενώ για μεγάλα f , $|H_{(a)}(f)| \approx 1$, άρα η σωστή απόκριση είναι η (iii), ενώ για το

$$H_{(b)}(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_1^*)} = \frac{1}{s^2 + 6s + 25} \quad (15)$$

με $s_1 = -3 + 4j$, δηλ.

$$H_{(b)}(f) = \frac{1}{(j2\pi f - s_1)(j2\pi f - s_1^*)} = \frac{1}{(j2\pi f)^2 + 6j2\pi f + 25} \Rightarrow |H_{(b)}(f)| = \frac{1}{|(j2\pi f)^2 + 6j2\pi f + 25|} \quad (16)$$

και θέτοντας $f = 0$, παίρνουμε $|H_{(b)}(0)| = \frac{1}{25} = 0.04 < 0.05$, που μας δίνει την απάντηση (iv). Όμοια και για τα υπόλοιπα.

Θέμα 3ο - 10 μονάδες: Νέος Μετασχηματισμός!

Διαβάζοντας για το HY215, βρήκατε στη βιβλιογραφία έναν νέο μετασχηματισμό, τον **Μετασχηματισμό Mellin**, ο οποίος για ένα σήμα $x(t)$ ορίζεται ως

$$M_x(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} x(t) dt, \quad s \in \mathbb{C} \quad (17)$$

Θέλοντας να καταλάβετε περισσότερα γι' αυτόν, διατυπώστε τις ιδιότητες της

(α') **(5 μ.)** γραμμικότητας: $z(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{M} M_z(s) = ?$

(β') **(5 μ.)** χρονικής κλιμάκωσης: $z(t) = x(at), a > 0 \xrightarrow{M} M_z(s) = ?$

Λύση:

(α') Έστω ένα σήμα $z(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$, ζητούμε τον $M_z(s)$, δηλ.

$$M_z(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} z(t) dt \quad (18)$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{s-1} (ax_1(t) + bx_2(t)) dt \quad (19)$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{s-1} ax_1(t) dt + \int_0^{+\infty} t^{s-1} bx_2(t) dt \quad (20)$$

$$= a \int_0^{+\infty} t^{s-1} x_1(t) dt + b \int_0^{+\infty} t^{s-1} x_2(t) dt \quad (21)$$

$$= aM_{x_1}(s) + bM_{x_2}(s) \quad (22)$$

(β') Έστω ένα σήμα $z(t) = x(at)$, $a > 0$, ζητούμε τον $M_z(s)$, δηλ.

$$M_z(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} z(t) dt \quad (23)$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{s-1} x(at) dt \quad (24)$$

Θέτουμε $w = at \implies dw = a dt$, ενώ τα όρια ολοκλήρωσης δεν αλλάζουν αφού $a > 0$. Οπότε

$$M_z(s) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{w}{a}\right)^{s-1} x(w) \frac{dw}{a} \quad (25)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{w^{s-1}}{a^s} x(w) dw \quad (26)$$

$$= \frac{1}{a^s} \int_0^{+\infty} w^{s-1} x(w) dw \quad (27)$$

$$= a^{-s} M_x(s) \quad (28)$$

Θέμα 4ο - 25 μονάδες: Parseval και Ορθοκανονικότητα

Θεωρήστε το γνωστό σας σήμα

$$x(t) = \text{sinc}(t) \quad (29)$$

και το γνωστό σας θεώρημα Parseval, γραμμένο λίγο πιο γενικευμένα ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df \quad (30)$$

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\text{sinc}(t)$, μετατοπισμένες κατά ακεραίες χρονικές στιγμές, δηλ $\text{sinc}(t - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, αποτελούν ένα σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων, δηλ. ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t - n)\text{sinc}(t - m)dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (31)$$

Λύση:

Ξέρουμε ότι

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T \text{sinc}(fT) \quad (32)$$

και από την ιδιότητα της δυικότητας

$$T \text{sinc}(Tt) \xleftrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (33)$$

και για $T = 1$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f) \quad (34)$$

Για μετατόπιση στο χρόνο, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\text{sinc}(t - t_0) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (35)$$

και αν $t_0 = k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\text{sinc}(t - k) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f) e^{-j2\pi k f} \quad (36)$$

Από το αριστερό μέλος του δοσμένου θεωρήματος, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t - n)\text{sinc}^*(t - m)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t - n)\text{sinc}(t - m)dt \quad (37)$$

καθώς η συνάρτηση $\text{sinc}(\cdot)$ είναι πραγματική. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t - n)\text{sinc}(t - m)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(f)\text{rect}^*(f)e^{-j2\pi f n} (e^{-j2\pi f m})^* df \quad (38)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{rect}(f)|^2 e^{-j2\pi f n} e^{j2\pi f m} df \quad (39)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} 1^2 \cdot e^{-j2\pi f n} e^{j2\pi f m} df \quad (40)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi f(m-n)} df \quad (41)$$

$$= \frac{1}{j2\pi(m-n)} e^{j2\pi f(m-n)} \Big|_{-1/2}^{1/2} \quad (42)$$

$$= \frac{1}{j2\pi(m-n)} (e^{j\pi(m-n)} - e^{-j\pi(m-n)}) \quad (43)$$

$$= \frac{1}{j2\pi(m-n)} \cdot 2j \sin(\pi(m-n)) \quad (44)$$

$$= \frac{1}{\pi(m-n)} \sin(\pi(m-n)) \quad (45)$$

$$= \text{sinc}(m-n) \quad (46)$$

Για $m = n$, έχουμε $\text{sinc}(0) = 1$, ενώ για $m \neq n$, έχουμε $\text{sinc}(m-n) = 0$, αφού τα σημεία μηδενισμού του $\sin(\pi(m-n))$ είναι τα

$$\sin(\pi(m-n)) = 0 = \sin(k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \iff \pi(m-n) = k\pi \iff m-n = k \in \mathbb{Z} \quad (47)$$

δηλ. όταν η διαφορά $m-n$ είναι ακέραιος αριθμός, που ισχύει στην περίπτωση μας καθώς $m, n \in \mathbb{Z}$ (εναλλακτικά, σας δίνονται ακριβώς αυτές οι δυο σχέσεις στο τυπολόγιο που σας έχω δώσει). Άρα τελικά

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t - n)\text{sinc}(t - m)dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (48)$$

Θέμα 5ο - 25 μονάδες: Συστήματα και μετασχ. Laplace

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από το παρακάτω ζεύγος εισόδου-εξόδου:

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow y(t) = (1 - e^{-3t})u(t) \quad (49)$$

(α') **(10 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.

(β') **(10 μ.)** Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει αυτό το σύστημα.

(γ') **(5 μ.)** Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας του συστήματος από τη συνάρτηση μεταφοράς που βρήκατε; Αν ναι, κάντε το και εξηγήστε. Αν όχι, εξηγήστε.

Λύση:

(α') Ο μετασχ. Laplace του ζεύγους εισόδου-εξόδου είναι

$$x(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+1}, \sigma > -1 \quad (50)$$

$$y(t) = (1 - e^{-3t})u(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} = \frac{3}{s(s+3)}, \sigma > 0 \quad (51)$$

Ο λόγος

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) \quad (52)$$

μας δίνει τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, οπότε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{3}{s(s+3)}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{3(s+1)}{s(s+3)} = \frac{3+3s}{s^2+3s} \quad (53)$$

Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s = 0$, $s = -3$, και αφού το σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης θα είναι ένα ημιεπίπεδο δεξιότερα του μεγαλύτερου πόλου, δηλ. είναι το $\sigma > 0$.

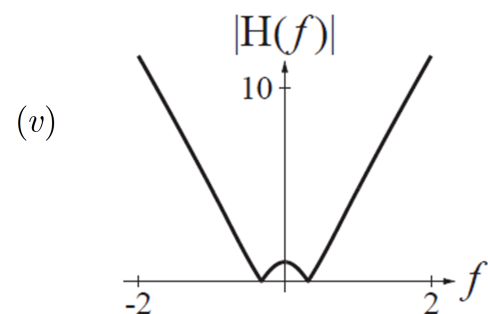
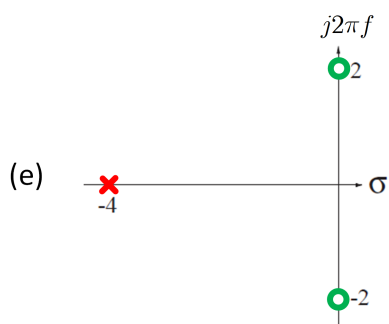
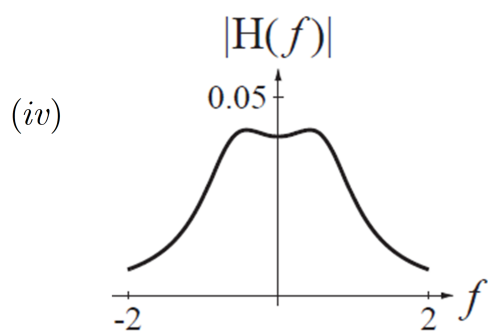
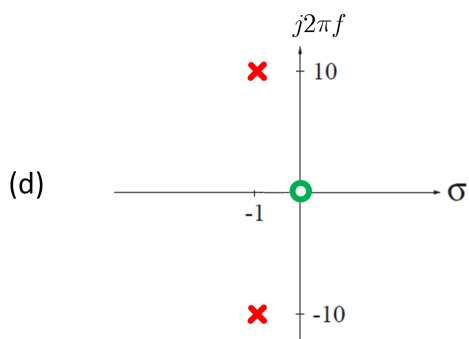
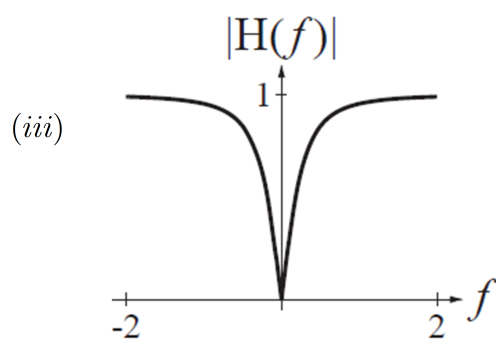
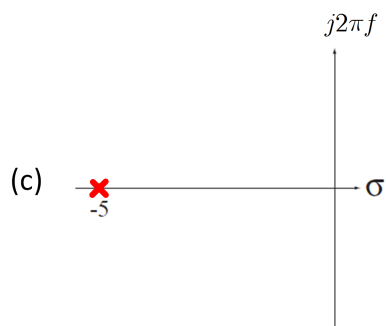
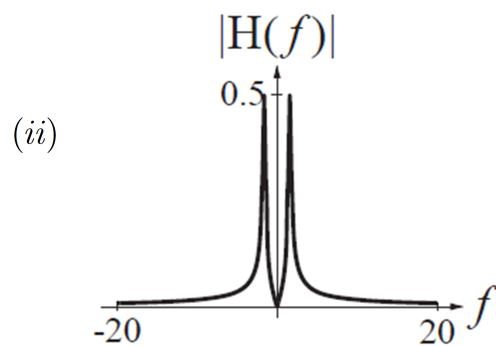
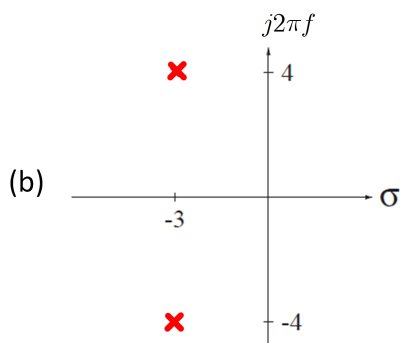
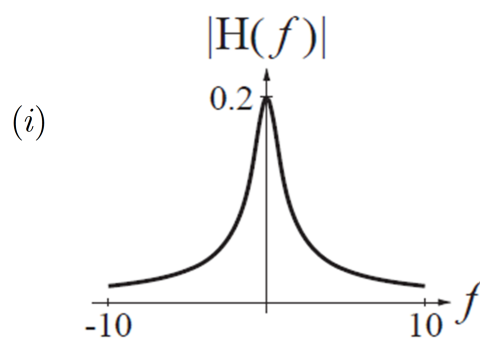
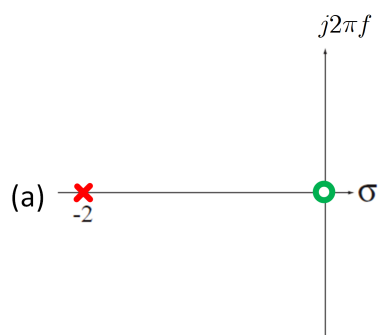
(β') Πολλαπλασιάζοντας χιαστί έχουμε

$$Y(s)(s^2 + 3s) = X(s)(3 + 3s) \iff s^2Y(s) + 3sY(s) = 3X(s) + 3sX(s) \quad (54)$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης, επιστρέφουμε στο πεδίο του χρόνου, δηλ.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) = 3x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) \quad (55)$$

(γ') Αφού το πεδίο σύγκλισης είναι το $\sigma > 0$, ο φανταστικός άξονας $\sigma = 0$ δεν περιλαμβάνεται σε αυτό, και άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση συχνότητας από τη συνάρτηση μεταφοράς.



Σχήμα 1: Σχήμα Θέματος 2.