ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ρήτρα εξέτασης: 4.5/10.0

Θέμα 1ο - 25 μονάδες: overview
(**5 μ.** έκαστο) Σωστό ή Λαθος; **Δικαιολογήστε επαρκώς - απάντηση χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογείται**.

(i.) Ο Αντιστρ. Μετασχ. Fourier του σήματος $X(f) = \dfrac{1}{j\pi f}$ είναι ο $x(t) = u(t)$.

(ii.) Ο ρυθμός Nyquist ενός σήματος με μέγιστη συχνότητα στα 5 kHz ισούται με 10 kHz.

(iii.) Η συχνότητα Nyquist ενός σήματος με μέγιστη συχνότητα στα 5 kHz ισούται με 5 kHz.

(iv.) Το σύστημα $y(t) = x(t) + 3$ είναι Γ.Χ.Α.

(v.) Για το σήμα $x(t) = 2 + 2\sin(2\pi t)$, οι συντελεστές Fourier του είναι όλοι μηδενικοί εκτός από τους X_{-1}, X_1.

Λύση:

i. Λάθος. Ισχύει $u(t) \longleftrightarrow \underline{\frac{1}{2}\delta(\mathbf{f})} + \frac{1}{j2\pi f}$.

ii. Σωστό. Ο ρυθμός Nyquist ισούται με το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας του σήματος.

iii. Σωστό. Η συχνότητα Nyquist ισούται με τη μέγιστη συχνότητα του σήματος.

iv. Λάθος. Για να είναι ΓΧΑ πρέπει να είναι γραμμικό (ομογενές και αθροιστικό) και χρονικά αμετάβλητο. Η ομογένεια σημαίνει

$$ax(t) \longrightarrow ay(t) \tag{1}$$

όμως

$$ax(t) \longrightarrow y_h(t) = ax(t) + 3 \neq a(x(t) + 3) = ay(t) \tag{2}$$

άρα δεν είναι ομογενές, κι έτσι ούτε και γραμμικό. Δε χρειάζεται να εξετάσουμε τη χρονική αμεταβλητότητα (όμως είναι χρονικά αμετάβλητο).

v. Λάθος. Η σταθερά 2 αντιστοιχεί στο συντελεστή X_0, άρα είναι και αυτός μη μηδενικός.

Θέμα 2ο - 30 μονάδες: Αντιστοίχιση
Στο Σχήμα 1, αντιστοιχίστε τα στοιχεία της δεξιάς στήλης με αυτά της αριστερής στήλης. Ένα στοιχείο της μιας στήλης αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο της άλλης. **Η αντιστοίχιση να γραφεί στην κόλλα των απαντήσεών σας ως π.χ.** $(a) \rightarrow (ii)$**. Αιτιολογήστε επαρκώς κάθε αντιστοίχιση. Αντιστοιχίσεις χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

Λύση:

- $(a) \rightarrow (iii)$: ο μετασχ. Fourier ενός μετατοπισμένου τετραγωνικού παλμού πλάτους A και διάρκειας T, με μετατόπιση a προς τα αριστερά, ισούται με

$$X(f) = AT\text{sinc}(fT)e^{j2\pi af} \tag{3}$$

Το φάσμα φάσης του, $\phi(f)$, δίνεται από το άθροισμα του φάσματος φάσης του $\text{sinc}(fT)$ και της γραμμικής φάσης $2\pi af$, με $a > 0$. Η φάση του πρώτου όρου είναι γνωστή από τις διαλέξεις, είναι τμηματικά σταθερή $(0, \pm\pi)$. Αρα συνολικά $\phi(f) = 2\pi af + \begin{cases} 0, & \text{sinc}(fT) > 0 \\ \pi, & f > 0, \text{sinc}(fT) < 0 \\ -\pi, & f < 0, \text{sinc}(fT) < 0 \end{cases}$

- $(b) \rightarrow (i)$: από την ιδιότητα της δυικότητας, $x(t) = \text{sinc}(Tt) \longleftrightarrow X(f) = T\text{rect}(t/T)$.
- $(c) \rightarrow (ii)$: ο μετασχ. Fourier ενός μετατοπισμένου τριγωνικού παλμού πλάτους A και (μισής) διάρκειας T, με μετατόπιση a προς τα δεξιά, ισούται με

$$X(f) = AT\text{sinc}^2(fT)e^{-j2\pi af} \tag{4}$$

Το φάσμα φάσης του, $\phi(f)$, δίνεται από το άθροισμα του φάσματος φάσης του $\text{sinc}^2(fT)$ και της γραμμικής φάσης $-2\pi af$, με $a > 0$. Η φάση του πρώτου όρου είναι γνωστή από τις διαλέξεις, είναι μηδενική. Αρα συνολικά $\phi(f) = -2\pi af$.

- $(d) \rightarrow (v)$: δυο πόλοι κοντά στο φανταστικό άξονα οδηγούν το φάσμα πλάτους σε υψηλές τιμές κοντά στις συχνότητες που βρίσκονται οι πόλοι.
- $(e) \rightarrow (iv)$: δυο μηδενικά κοντά στο φανταστικό άξονα οδηγούν το φάσμα πλάτους σε χαμηλές τιμές κοντά στις συχνότητες που βρίσκονται τα μηδενικά.

Θέμα 3ο - 25 μονάδες: μετασχ. Fourier

Δείξτε ότι ο αντιστρ. μετασχ. Fourier $x(t)$ του σήματος

$$X(f) = \frac{1}{\pi}\ln(-f)\cos(2\pi Tf) \tag{5}$$

δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\text{sgn}(t-T)}{t-T} + \frac{\text{sgn}(t+T)}{t+T}\right) \tag{6}$$

Η συνάρτηση $\text{sgn}(\cdot)$ είναι η γνωστή συνάρτηση προσήμου, ενώ όπου $\ln(\cdot)$ είναι ο φυσικός λογάριθμος, τέτοιος ώστε

$$\frac{d}{dt}\ln(t) = \frac{1}{t} \tag{7}$$

Λύση:

Θα έχουμε

$$x(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{\pi}\ln(-f)\cos(2\pi Tf)\right\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{\pi}\ln(-f)\right\} * F^{-1}\{\cos(2\pi Tf)\} \tag{8}$$

Ο δεύτερος όρος της συνέλιξης μας δίνει

$$F^{-1}\{\cos(2\pi Tf)\} = \frac{1}{2}\delta(t-T) + \frac{1}{2}\delta(t+T) \tag{9}$$

Για τον πρώτο όρο τώρα (επανάληψη 3ου Θέματος, Ιούνιος 2024): γνωρίζουμε ότι

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \tag{10}$$

και από ιδιότητα δυϊκότητας

$$\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow \mathrm{sgn}(-f) = -\mathrm{sgn}(f) \tag{11}$$

λόγων περιττότητας της συνάρτησης $\mathrm{sgn}(\cdot)$. Έστω $y(t) = \frac{1}{\pi}\ln(t)$. Θα έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow F\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} = -j\mathrm{sgn}(f) \tag{12}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης

$$\frac{d}{dt}y(t) \longleftrightarrow j2\pi f Y(f) \tag{13}$$

παίρνουμε

$$j2\pi f Y(f) = -j\mathrm{sgn}(f) \Longleftrightarrow Y(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{sgn}(f)}{f} \tag{14}$$

δηλ. τελικά

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\ln(t) \longleftrightarrow Y(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{sgn}(f)}{f} \tag{15}$$

(τέλος επανάληψης θέματος)

Από δυικότητα ξανά

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{sgn(t)}}{t} \longleftrightarrow \frac{1}{\pi}\ln(-f) \tag{16}$$

Βρήκαμε λοιπόν τον αντιστρ. Μετασχ. Fourier και του δεύτερου όρου. Συνολικά λοιπόν:

$$x(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{\pi}\ln(-f)\right\} * F^{-1}\left\{\cos(2\pi T f)\right\} \tag{17}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{sgn(t)}}{t} * \left(\frac{1}{2}\delta(t-T) + \frac{1}{2}\delta(t+T)\right) \tag{18}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathrm{sgn}(t-T)}{t-T} + \frac{\mathrm{sgn}(t+T)}{t+T}\right) \tag{19}$$

από γνωστές ιδιότητες της συνέλιξης.

Θέμα 4ο - 30 μονάδες: συστήματα και μετασχ. Laplace

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -2\frac{d}{dt}y(t) - ay(t) + x(t) \tag{20}$$

(α΄) **(15 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$.

(β΄) **(15 μ.)** Βρείτε το εύρος τιμών της μεταβλητής a που οδηγούν σε ευσταθές σύστημα.

<u>Λύση:</u>

(α΄) Θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -2\frac{d}{dt}y(t) - ay(t) + x(t) \longleftrightarrow s^2Y(s) = -2sY(s) - aY(s) + X(s) \tag{21}$$

οπότε

$$s^2Y(s) = -2sY(s) - aY(s) + X(s) \Longleftrightarrow (s^2+2s+a)Y(s) = X(s) \Longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s^2+2s+a} \tag{22}$$

και λόγω αιτιατότητας, το πεδίο σύγκλισης θα είναι $\sigma > \Re\{s_0\}$, με s_0 ο πόλος (εκ των δυο που έχει) με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.

(β΄) Για να είναι ευσταθές, θα πρέπει οι πόλοι του να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο - δεδομένου ότι είναι αιτιατό από εκφώνηση - ή αλλιώς, να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Οι πόλοι του δίνονται από τη σχέση

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot a}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{4(1-a)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-a} \tag{23}$$

Αρα έχει δυο πόλους, $-1+\sqrt{1-a}$, $-1-\sqrt{1-a}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1-a>0 \Longleftrightarrow a<1$: στην περίπτωση αυτή, και οι δυο πόλοι ειναι πραγματικοί. Ο πόλος $-\sqrt{1-a}-1$ είναι σίγουρα αρνητικός, μένει να εξετάσουμε τον $\sqrt{1-a}-1$. Ψάχνουμε αν υπάρχουν τιμές του a για τις οποίες ο πόλος αυτός είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το μηδέν (γιατί τότε θα βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο και άρα δε θα έχουμε ευστάθεια). Έτσι,

$$-1+\sqrt{1-a} \geq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{1-a} \geq 1 \Longleftrightarrow a \leq 0 \tag{24}$$

  Αρα πρέπει $0<a<1$ για να είναι και οι δυο πόλοι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

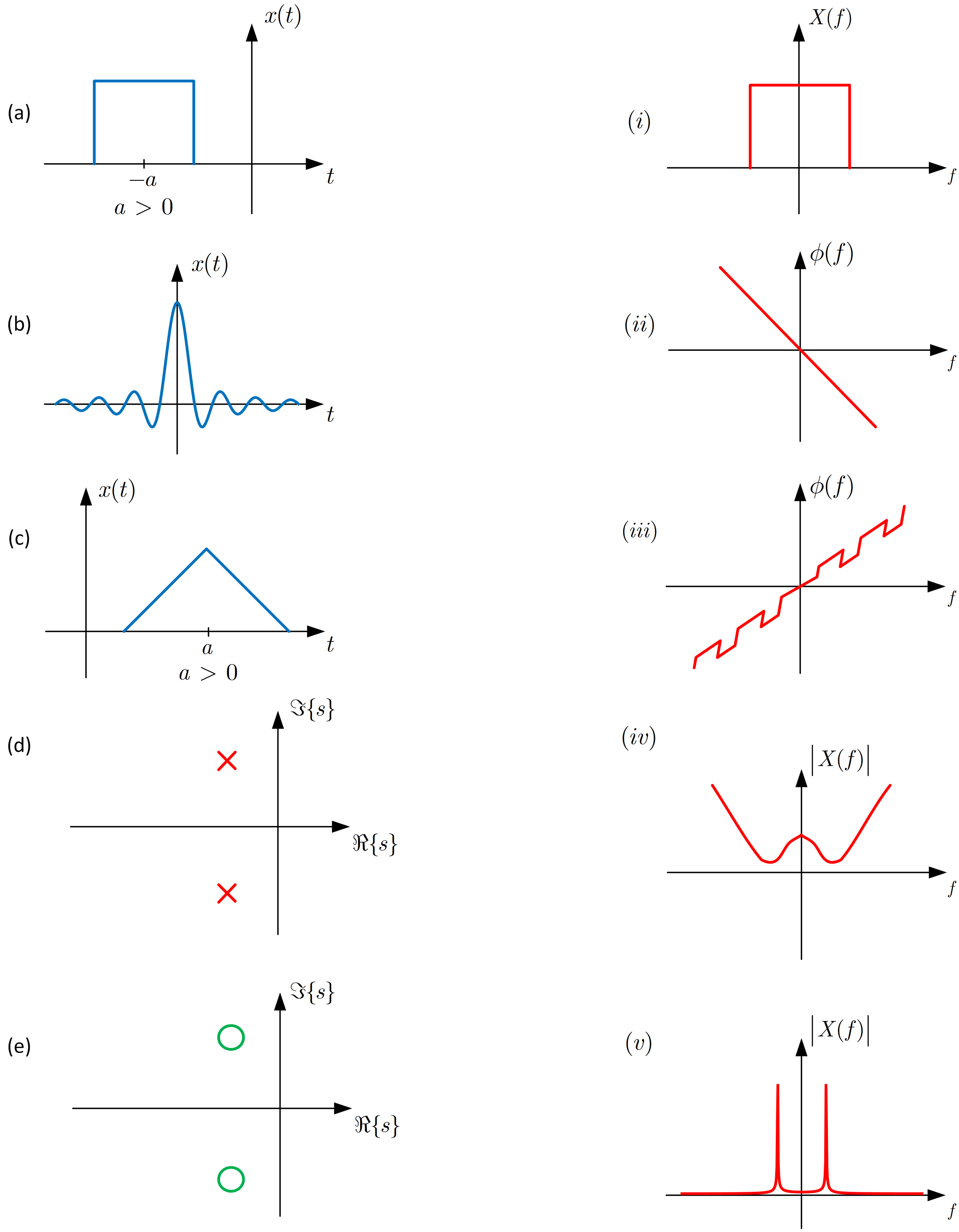
- $1-a<0 \Longleftrightarrow a>1$: στην περίπτωση αυτή, έχουμε

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-(a-1)} = -1 \pm j\sqrt{a-1} \tag{25}$$

  και έχουμε δυο συζυγείς πόλους, με πραγματικό μέρος $\Re\{s_{1,2}\} = -1$, που θέτει τους πόλους πράγματι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, και άρα υπάρχει ευστάθεια.

- $1-a=0 \Longleftrightarrow a=1$: τοτε έχουμε διπλή ρίζα (διπλό πόλο) στο $s=-1$, που καλύπτει την ευστάθεια.

Συνολικά λοιπόν, από τις περιπτώσεις καταλαβαίνουμε ότι συνθήκη ευστάθειας αποτελεί η σχέση $a>0$.



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 2.*