ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ρήτρα εξέτασης: 4.5/10.0

- **Διαθέσιμες μονάδες: 110 - Αριστα: 100**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ όσα γράφετε. Απαντήσεις χωρίς δικαιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

Θέμα 1ο - 20 μονάδες: overview
(**5 μ.** έκαστο) Σωστό ή Λαθος; **Δικαιολογήστε επαρκώς - απάντηση χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογείται**.

(i.) Ο ρυθμός Nyquist για το σήμα
$$x(t) = -10\sin(40\pi t)\cos(300\pi t)$$
είναι ίσος με 340 Hz.

(ii.) Τα δυο σήματα $x_1(t) = e^{jt}$ και $x_2(t) = e^{t(j+1)}$ είναι **και τα δυο** περιοδικά.

(iii.) Το σήμα
$$x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) * \delta(t-2)$$
με $*$ να συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης, μηδενίζεται **μόνο** για $t = 0$.

(iv.) Αν $X(f)$ ο μετασχ. Fourier ενός σήματος $x(t)$, το γράφημα της συνάρτησης $|X(f)|^2$ ως προς f μας δείχνει πώς η ενέργεια του σήματος κατανέμεται σε διάφορες συχνότητες.

Λύση:

i. Σωστό. Είτε με τριγωνομετρικές ταυτότητες είτε με την παρακάτω διαδικασία

$$X(f) = (-5j\delta(f-20) + 5j\delta(f+20)) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-150) + \frac{1}{2}\delta(f+150)\right) \tag{1}$$
$$= -\frac{5j}{2}\delta(f-170) - \frac{5j}{2}\delta(f+130) + \frac{5j}{2}\delta(f-130) + \frac{5j}{2}\delta(f+170) \tag{2}$$

παρατηρούμε ότι η μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στο σήμα είναι η $f_{max} = 170$ Hz, άρα ο ρυθμός Nyquist είναι πράγματι $2f_{max} = 340$ Hz.

ii. Λάθος. Το πρώτο είναι πράγματι περιοδικό αλλά για το δεύτερο

$$x_2(t) = e^{t(j+1)} = e^t e^{jt} = A(t)e^{jt} \tag{3}$$

με $A(t)$ ένα σήμα που αυξάνει όσο μεγαλώνει το t, άρα το $x_2(t)$ δεν ειναι περιοδικό.

iii. Λάθος. Από την ιδιότητα

$$\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0) \tag{4}$$

παίρνουμε

$$x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi(t-2)}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{5}$$

το οποίο μηδενίζεται και σε άλλες χρονικές στιγμές (π.χ. $t = 4$).

iv. Σωστό. Η συνάρτηση $|X(f)|^2$ αποτελεί τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_x(f)$ του σήματος $x(t)$ και πράγματι μας δείχνει πώς η ενέργεια του σήματος κατανέμεται σε διάφορες συχνότητες.

Θέμα 2ο - 30 μονάδες: Τηλεπικοινωνιακό κανάλι

Θεωρήστε ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που μοντελοποιείται ως ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_h}{2}}{T_h}\right) \tag{6}$$

Θα το χρησιμοποιήσουμε ως εξής:

- Αν θέλουμε να μεταδώσουμε το bit ‘1’, θα βάζουμε είσοδο στο κανάλι το σήμα $x_1(t)$ που θα είναι το

$$x_1(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_b}{2}}{T_b}\right) \tag{7}$$

- Αν θέλουμε να μεταδώσουμε το bit ‘0’, θα βάζουμε ως είσοδο στο κανάλι το σήμα $x_0(t)$ που θα είναι το

$$x_0(t) = -A\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_b}{2}}{T_b}\right) \tag{8}$$

Υποθέστε ότι $T_h < T_b$ και $A > 0$. Η έξοδος $y(t)$ του συστήματος θα είναι το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης.

(α’) **(5 μ.)** Σχεδιάστε τα σήματα $x_0(t)$, $x_1(t)$ με λεπτομέρεια.

(β’) **(5 μ.)** Υπολογίστε το μετασχ. Fourier τους, $X_0(f)$, $X_1(f)$.

(γ’) **(15 μ.)** Υπολογίστε και σχεδιάστε το σήμα $y_1(t) = h(t) * x_1(t)$, δηλ. την έξοδο του καναλιού όταν μεταδίδουμε το bit ‘1’.

(δ’) **(2.5 μ.)** Επαναλάβατε για το $y_0(t) = h(t) * x_0(t)$, δηλ. την έξοδο του καναλιού όταν μεταδίδουμε το bit ‘0’.

(ε’) **(2.5 μ.)** Περιγράψτε με λόγια πως θα μπορούσε ο δέκτης, με χρήση του $y(t)$, να αποφασίσει ποιό bit έχουμε στείλει (θεωρήστε ότι δεν υπάρχει θόρυβος, παρεμβολές, ή άλλες αλλοιώσεις του καναλιού).

Λύση:

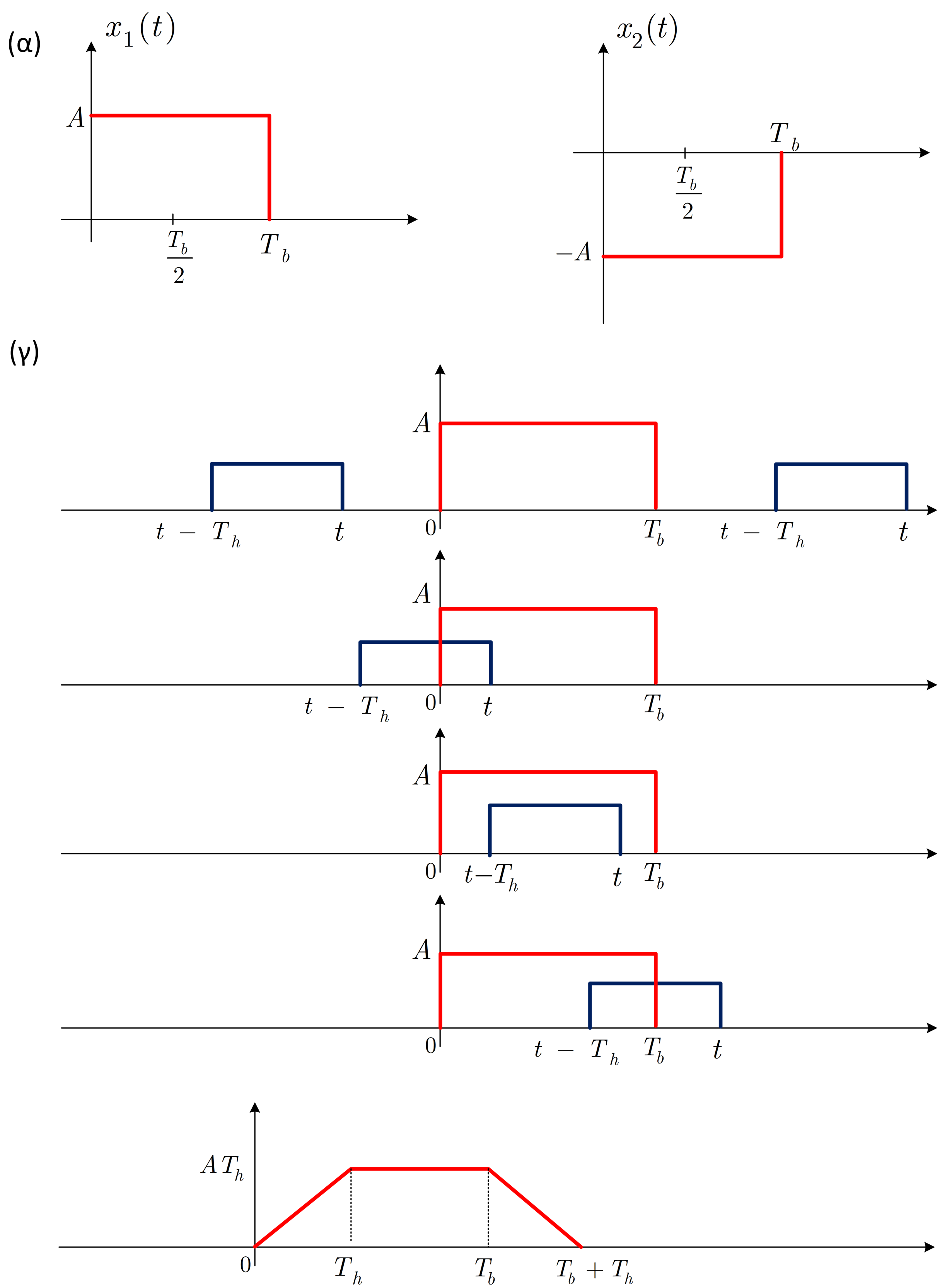
(α’) Τα σήματα φαίνονται στο Σχήμα 1.

(β’) Από γνωστά ζεύγη και ιδιότητες, είναι

$$X_0(f) = AT_b\mathrm{sinc}(fT_b)e^{-j2\pi fT_b/2} = AT_b\mathrm{sinc}(fT_b)e^{-j\pi fT_b} \tag{9}$$

και

$$X_1(f) = -AT_b\mathrm{sinc}(fT_b)e^{-j2\pi fT_b/2} = -AT_b\mathrm{sinc}(fT_b)e^{-j\pi fT_b} \tag{10}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 2.*

(γ΄) Το σήμα φαίνεται στο Σχήμα 1, μαζί με τα βήματα της συνέλιξης. Αναλυτικά,

- Για $t < 0$ και $t - T_h > T_b \Longrightarrow t > T_b + T_h$, η συνέλιξη ισούται με μηδέν.

- Για $t > 0$ και $t - T_h < 0 \Longrightarrow t < T_h$, δηλ. για $0 < t < T_h$, θα έχουμε

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \int_0^t A dt = At\Big|_0^t = A^2 t \tag{11}$$

- Για $t < T_b$ και $t - T_h > 0 \Longrightarrow t > T_h$, δηλ. για $T_h < t < T_b$, θα έχουμε

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \int_{t-T_h}^t A dt = At\Big|_{t-T_h}^t = A(t - (t - T_h) = AT_h \tag{12}$$

- Για $t > T_b$ και $t - T_h < T_b \Longrightarrow t < T_h + T_b$, δηλ. για $T_b < t < T_h + T_b$, θα έχουμε

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \int_{t-Th}^{T_b} A^2 dt = At\Big|_{t-T_h}^{T_b} = A(T_b - (t - T_h)) = A(T_b + T_h - t) \tag{13}$$

Συνολικά

$$y_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t > T_b + T_h \\ At, & 0 < t < T_h \\ AT_h, & T_h < t < T_b \\ A(T_b + T_h - t), & T_b < t < T_b + T_h \end{cases} \tag{14}$$

(δ΄) Η μόνη διαφορά στους υπολογισμούς είναι το πρόσημο του αποτελέσματος σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα. Το σήμα θα είναι το αρνητικό του σήματος $y_1(t)$ που φαίνεται ως έξοδος στο Σχήμα 1, δηλ. το

$$y_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t > T_b + T_h \\ -At, & 0 < t < T_h \\ -AT_h, & T_h < t < T_b \\ -A(T_b + T_h - t), & T_b < t < T_b + T_h \end{cases} \tag{15}$$

(ε΄) Μπορούμε να ελέγξουμε απλά το πρόσημο του σήματος $y(t)$.

Θέμα 3ο - 25 μονάδες: μετασχ. Fourier

Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier $X(f)$ του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \ln(t) \tag{16}$$

δίνεται από τη σχέση

$$X(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\text{sgn}(f)}{f} \tag{17}$$

Η συνάρτηση $\text{sgn}(\cdot)$ είναι η γνωστή συνάρτηση προσήμου, ενώ όπου $\ln(t)$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του t, τέτοιος ώστε

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{\pi t} \tag{18}$$

<u>Λύση</u>: Γνωρίζουμε ότι

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \tag{19}$$

και από ιδιότητα δυϊκότητας

$$\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow \text{sgn}(-f) = -\text{sgn}(f) \tag{20}$$

λόγων περιττότητας της συνάρτησης $\mathrm{sgn}(\cdot)$. Θα έχουμε

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = -j\mathrm{sgn}(f) \tag{21}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης

$$\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi f X(f) \tag{22}$$

παίρνουμε

$$j2\pi f X(f) = -j\mathrm{sgn}(f) \Longleftrightarrow X(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{sgn}(f)}{f} \tag{23}$$

Θέμα 4ο - 35 μονάδες: συστήματα και μετασχ. Laplace

Έστω το *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 2.

(αʹ) **(5 μ.)** Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του συστήματος;

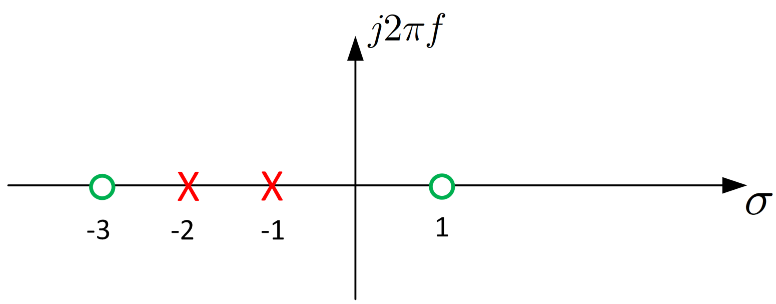
(βʹ) **(5 μ.)** Αν γνωρίζετε ότι $H(0) = -3/2$, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.

(γʹ) **(5 μ.)** Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς; Αν ναι, βρείτε τη. Αν όχι, γιατί; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση.

(δʹ) **(5 μ.)** Υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα, $H_{inv}(s)$, για το παραπάνω σύστημα;

(εʹ) **(5 μ.)** Αν η αιτιατότητα δε μας ενδιαφέρει, υπάρχει ευσταθές αντίστροφο σύστημα, $H_{inv}(s)$, για το παραπάνω σύστημα; Αν ναι, βρείτε το. Αν όχι, εξηγήστε. Σε κάθε περίπτωση, αιτιολογήστε επαρκώς.

(ϛʹ) **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του αρχικού συστήματος $H(s)$.



Σχήμα 2: *Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Θέματος 4.*

<u>Λύση</u>:

(αʹ) Το πεδίο σύγκλισης θα είναι υποχρεωτικά το $\sigma > -1$, ως αιτιατό σύστημα (δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης).

(βʹ) Θα έχουμε

$$H(s) = A\frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s+2)} \tag{24}$$

από το διάγραμμα, και επειδή $H(0) = -3/2$, παίρνουμε $A = 1$. Οπότε

$$H(s) = \frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s+2)}, \;\; \sigma > -1 \tag{25}$$

(γ΄) Ναι, μπορεί να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας αφού ο φανταστικός άξονας $\sigma = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Αυτή θα είναι

$$H(f) = \frac{(j2\pi f - 1)(j2\pi f + 3)}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f + 2)} \tag{26}$$

(δ΄) Για να υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα πρέπει όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωσή μας, άρα δεν υπάρχει τέτοιο σύστημα.

(ε΄) Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι γίνονται μηδενικά και τα μηδενικά πόλοι. Άρα θα έχουμε πόλους στο $s = -3$, $s = 1$ και μηδενικά στα $s = -1$, $s = -2$. Τότε υπάρχει ευσταθές αντίστροφο σύστημα, το

$$H_{inv}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s-1)} \tag{27}$$

με πεδίο σύγκλισης $-3 < \sigma < 1$, που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

(ϛ΄) Είναι

$$H(s) = \frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{-s-5}{(s+1)(s+2)} \tag{28}$$

αν διαιρέσουμε τα πολυώνυμα του s. Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα παίρνουμε

$$H(s) = 1 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = 1 + \frac{-4}{s+1} + \frac{3}{s+2} \tag{29}$$

Επειδή $\sigma > -1 = \{\sigma > -1\} \cap \{\sigma > -2\}$, από γνωστά ζεύγη παίρνουμε

$$h(t) = \delta(t) - 4e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) \tag{30}$$