

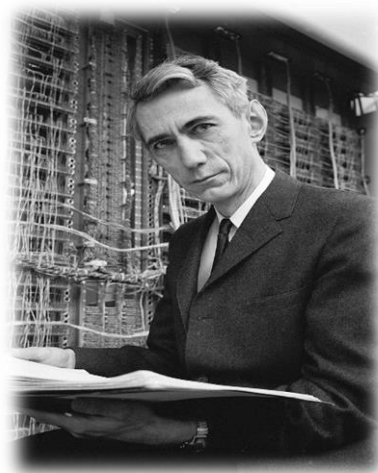
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 15^Η

- Δειγματοληψία



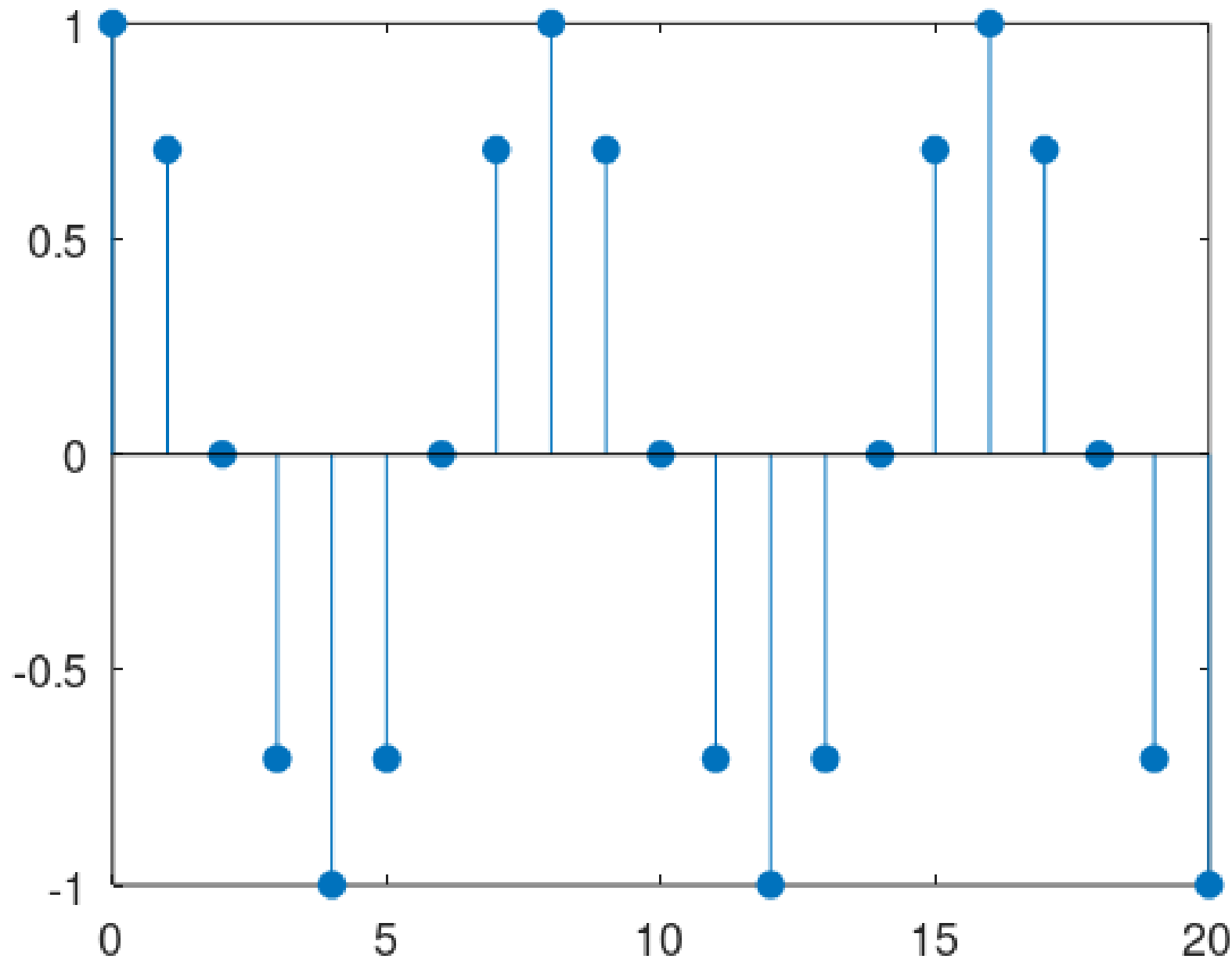
- **Δειγματοληψία**
- **Πύλη του ψηφιακού κόσμου!**
- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα* - *samples*) ένα σήμα συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?
- **Απάντηση:** Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)



- Πριν δούμε πως προκύπτει το θεώρημα αυτό, ας κάνουμε ένα κουίζ! ☺ ...

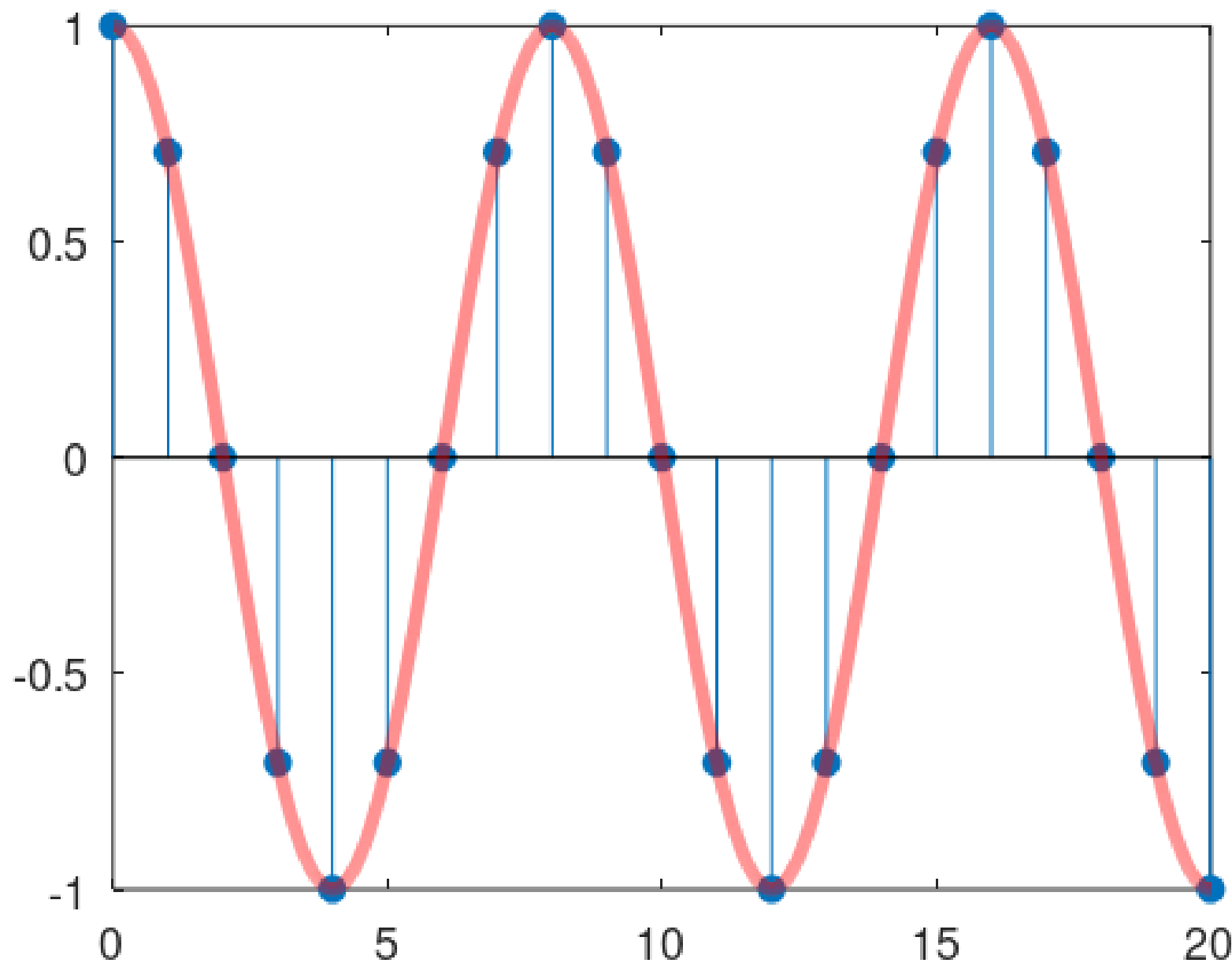
• Δειγματοληψία

Quiz:



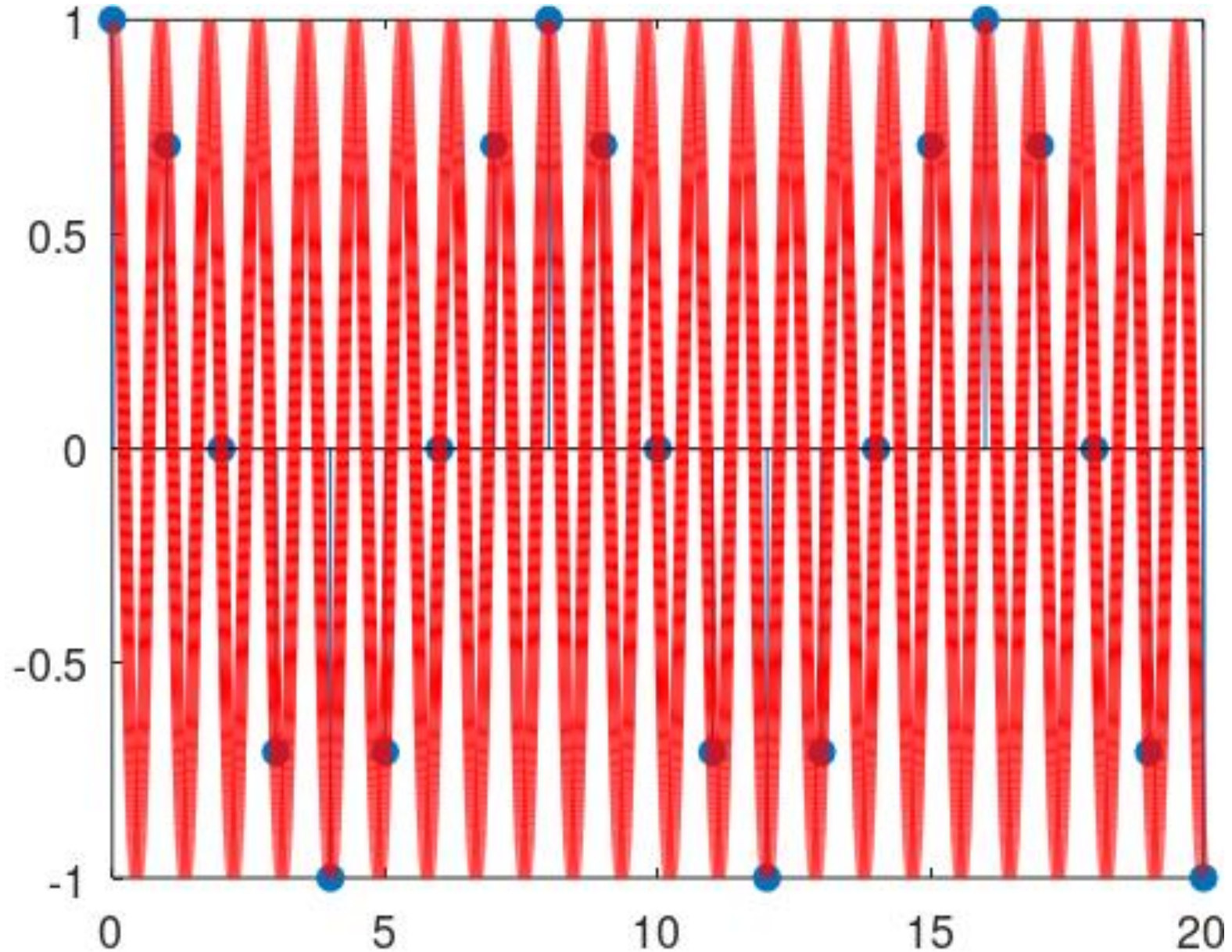
• Δειγματοληψία

Quiz:



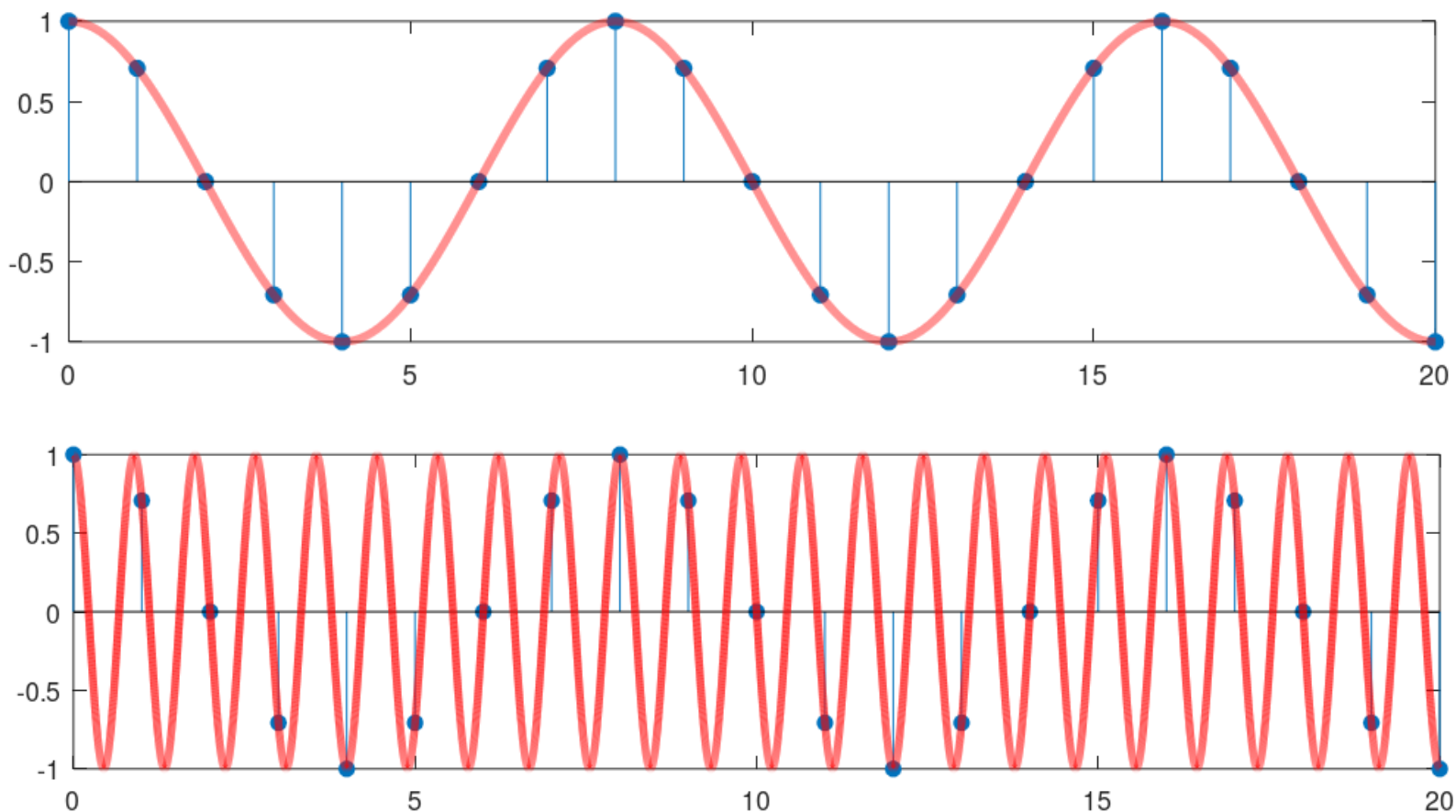
- Δειγματοληψία

Quiz:



• Δειγματοληψία

Quiz:

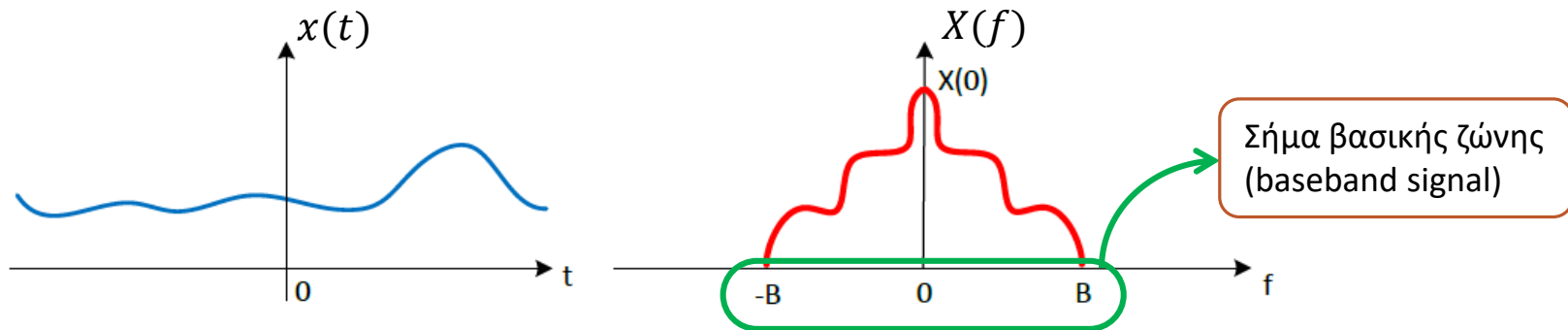


Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι δεν αρκεί να πάρουμε κάποια δείγματα από ένα σήμα: μια συλλογή από δείγματα μπορεί να «ταιριάζει» σε άπειρα πιθανά σήματα συνεχούς χρόνου! ☺ Χρειαζόμαστε και άλλο ένα στοιχείο...

- **Δειγματοληψία**
- Θέλουμε να αποθηκεύσουμε ένα σήμα $x(t)$ σε έναν Η/Υ
- Προφανώς δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε τις *άπειρες* τιμές του
 - Ακόμα κι αν αυτό είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα
- Πρέπει να πάρουμε μερικά **δείγματα (a.k.a. τιμές)** του σήματος $x(t)$
 - **Τιμές:** $x(-20), x(-1), x(0), x(10), x(62.7)$, κ.ο.κ
- Τα δείγματα αυτά θέλουμε να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ξανά **ακριβώς** το σήμα συνεχούς χρόνου
- **Ερώτημα I: ποιες** τιμές πρέπει να πάρουμε;
 - Όποιες θέλουμε? Κάποιες συγκεκριμένες? Έχει σημασία?
- **Ερώτημα II: πόσο συχνά** πρέπει να τις πάρουμε;
 - Μια τιμή-δείγμα κάθε δευτερόλεπτο? Πιο συχνά? Λιγότερο συχνά? Έχει σημασία?
- Ας υποθέσουμε ότι θα δειγματοληπτήσουμε **ομοιόμορφα** και ότι το σήμα μας είναι σήμα **βασικής ζώνης (baseband signal)**
 - Δηλ. **με σταθερή χρονική απόσταση μεταξύ των δειγμάτων** και θεωρώντας ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος είναι μηδενικός εκτός ενός πεπερασμένου διαστήματος συχνοτήτων που περιλαμβάνει το μηδέν, δηλ. $X(f) = 0, f \notin [-B, B]$

• Δειγματοληψία

- Έστω ένα σήμα $x(t)$ και ο μετασχ. Fourier του $X(f)$ όπως στο σχήμα



$$\textcircled{1} \quad \sum X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \sum X_k \delta(f - k f_0)$$

- Για να «τραβήξουμε» δείγματα από το σήμα $x(t)$, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη δειγματοληπτική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

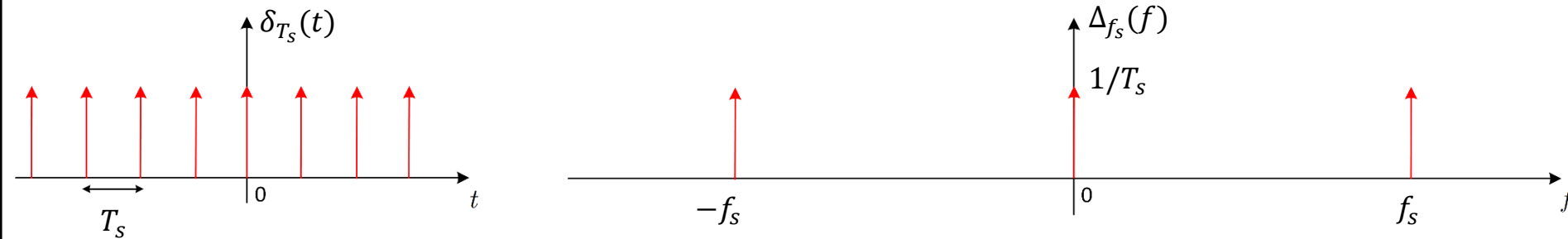
$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ας ορίσουμε μια **συνάρτηση (ομοιόμορφης) δειγματοληψίας με περίοδο δειγματοληψίας T_s**
- Η **συχνότητα δειγματοληψίας** είναι $f_s = 1/T_s$

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_s t} \textcircled{1} \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_s)$$

Δειγματοληψία

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$

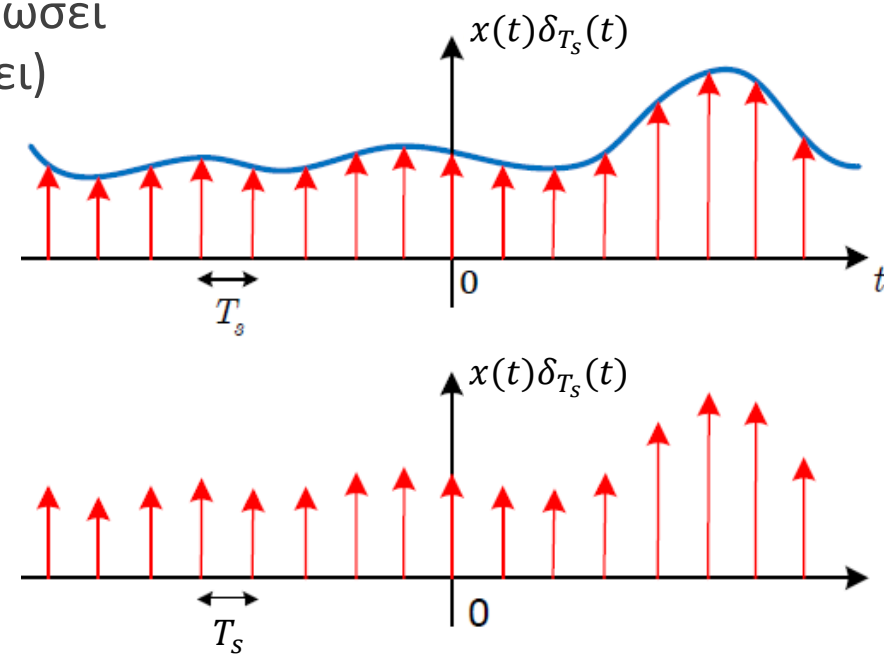


- Το γινόμενο της $\delta_{T_s}(t)$ με το σήμα $x(t)$ θα δώσει μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα με (εν γένει) μη μοναδιαίους συντελεστές

- Συναρτήσεις δέλτα που η “επιφάνειά” τους έχει αλλάξει με βάση το σήμα

$$x(t) \sum \delta(t - nT_s) = \sum x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

- Τα δείγματα απέχουν χρόνο T_s μεταξύ τους
 - Ας υποθέσουμε ότι αυτή η τιμή είναι «αρκετά μικρή»
 - Οπότε η $f_s = 1/T_s$ «αρκετά μεγάλη»



- **Δειγματοληψία**
- Γνωρίζουμε ότι το **γινόμενο** των δυο σημάτων **στο χρόνο** θα μετατραπεί σε συνέλιξη στο χώρο της **συχνότητας**
- Δηλ.

$$x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

και

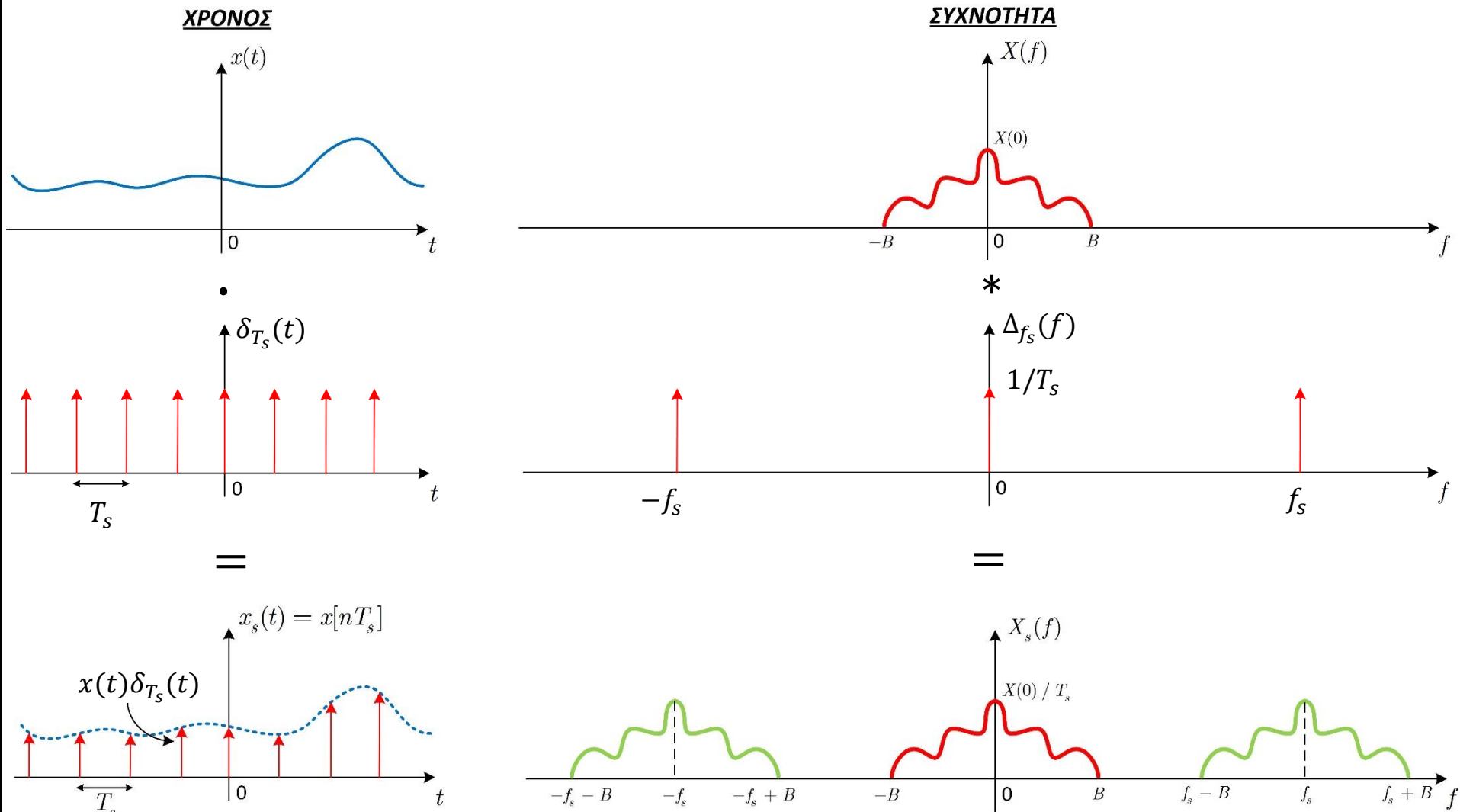
$$X(f) * \Delta_{f_s}(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} \delta(f - kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} X(f - kf_s)$$

$$X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0)$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι ένα άθροισμα από τους μετασχηματισμούς Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου, τοποθετημένους σε απόσταση f_s (ανά δυο) μεταξύ τους!!

- Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι **περιοδικός** στη **συχνότητα** με περίοδο f_s !!!

- **Δειγματοληψία**
- Σχηματικά, έχουμε την παρακάτω εικόνα:

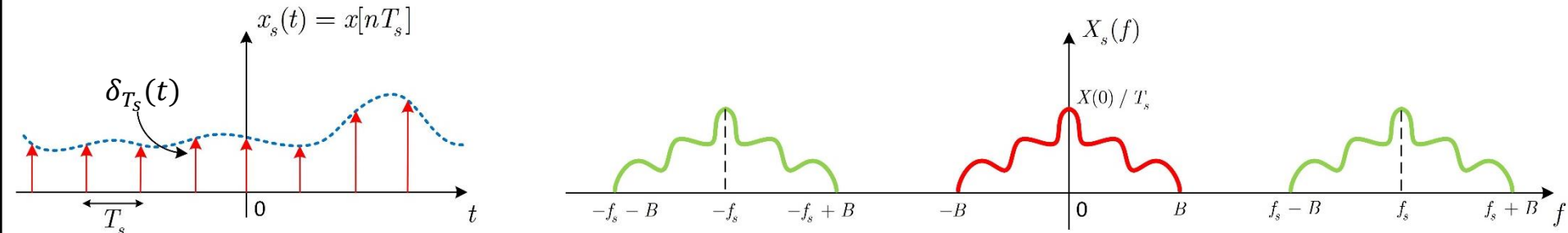


Δειγματοληψία – Ανακατασκευή

Έχουμε τώρα τα **δείγματα** από το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου

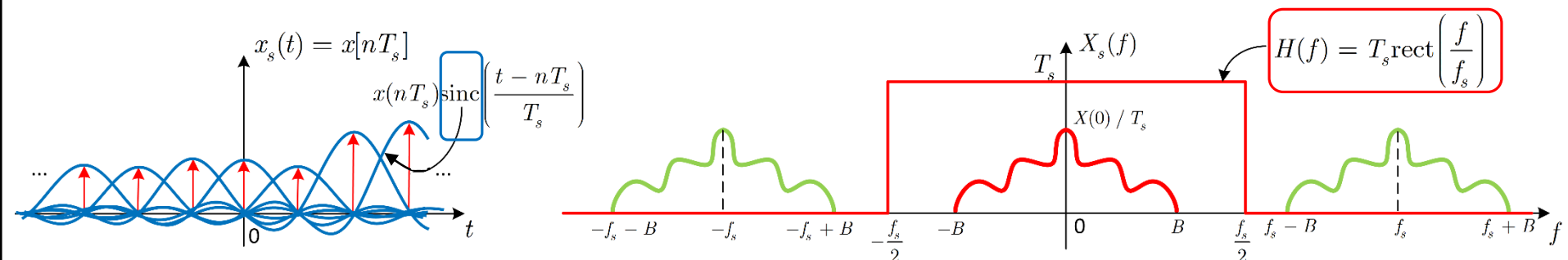
- Αυτά τα δείγματα μπορούν να αποθηκευτούν κάπου

Πως θα **ανακτήσουμε** το αρχικό φάσμα – και έτσι, το αρχικό σήμα – από τα δείγματά του, δηλ. από το δειγματοληπτημένο σήμα?

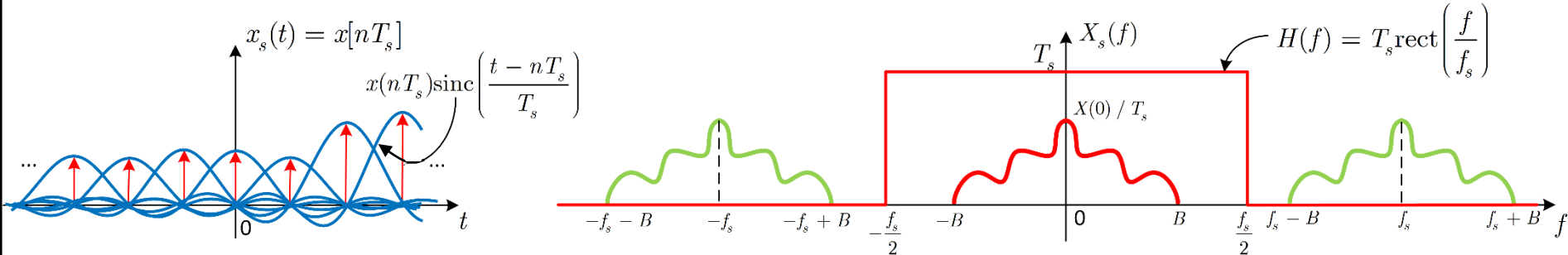


Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ένα **χαμηλοπερατό φίλτρο**, διάρκειας f_s , θα μπορούσε να **απομονώσει** το κεντρικό φάσμα που αντιστοιχεί στο σήμα συν. χρόνου

Το **γινόμενο** του φίλτρου με το φάσμα στη **συχνότητα** αντιστοιχεί σε **συνέλιξη στο χρόνο** των δειγμάτων του σήματος με μια συνάρτηση **sinc(.)**!!!!



• Δειγματοληψία – Ανακατασκευή



• Με μαθηματικά:

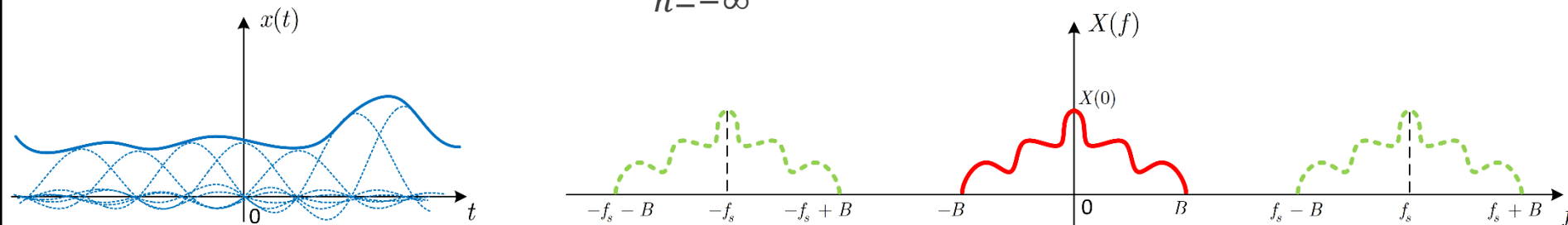
$$[X(f) * \Delta_{f_s}(f)] H(f) = [X(f) * \Delta_{f_s}(f)] T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = X(f)$$

• Στο πεδίο του χρόνου:

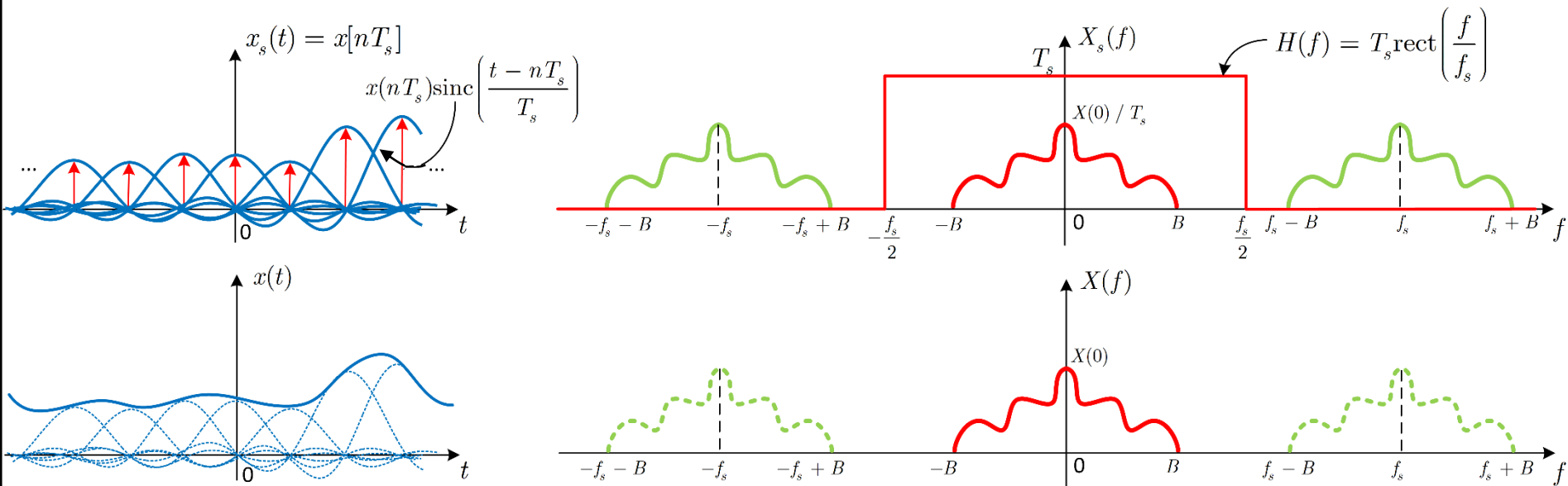
$$(x(t) \delta_{T_s}(t)) * h(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) = x(t)$$



• Δειγματοληψία – Ανακατασκευή



- Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση που επανασυνθέτει το σήμα στο συνεχή χρόνο

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

περιλαμβάνει συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$ οι οποίες έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά!

- Οι διαδοχικοί κεντρικοί τους λοβοί απέχουν μεταξύ τους απόσταση T_s
- Τα σημεία μηδενισμού τους βρίσκονται στις θέσεις $kT_s, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- Η «κορυφή» κάθε συνάρτησης $\text{sinc}(\cdot)$ έχει τιμή $x(nT_s)$

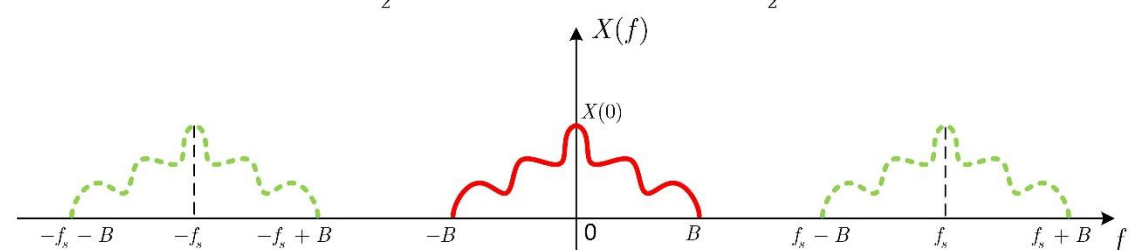
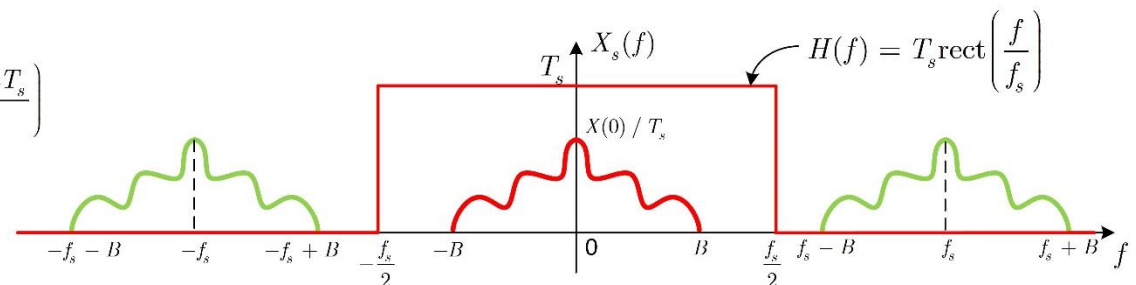
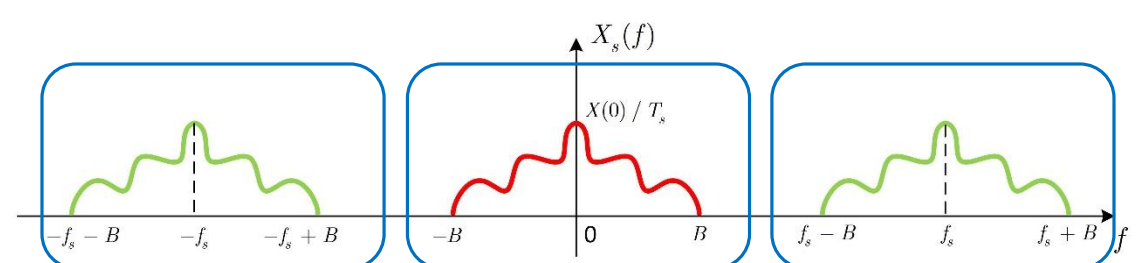
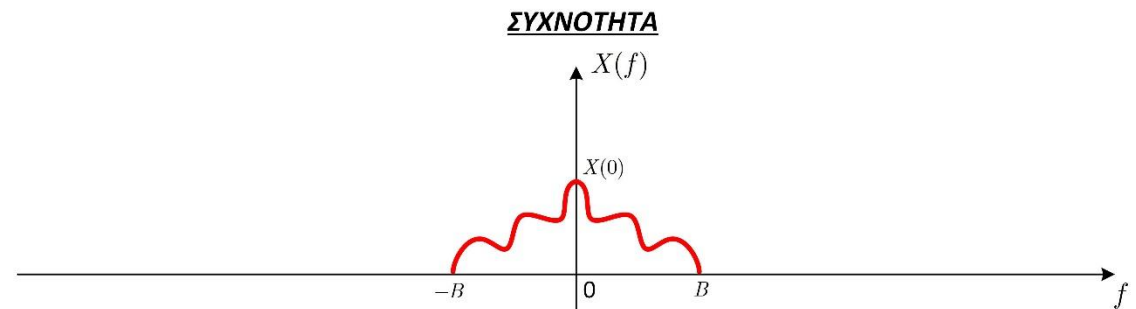
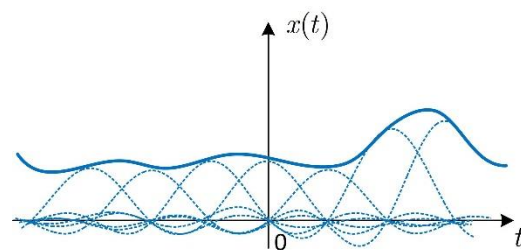
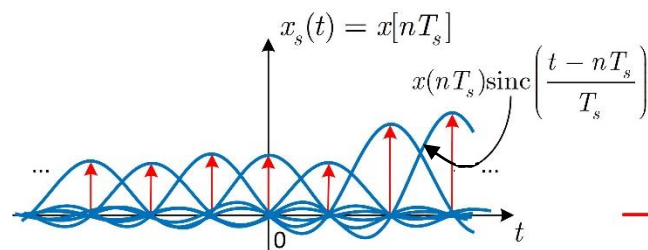
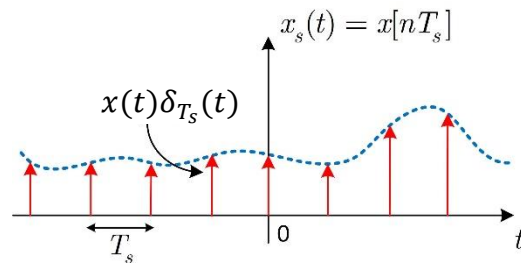
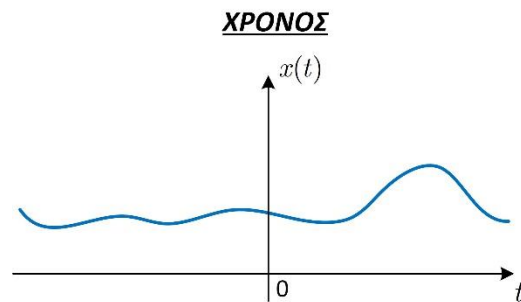


Στοιχείο:

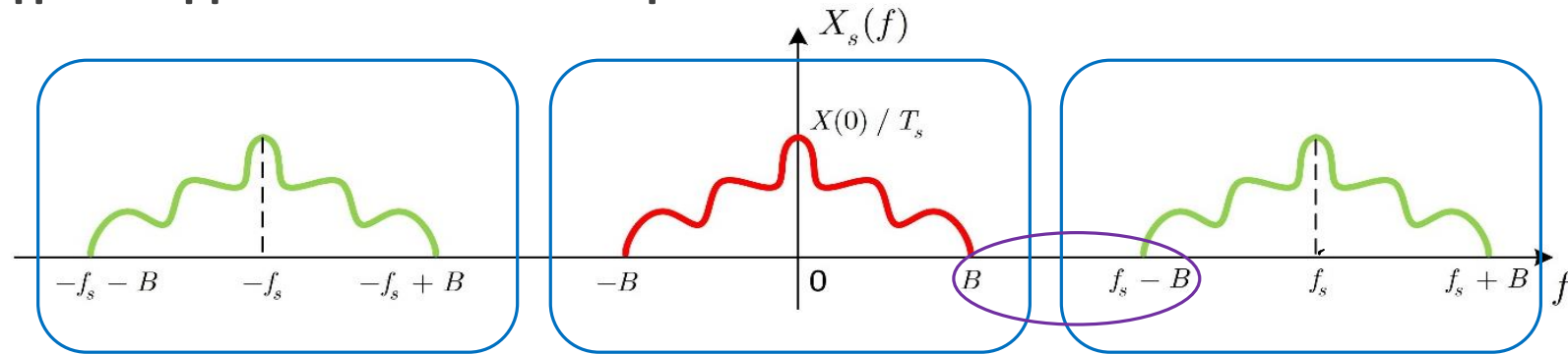
Χρειαζόμαστε
και την τιμή
της $T_s = 1/f_s$

• Δειγματοληψία και Ανακατασκευή

• Συγκεντρωτικά:



Δειγματοληψία – Ανακατασκευή



- Για να ισχύουν όλα τα προηγούμενα, πρέπει το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος να μην έχει επικαλύψεις!

- Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s να είναι «αρκετά μεγάλη»
- Πόσο μεγάλη?

Ορολογία:

Ρυθμός Nyquist: $2f_{max}$

Συχνότητα Nyquist: f_{max}

- Αρκεί

$$f_s - B > B \Leftrightarrow f_s > 2B = 2f_{max}$$

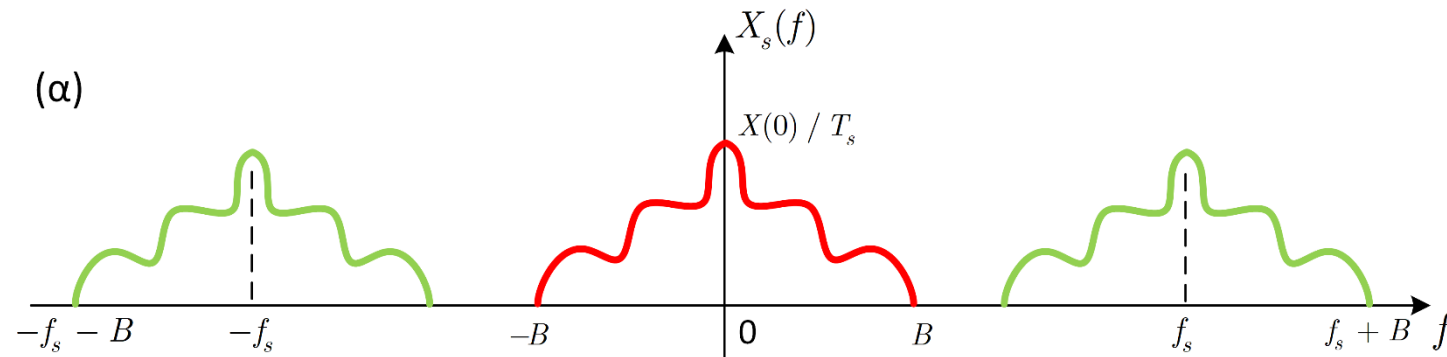
που αποτελεί και το **Θεώρημα της Δειγματοληψίας**

- Με άλλα λόγια, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε πλήρως και ακριβώς το σήμα συνεχούς χρόνου από μια δειγματοληπτημένη έκδοσή του (ένα σήμα διακριτού χρόνου) αν τα δείγματα έχουν ληφθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από $2B$ Hz, με $2B$ τη διπλάσια μέγιστη (μη μηδενικού πλάτους) συχνότητα, $2f_{max}$, του σήματος

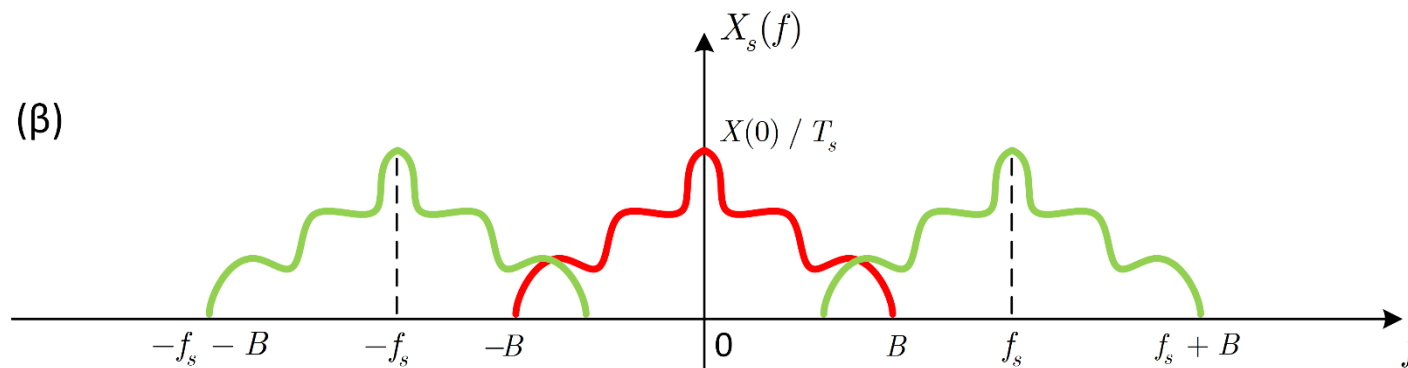
• Δειγματοληψία – Aliasing

• Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?

• Αν $f_s > 2f_{max}$, τότε:

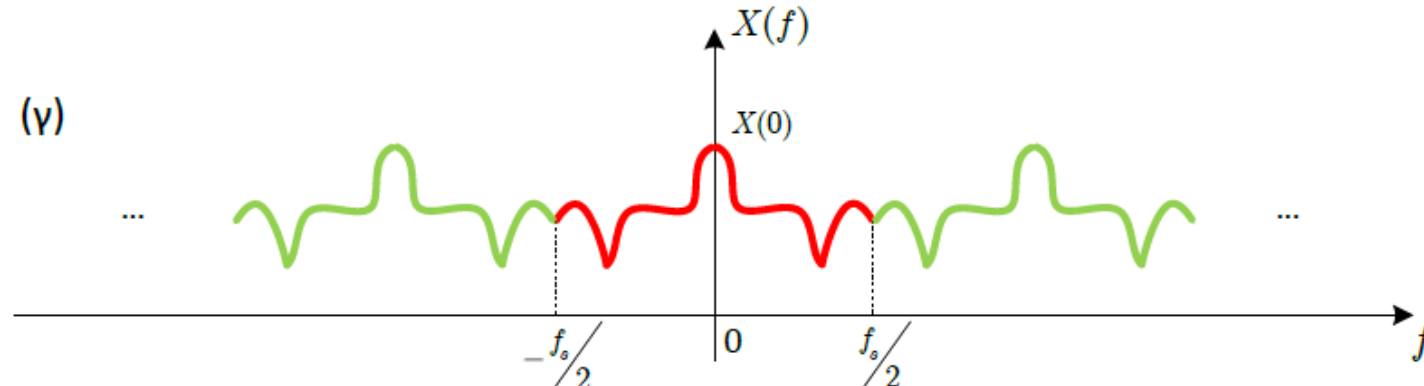


• Αν όμως $f_s < 2f_{max}$, τότε:



• Δειγματοληψία – Aliasing

- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?
- Το φάσμα που θα αποκόψει το χαμηλοπερατό φίλτρο θα μοιάζει με το παρακάτω:



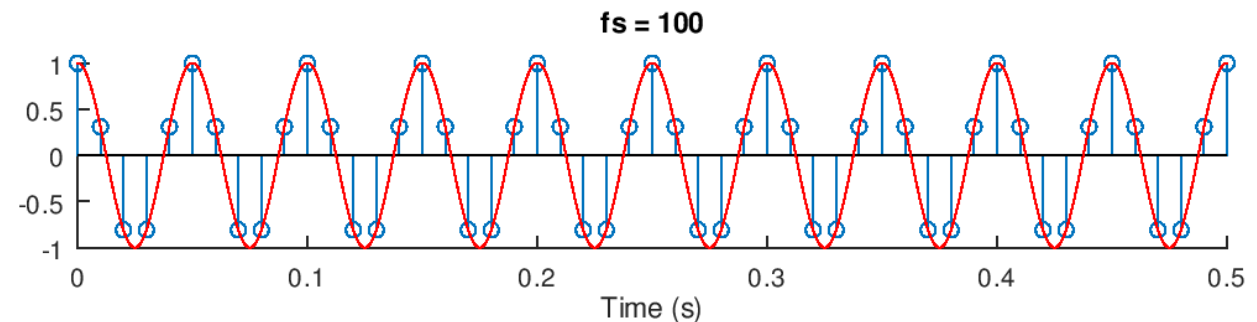
- Το φάσμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα εντελώς διαφορετικό σήμα στο χρόνο, σε σχέση με αυτό που δειγματοληπτήθηκε!!
 - Βλέπετε ότι έχουν εισαχθεί (και αλλοιώσει) το φάσμα συχνότητες που δεν ανήκουν σε αυτό (ξένες συχνότητες)
 - ... οι οποίες προέρχονται από το άθροισμα συχνοτήτων του ίδιου του σήματος και των γειτονικών αντιγράφων του
 - Οι συχνότητες αυτές λέγονται **ψευδώνυμες** συχνότητες (**aliased** frequencies)
- Το φαινόμενο της επικάλυψης των γειτονικών φασμάτων (και κατά συνέπεια της αλλοίωσης του φάσματος βασικής ζώνης) κατά τη δειγματοληψία ονομάζεται **aliasing**
 - **Ψευδωνυμία ή Αναδίπλωση** (in Greek)

• Δειγματοληψία

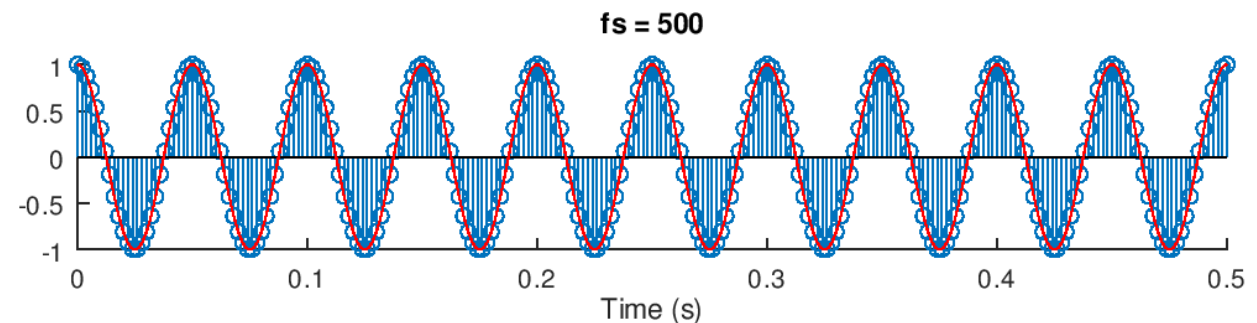
• Ας δούμε ένα παράδειγμα

• Έστω ένα απλό ημίτονο με $f_0 = 20$ Hz το οποίο δειγματοληπτείται με συχνότητες δειγματοληψίας

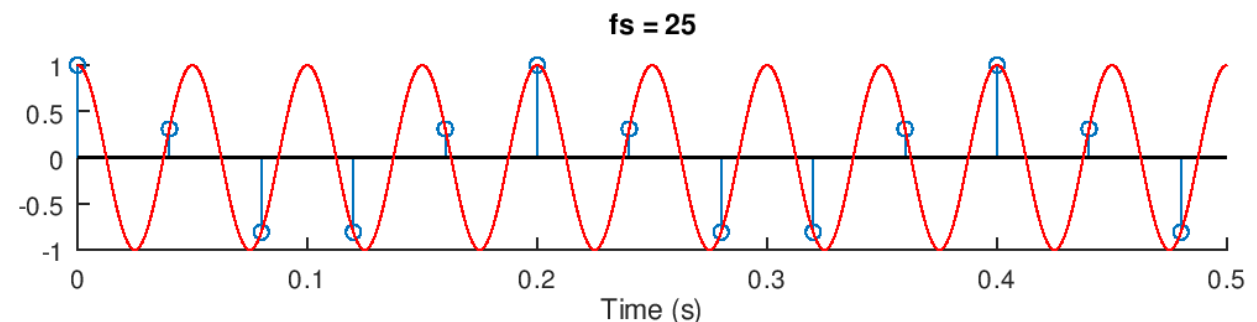
☐ $f_s = 100$ Hz



☐ $f_s = 500$ Hz



☐ $f_s = 25$ Hz



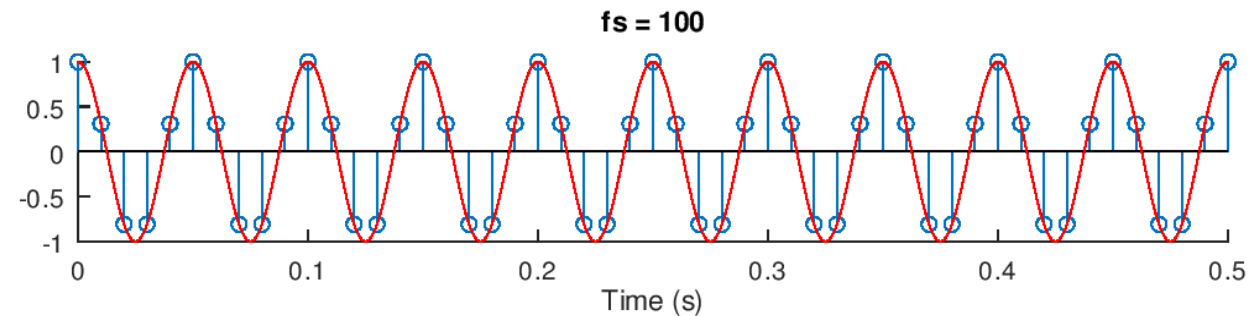
Δειγματοληψία

• Ας δούμε ένα παράδειγμα

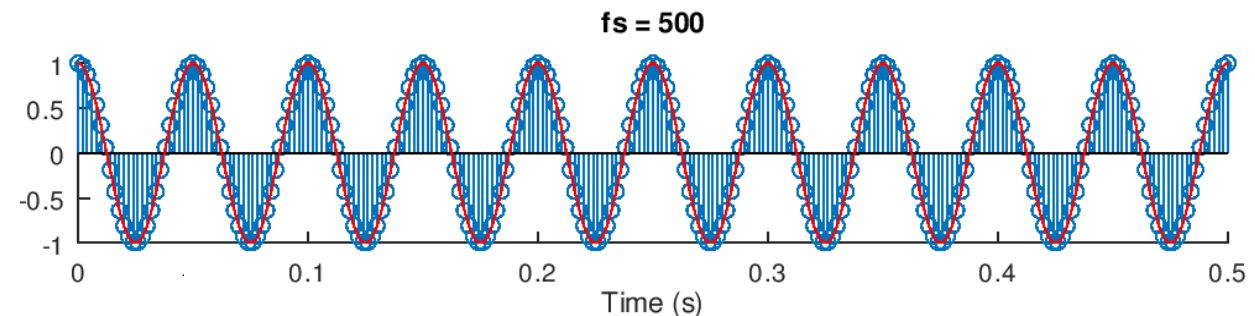
• Ποιο είναι το σήμα που ανακατασκευάζεται στην τελευταία περίπτωση?

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{f_s}\right) \text{sinc}(f_s t - n)$$

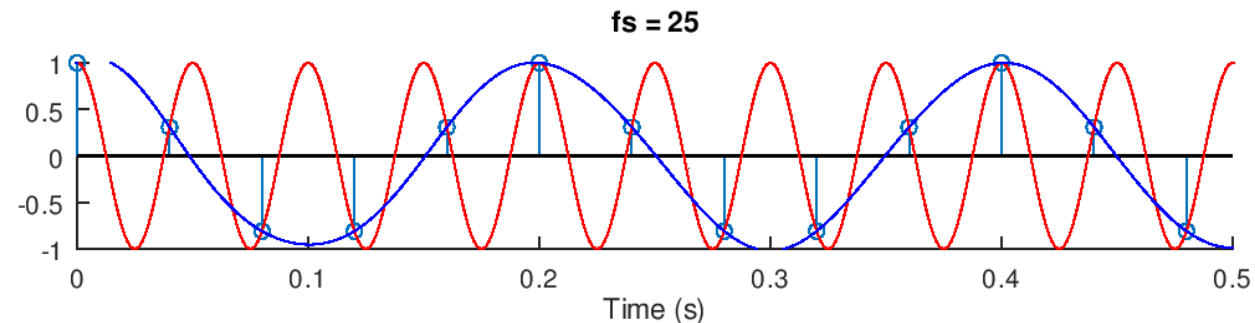
☐ $f_s = 100 \text{ Hz}$



☐ $f_s = 500 \text{ Hz}$



☐ $f_s = 25 \text{ Hz}$



- Δειγματοληψία

- Παράδειγμα:

- Ένα σήμα συνεχούς χρόνου της μορφής

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t)$$

(Handwritten arrows point from the terms to their frequencies: 400πt to 200Hz, 1200πt to 600Hz, 4400πt to 2200Hz)

δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 4000$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος που προκύπτει.

Αντικαθιστώ όπου t το $nT_s \Rightarrow t := nT_s$

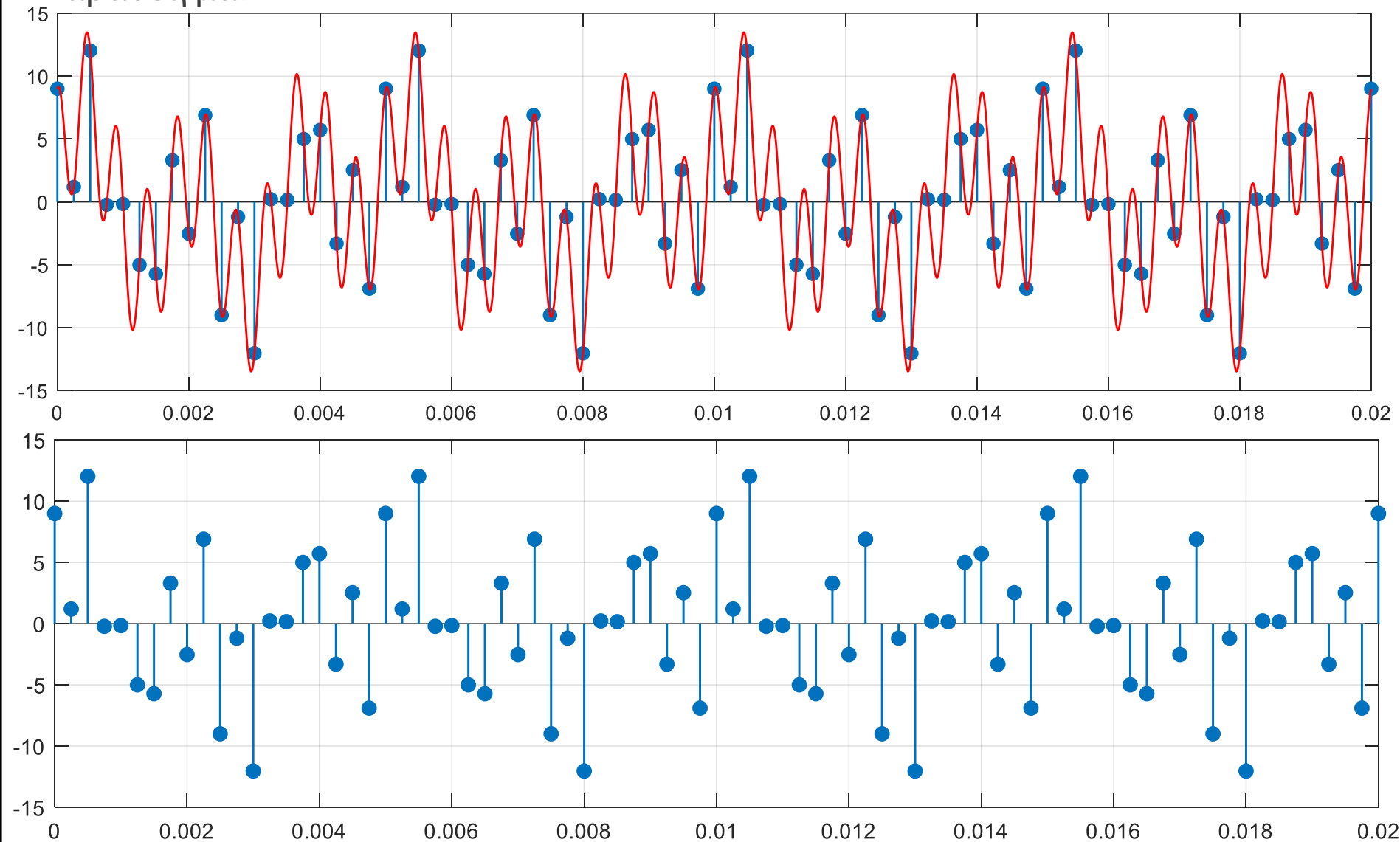
Οότε

$$\begin{aligned} x(nT_s) &= 3 \cos(400nnT_s) + 5 \sin(1200nnT_s) + 6 \cos(4400nnT_s) \\ &= 3 \cos\left(\frac{400nn}{4000}\right) + 5 \sin\left(\frac{1200nn}{4000}\right) + 6 \cos\left(\frac{4400nn}{4000}\right) \\ &= 3 \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + 6 \cos\left(\frac{11\pi n}{10}\right) \end{aligned}$$

Δειγματοληψία

Παράδειγμα:

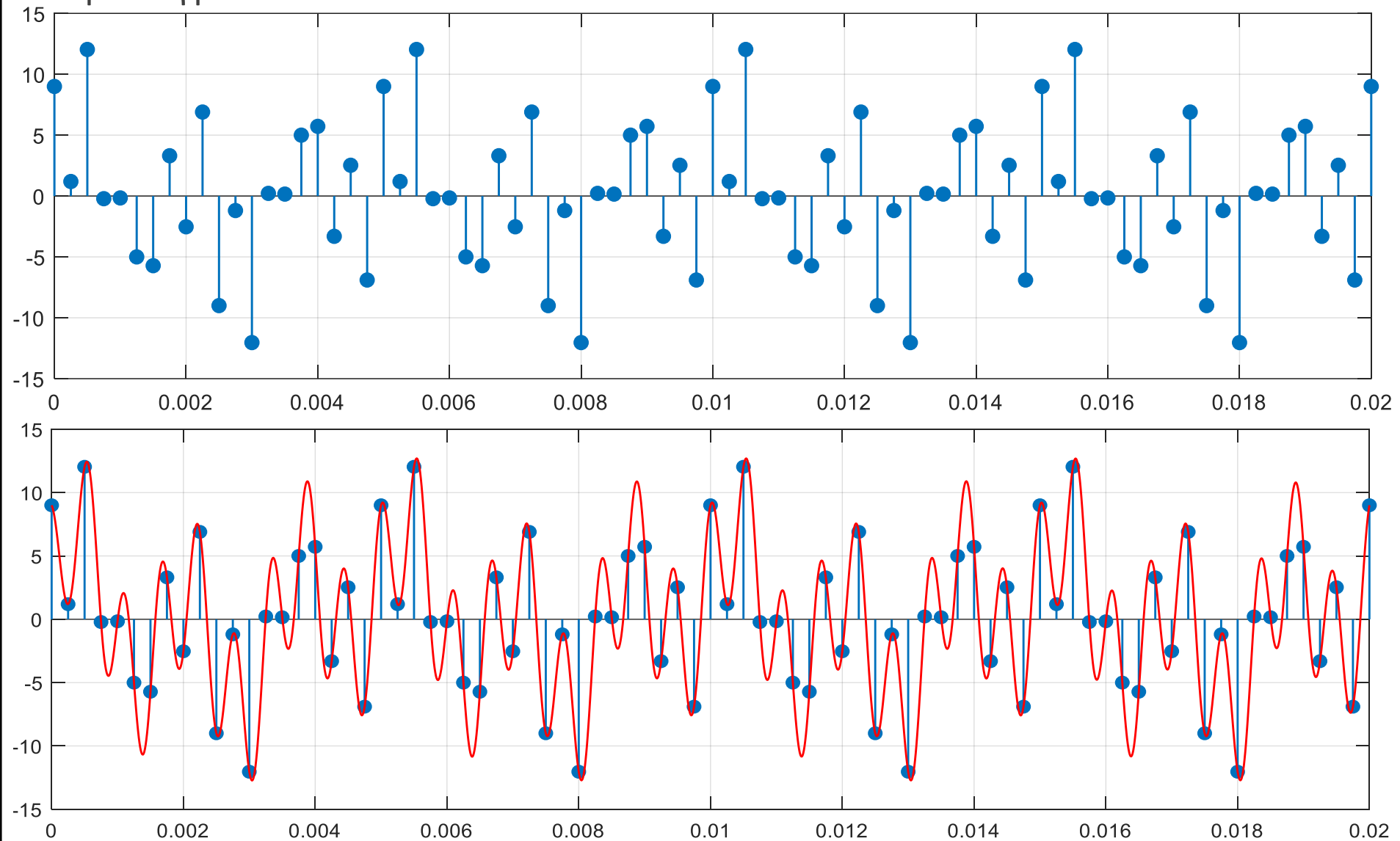
- Επάνω: δειγματοληψία με 4000 Hz
- Κάτω: δειγματοληπτημένο σήμα με $f_s = 4000$ Hz



• Δειγματοληψία

• Παράδειγμα:

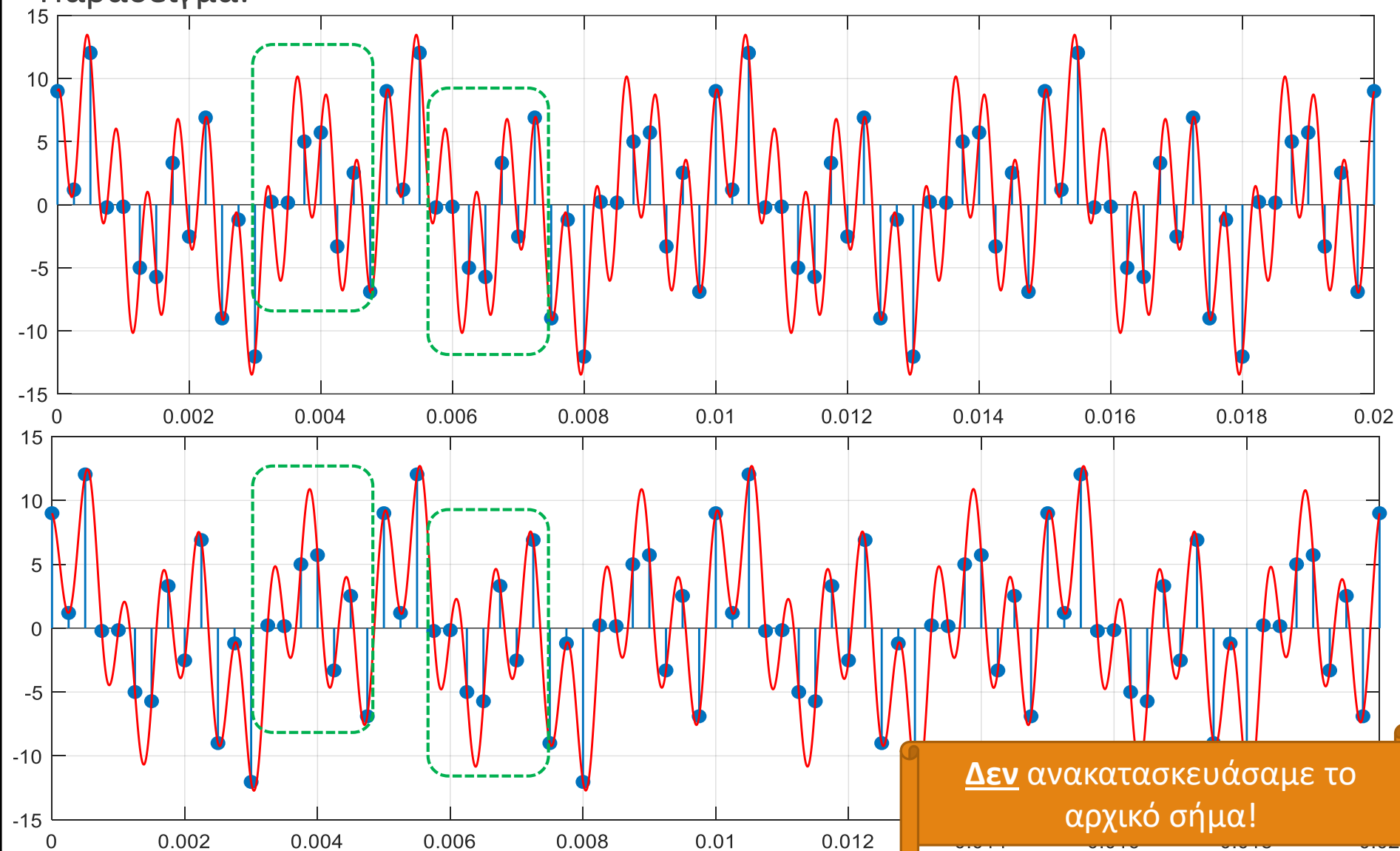
- Επάνω: δειγματοληπτημένο σήμα με $f_s = 4000$ Hz
- Κάτω: ανακατασκευασμένο σήμα με $f_s = 4000$ Hz



Δειγματοληψία

Παράδειγμα:

- Επάνω: αρχικό σήμα και δειγματοληψία του με $f_s = 4000$ Hz
- Κάτω: ανακατασκευασμένο σήμα με $f_s = 4000$ Hz



Δεν ανακατασκευάσαμε το αρχικό σήμα!

Δειγματοληψία

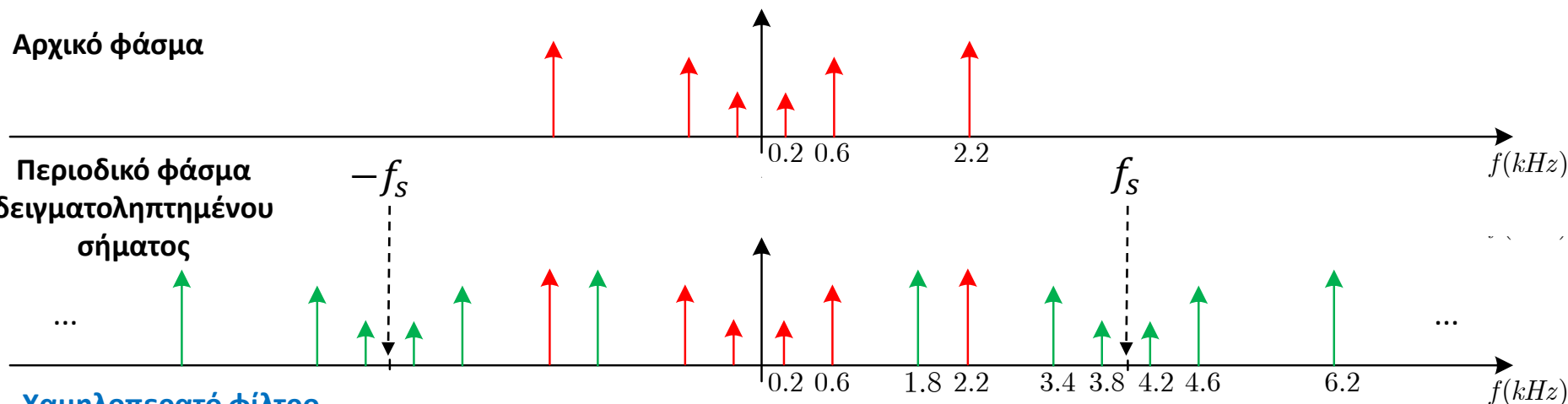
$$f_s = 4000 \text{ Hz}$$

- Ποιο είναι το φασματικό περιεχόμενο του ανακατασκευασμένου σήματος?

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t)$$

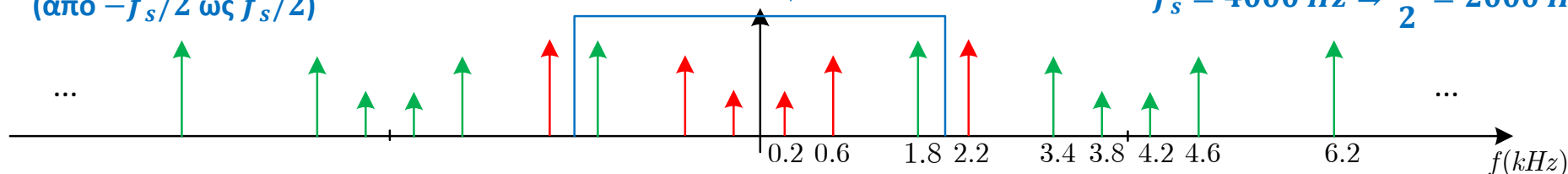
Αρχικό φάσμα

Περιοδικό φάσμα
δειγματοληπτημένου
σήματος

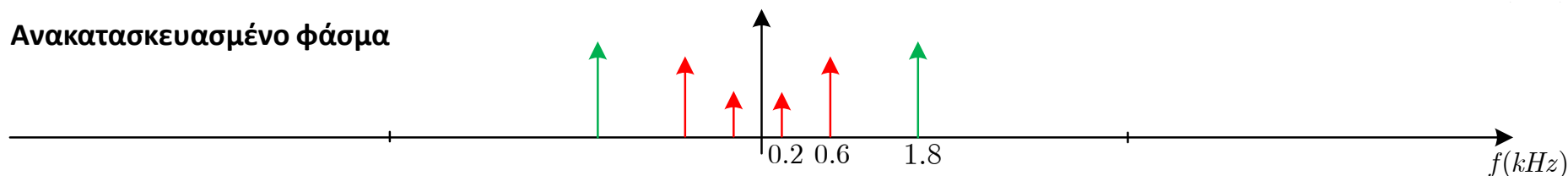


Χαμηλοπερατό φίλτρο
διάρκειας f_s
(από $-f_s/2$ ως $f_s/2$)

$$f_s = 4000 \text{ Hz} \Rightarrow \frac{f_s}{2} = 2000 \text{ Hz}$$



Ανακατασκευασμένο φάσμα



$$x_r(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(3600\pi t)$$

• Δειγματοληψία

• Παράδειγμα:

Ορολογία:
Ρυθμός Nyquist: $2f_{max}$
Συχνότητα Nyquist: f_{max}

○ Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μηδενικές τιμές εκτός του διαστήματος $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα παρακάτω σήματα

(α') $x(t)$	(γ') $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	(ε') $\frac{dx(t)}{dt}$
(β') $x(t - t_0)$	(δ') $x(t - t_0) + x(t + t_0)$	(ζ') $x(t)x(t)$
		(η') $x(t) * x(t)$

(α) Είναι ρυθμός Nyquist $= 2f_{max} = 2B$

(β) Είναι $F\{x(t - t_0)\} = \underbrace{X(f)}_{[-B, B]} \underbrace{e^{-j2\pi f t_0}}_{(-\infty, +\infty)}$, άρα ρυθμός Nyquist $= 2B$.

(γ) Είναι $F\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f - f_0)$, άρα ρυθμός Nyquist $= 2(B + f_0)$

(δ) Είναι $F\{x(t - t_0) + x(t + t_0)\} = \underbrace{e^{-j2\pi f t_0}}_{(-\infty, +\infty)} \underbrace{X(f)}_{[-B, B]} + \underbrace{e^{j2\pi f t_0}}_{(-\infty, +\infty)} \underbrace{X(f)}_{[-B, B]} = 2\cos(2\pi f t_0)X(f)$, ρυθμός $= 2B$

• Δειγματοληψία

Ορολογία:

Ρυθμός Nyquist: $2f_{max}$

Συχνότητα Nyquist: f_{max}

(ε) Είναι $F\{x'(t)\} = (j2\pi f)X(f)$, οπότε ρυθμός Nyquist = $2B$

(στ) Είναι $F\{x^2(t)\} = X(f) * X(f)$, από ιδιότητα εύρας της συνέλιξης, ο ρυθμός Nyquist = $4B$.

(ς) Είναι $F\{x(t) * x(t)\} = X(f) \cdot X(f) = X^2(f)$, άρα ρυθμός Nyquist = $2B$



- Μια γρήγορη ματιά στο ΗΥ370...

- Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

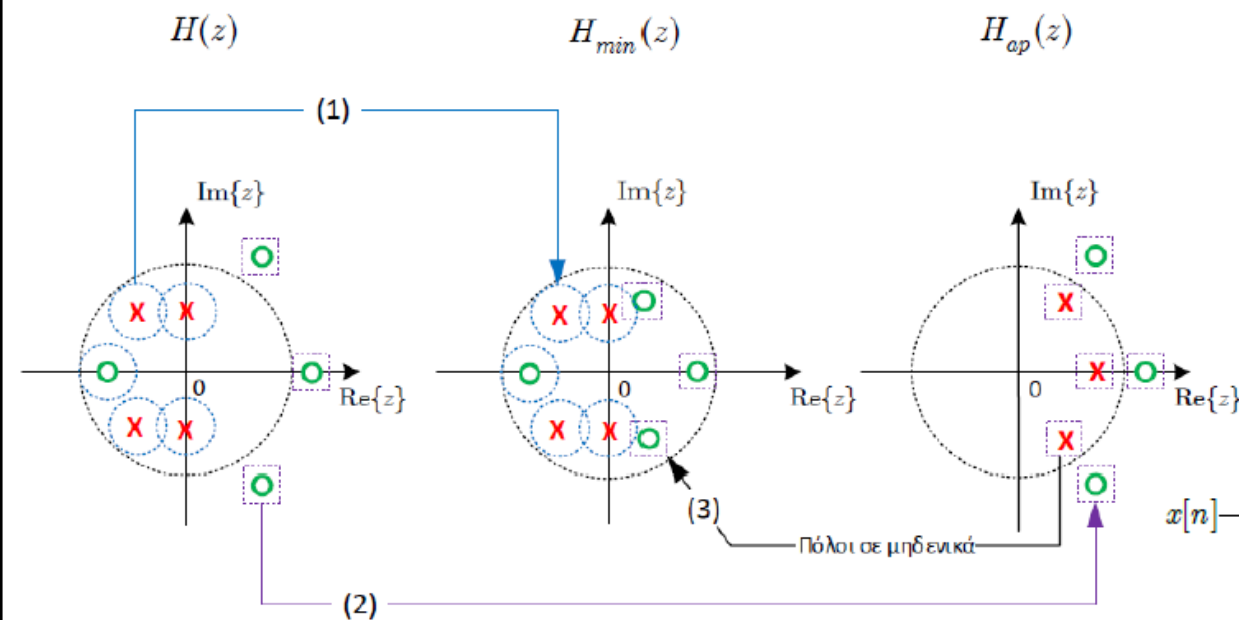
- Μετασχ. Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

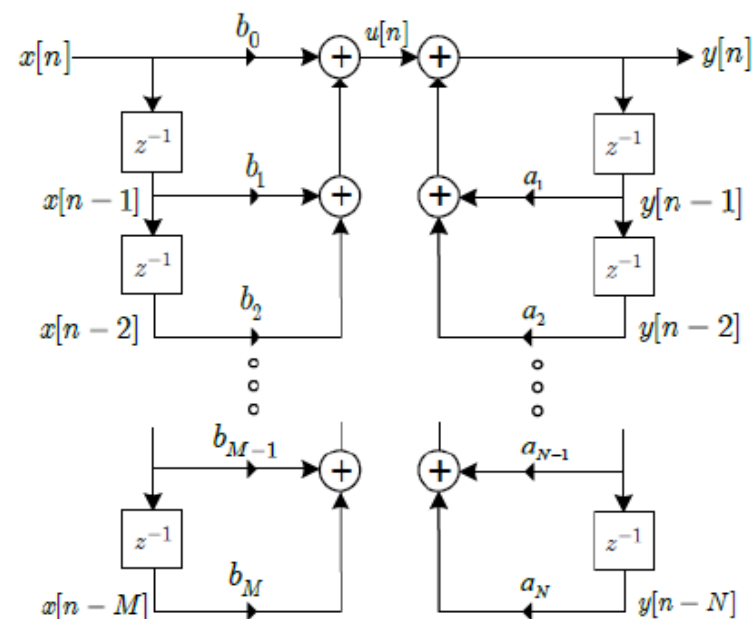
- ΓΧΑ συστήματα

$$\sum_{k=0}^M a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^N b_l x[n-l]$$

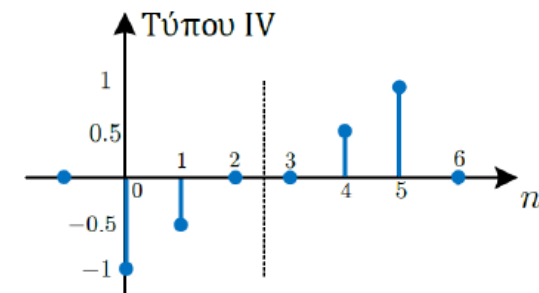
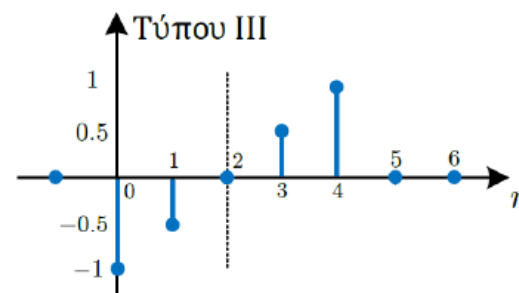
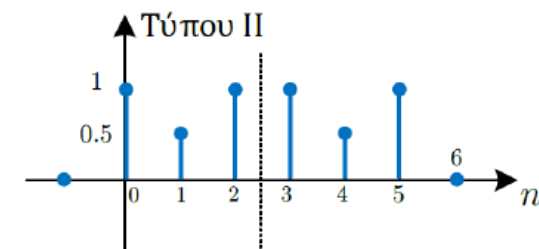
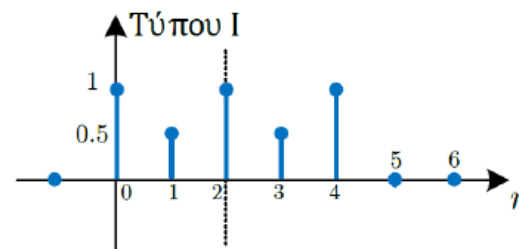
- Μια γρήγορη ματιά στο HY370...
- Συστήματα ελάχιστης φάσης, αντίστροφα συστήματα, συστήματα all-pass



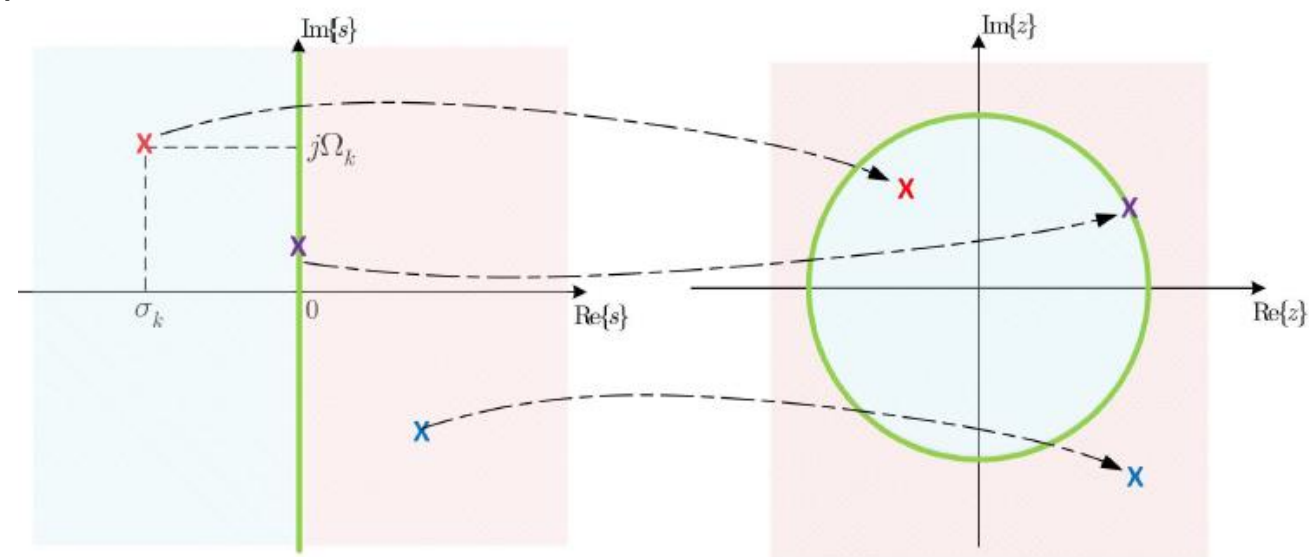
- Υλοποιήσεις συστημάτων



- Μια γρήγορη ματιά στο ΥΥ370...
- Συστήματα γραμμικής φάσης

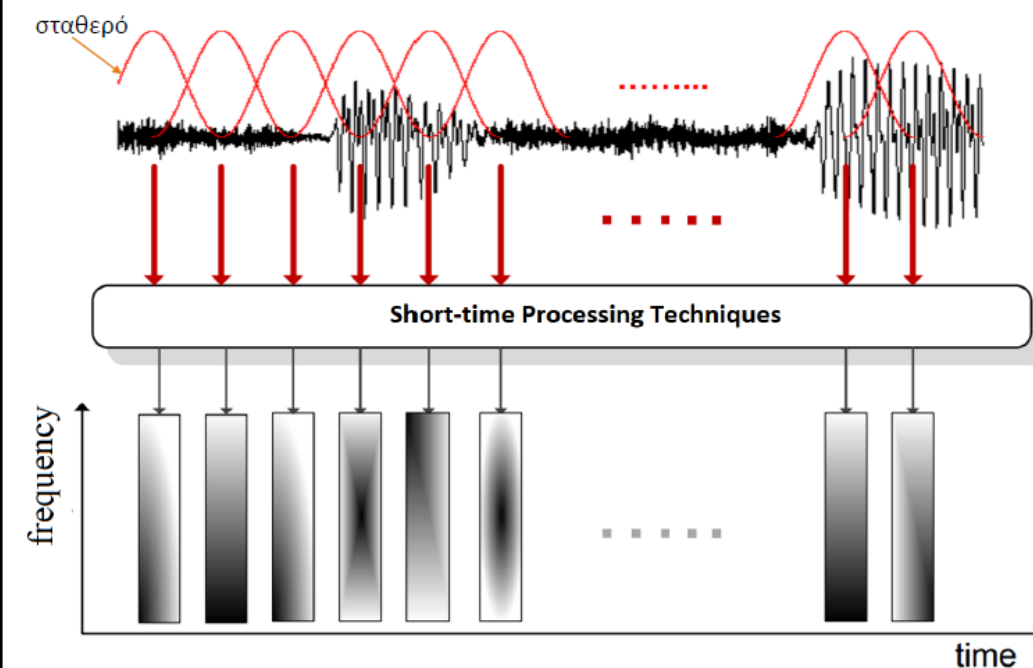
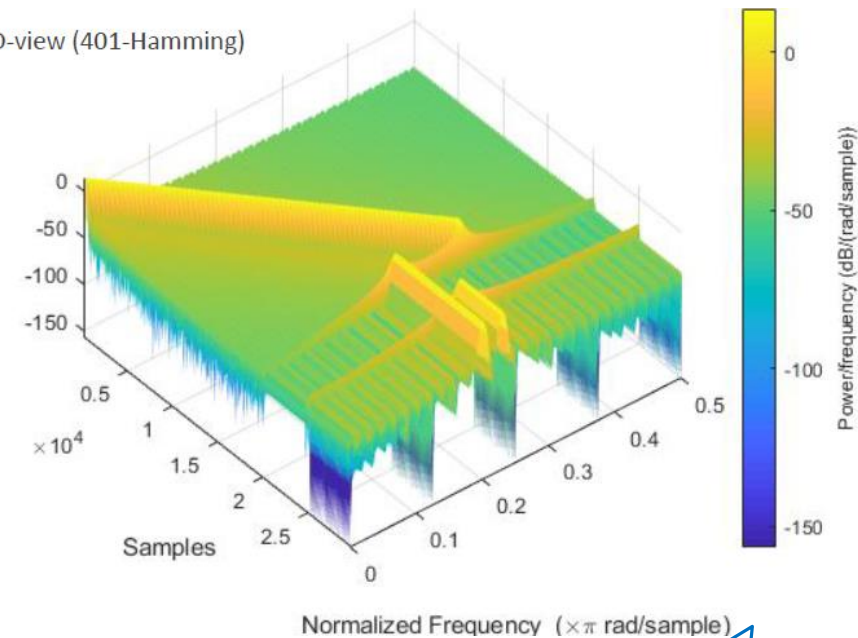


- Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων



- Μια γρήγορη ματιά στο HY370...
- Φασματική Ανάλυση
- Short Time Fourier Transform

• 3D-view (401-Hamming)


HY370

- Ίδια δομή με HY215
- Εργαστηριακές ασκήσεις (~4-5) (πραγματικές mini-εφαρμογές, in groups of two students, at most)
- Θεωρητικές ασκήσεις (~4-5)
- Εξέταση προόδου
- Τελική εξέταση

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

