

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 14^Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace



- Η **συνάρτηση μεταφοράς**
- Όμοια με το μετασχ. Fourier και τα ΓΧΑ συστήματα, το σήμα

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j2\pi f)t}$$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η **ιδιοτιμή** του συστήματος είναι

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt$$

που προφανώς είναι ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για

$$s = s_0$$

- Όπως και στο χώρο του Fourier, έτσι και εδώ θα δώσουμε ένα όνομα σε αυτόν:

συνάρτηση μεταφοράς

Κρουστική απόκριση $h(t) \leftrightarrow$ Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**
- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

- Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση μοναδικά, χρειαζόμαστε **N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες**
 - Όπως π.χ. για να λύσουμε την $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x, c \in \mathbb{R}$ χρειαζόμαστε μια τιμή της συνάρτησης για να βρούμε το c
 - Π.χ. $f(0) = 2$ και τότε $f(x) = 2e^x$
- Όταν οι βοηθητικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές, δηλ.

$$y(t_0) = \frac{d}{dt} y(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} y(t_0) = \dots = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_0) = 0$$

τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

• ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace

- Αν επιπλέον οι συνθήκες αυτές αφορούν τη χρονική στιγμή t_0 πριν την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα, τότε ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**
- Αν αυτές είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και η κατάσταση του συστήματος ονομάζεται **“σε αρχική ηρεμία”**:

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Πολλές φορές θεωρούμε ότι μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
 - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$

- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

☐ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

☐ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

☐ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
- Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

□ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και δίνει

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς
 - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση
- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^N s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^M s^l b_l X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{i=0}^N a_i s^i}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s)$$

□ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{i=0}^N a_i s^i}, \quad R_H$$

αποτελείται από πολυώνυμο του s και μπορεί να παραγοντοποιηθεί (αν οι ρίζες του είναι απλές) ως

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{i=0}^N a_i s^i} = \frac{\prod_{l=1}^M (s + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (s + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (μόνο αν $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s + \kappa_i}, \quad R_H$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων, και ελέγχοντας το πεδίο σύγκλισης

□ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

• Παράδειγμα:

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - \frac{d}{dt} y(t) - 2y(t) = x(t)$$

Ζητείται η κρουστική απόκριση, αν το σύστημα είναι αιτιατό.

Είναι

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t)$$

↕ L

$$s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

$$Y(s) (s^2 - s - 2) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}, \quad \sigma > 2$$

Άρα

$$H(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > 2$$

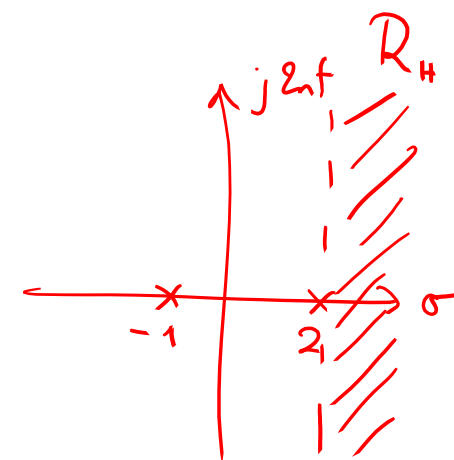
• $\sigma > 2$ ✓

• $\sigma < 2$

• $\sigma > -1$ ✓

• $\sigma < -1$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s)$$



Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

• Παράδειγμα:

• Άρα τελικά

$$H(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+1}$$

$\sigma > 2$ $\sigma > -1$

$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{3} e^{2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t) \\ &= \frac{1}{3} (e^{2t} - e^{-t}) u(t) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{at} u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a \\ -e^{at} u(-t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a \end{aligned}$$

□ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και το σήμα εισόδου, θα είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)X(s) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{i=0}^N a_i s^i} X(s) \\ &= \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{i=0}^N a_i s^i} \frac{\sum_{m=0}^K d_m s^m}{\sum_{n=0}^L c_n s^n} \\ &= \frac{\prod_{l=1}^M (s + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (s + \kappa_i)} \frac{\prod_{m=1}^K (s + c_m)}{\prod_{n=1}^L (s + \lambda_n)} \end{aligned}$$

ξανά υπό την προϋπόθεση ότι οι ρίζες είναι απλές

- Με γνωστές τεχνικές και μεθόδους (έτοιμα ζεύγη, ιδιότητες, και ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα) μπορούμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο $y(t)$
- Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

$$Y(s) = H(s)X(s), \quad R_y \supseteq R_x \cap R_H$$

• Παράδειγμα:

○ Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$

Ξέρουμε ότι $H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}, \quad \sigma > 2$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+2}, \quad \sigma > -2$$

Αρα

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)(s+2)}, \quad R_y = R_x \cap R_H = \{\sigma > 2\}$$

$$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2},$$

τε $\sigma > 2 = R_y$

• $\sigma > 2 \checkmark$

• $\sigma < 2$

R_1

• $\sigma > -1 \checkmark$

• $\sigma < -1$

R_2

• $\sigma > -2 \checkmark$

• $\sigma < -2$

R_3

Θέλω $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = R_y$

□ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

• Παράδειγμα:

Δρ<

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a \quad \leftarrow$$

$$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a$$

$$Y(s) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$\sigma > 2 \qquad \qquad \qquad \sigma > -1 \qquad \qquad \qquad \sigma > -2$

$\updownarrow L^{-1}$

$$y(t) = \left(\frac{1}{12} e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-2t} \right) u(t).$$

□ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Ένα σύστημα με **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες **δεν** είναι ΓΧΑ
- Όμως ο **μονόπλευρος** μετασχ. Laplace μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εξόδους με σχεδόν ίδιο τρόπο λύσης με τα ΓΧΑ συστήματα
 - Θεωρούμε την έξοδο αιτιατή
- Θα έχουμε λοιπόν

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

με τουλάχιστον ένα

$$\frac{d^n}{dt^n} y(0^-) \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- Η ιδιότητα που εφαρμόζουμε τώρα είναι η

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big|_{t=0^-}$$

$$\sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big|_{t=0^-} = s^{n-1} x(0^-) + s^{n-2} x'(0^-) + s^{n-3} x''(0^-) + \dots + x^{(n-1)}(0^-)$$

Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

Παράδειγμα:

○ Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$

- $\frac{d^2}{dt^2}y(t) \xleftrightarrow{L_u} s^2Y(s) - \sum_{i=1}^2 s^{2-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(t) \Big|_{t=0^-} =$
 $= s^2Y(s) - \left(sy(0^-) + \underbrace{s^0}_{1} y'(0^-) \right) = s^2Y(s) - 2s - 1 \quad (1)$
- $5 \frac{d}{dt}y(t) \xleftrightarrow{L_u} 5sY(s) - 5 \sum_{i=1}^1 s^{1-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(t) \Big|_{t=0^-} =$
 $= 5sY(s) - 5s^0y(0^-) = 5sY(s) - 10 \quad (2)$
- $6y(t) \xleftrightarrow{L_u} 6Y(s) \quad (3)$
- $x(t) \xleftrightarrow{L_u} X(s) \quad (4)$
- $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{L_u} sX(s) - \cancel{x(0^-)} = sX(s) \quad (5)$

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow s^nX(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}x(t) \Big|_{t=0^-}$$

□ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

• Παράδειγμα:

Από (1), (2), (3), (4), (5) έχουμε

$$\begin{aligned} e^{at}u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a \\ -e^{at}u(-t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a \end{aligned}$$

$$s^2 Y(s) - 2s - 1 + 5s Y(s) - 10 + 6Y(s) = X(s) + sX(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = X(s)(s+1)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = X(s)(s+1) + 2s + 11$$

$$Y(s) = \frac{X(s)(s+1) + 2s + 11}{(s^2 + 5s + 6)}$$

$$x(t) = e^{-4t}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+4}, \sigma > -4 \quad \left. \vphantom{\frac{1}{s+4}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)}, \sigma > -2 \text{ ως αιτία από εκφώνηση}$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4} = \frac{13}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+4}, \sigma > -2.$$

□ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

• Παράδειγμα:

- Αρχ

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a$$

$$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a$$

$$Y(s) = \frac{13}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+4}, \quad \sigma > -2$$

- $\sigma > -2$ ✓
- $\sigma > -3$ ✓
- $\sigma > -4$ ✓
- $\sigma < -2$
- $\sigma < -3$
- $\sigma < -4$

Επιλέγω πεδία τέτοια ώστε $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{ \sigma > -2 \}$

Επιστρέφοντας στο χρόνο,

$$y(t) = \frac{13}{2} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-3t} u(t) - \frac{3}{2} e^{-4t} u(t)$$

• Συστήματα στο χώρο του Laplace

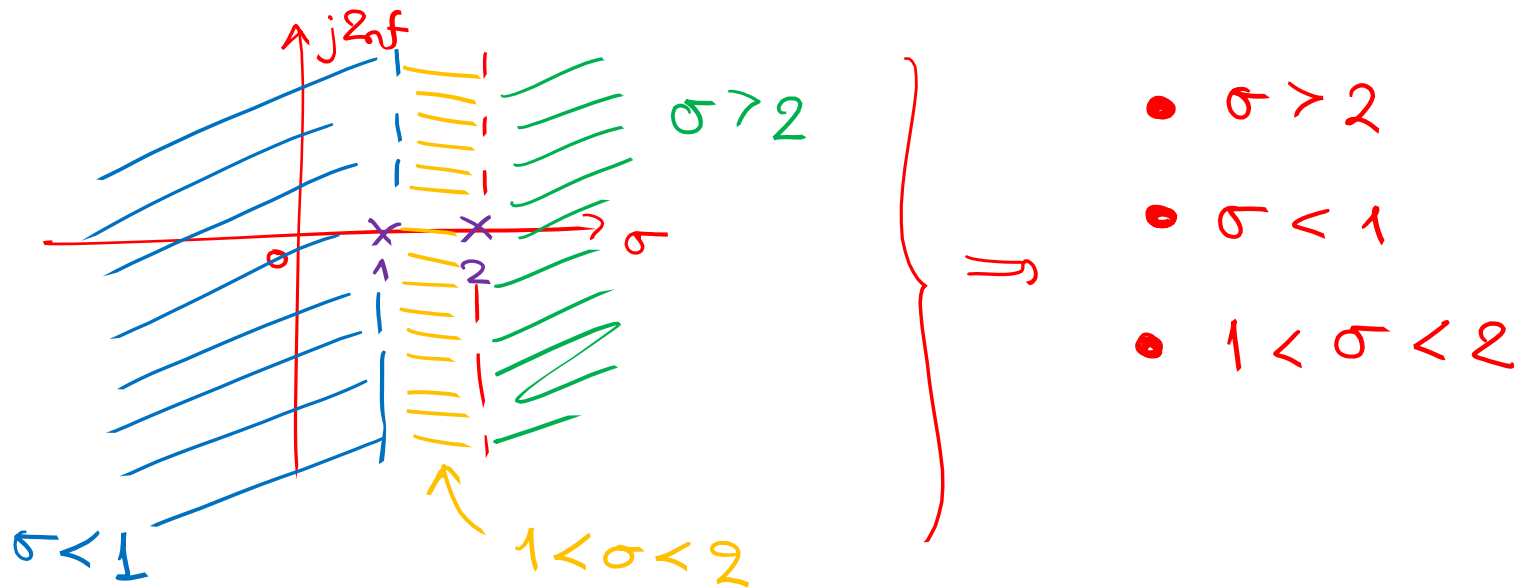
• Παράδειγμα:

○ Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2}, \quad \mathcal{R}_H = ?$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για **κάθε** πιθανό πεδίο σύγκλισης

Είναι
$$H(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2} = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)}$$



• Συστήματα στο χώρο του Laplace

• Παράδειγμα:

Είναι
$$H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = (\text{ηρα} \text{ } \omega \lambda \epsilon \varsigma)$$

$$= \frac{-2}{s-1} + \frac{3}{s-2}$$

$$\begin{array}{ll} \bullet \sigma > 1 & \bullet \sigma > 2 \\ \bullet \sigma < 1 & \bullet \sigma < 2 \end{array}$$

$$\leadsto e^{at} u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \sigma > a$$

$$\leadsto -e^{at} u(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \sigma < a$$

$$\rightarrow \sigma > 2 : h(t) = -2e^t u(t) + 3e^{2t} u(t)$$

$$\rightarrow \sigma < 1 : h(t) = +2e^t u(-t) - 3e^{2t} u(-t).$$

$$\rightarrow 1 < \sigma < 2 : h(t) = -2e^t u(t) - 3e^{2t} u(-t).$$

- **Κριτήριο Ευστάθειας Συστήματος στο χώρο του Laplace**

- Ευστάθεια: $|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \mathbb{R}_+$

- Ισοδύναμα, οι χαρακτηριστικές ρίζες του πολυωνύμου ενός συστήματος που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση είναι όλες αρνητικές

- Ισοδύναμα

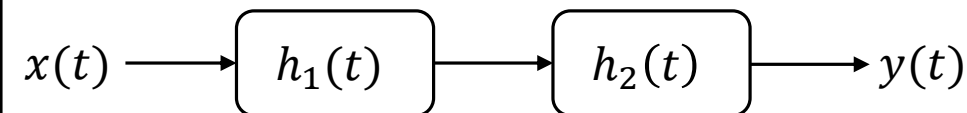
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Δηλ. η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη
- Ισοδύναμα, πρέπει να υπάρχει ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος
- Ισοδύναμα ☺, το πεδίο σύγκλισης του Μετασχ. Laplace πρέπει να περιέχει το φανταστικό άξονα

• Άρα: ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής της συνάρτησης μεταφοράς του

• Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων

• Διάταξη σε σειρά

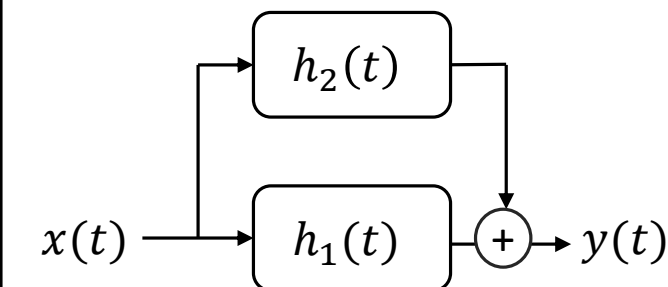


$$y(t) = \underbrace{h_1(t) * h_2(t)}_{h_{total}(t)} * x(t)$$

• Στο χώρο του Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{H_1(s)H_2(s)}_{H_{total}(s)}X(s)$$

• Διάταξη σε παραλληλία



$$\begin{aligned} y(t) &= (h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)) \\ &= \underbrace{(h_1(t) + h_2(t))}_{h_{total}(t)} * x(t) \end{aligned}$$

• Στο χώρο του Laplace:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= \underbrace{(H_1(s) + H_2(s))}_{H_{total}(s)}X(s) \end{aligned}$$

• Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς

- **Πόλοι**: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) \rightarrow \infty$
- **Μηδενικά**: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) = 0$
- Έχουμε ήδη δει ότι οι ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς αποτελούν **πόλους** και **μηδενικά** του συστήματος
 - Είναι μόνο αυτά??
- Για παράδειγμα, έστω

$$H(s) = \frac{s - 2}{(s - 3)(s + 1)}, \sigma > 3$$

- Έχει δυο πόλους $s = 3, s = -1$, και ένα μηδενικό $s = 2$
- Προσέξτε όμως ότι

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\cancel{s} \left(1 - \frac{2}{s}\right)}{\cancel{s^2} \left(1 - \frac{3}{s}\right) \left(1 + \frac{1}{s}\right)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{s}\right)}{s \left(1 - \frac{3}{s}\right) \left(1 + \frac{1}{s}\right)} = 0$$

- Άρα υπάρχει **ένα** “έξτρα” μηδενικό στο άπειρο!
- Άρα το σύστημα έχει **2 πόλους** και **2 μηδενικά**!

• Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς

• Γενικότερα

$$H(s) = A \frac{\prod_{i=1}^M (s - c_i)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} = A \frac{s^M \prod_{i=1}^M \left(1 - \frac{c_i}{s}\right)}{s^N \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{d_k}{s}\right)} = A s^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^M \left(1 - \frac{c_i}{s}\right)}{\prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{d_k}{s}\right)}$$

- Αν $M > N \Leftrightarrow M - N > 0$, και τότε $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχουν $M - N$ πόλοι στο **άπειρο**
- Αν $M < N \Leftrightarrow M - N < 0$, και τότε $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχουν $N - M$ μηδενικά στο **άπειρο**
- Αν $M = N$, τότε δεν υπάρχουν επιπλέον πόλοι ή μηδενικά **στο άπειρο**
- Άρα :
- Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών

$$\# \text{ πόλων} = \# \text{ μηδενικών}$$

• Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς

• Παράδειγμα:

$$\text{ευσταθής} \iff \sigma = 0 \in \mathcal{R}_H$$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$ και έναν πόλο στη θέση $s = 3$

- Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένης διάρκειας?
- Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αριστερόπλευρο σήμα?
- Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι δεξιόπλευρο σήμα?
- Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αμφίπλευρο σήμα?

As διαχωρίσαμε τις περιπτώσεις: i) πόλος στο $s=3$ μοναδικός
ii) ————— u ————— όχι μοναδικός

i) α. Όχι, γιατί η ύπαρξη πόλου σημαίνει ότι το $h(t)$ θα περιλαμβάνει μια βηθαιτική συνάρτηση $u(t)$, που την καθιστά άπειρης διάρκειας σήμα. Εναλλακτικά, τα σήματα πεπερασμένης διάρκειας δεν περιλαμβάνουν πόλους στο μετασχηματισμό Laplace τους.

β. Επειδή $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \iff$ ευσταθής, τότε πρέπει το

• Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς

• Παράδειγμα:

πεδίο σύγκλισης του μετασχ. $H(s)$ να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα. Άρα μπορεί να είναι αριστερόημιτονη η $h(t)$ αν επιλέξαμε $\sigma < 3$ για πεδίο σύγκλισης της $H(s)$.

c. Όχι, δεν μπορεί να είναι δεξιόημιτονη σήμα γιατί για να είναι τέτοιο πρέπει να επιλέξαμε $\sigma > 3$ ως πεδίο σύγκλισης, που δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $\sigma = 0$.

d. Όχι, δεν μπορεί να είναι αμφιόημιτονη, γιατί τα αμφιόημιτα σήματα έχουν πεδίο σύγκλισης μια "λωρίδα" μεταξύ δύο πόλων. Εδώ θεωρούμε ότι ο πόλος είναι μοναδικός, άρα δεν μπορεί το $h(t)$ να είναι αμφιόημιτονη.

ii) α. Όχι, γιατί η ύπαρξη ενός ή περισσότερων πόλων δεν επιτρέπει το σήμα $h(t)$ να είναι πεπερασμένη διάρκειας (δείτε i)α.).

b. Αν υπάρχουν άλλοι πόλοι, θα πρέπει αυξάνει να βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ένα

• Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς

• Παράδειγμα:

πεδίο σύγκλισης $\sigma < \sigma_0$, με $\sigma_0 > 0$ ώστε να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας. Αν υπάρχουν άλλοι πόλοι με $\sigma_0 > 3$, τότε με πεδίο σύγκλισης $\sigma < 3$ μπορεί να έχουμε αριστερόηλεκτρο σήμα στο χρόνο. Αν υπάρχει εστω ένας πόλος σ_0 με $\sigma_0 < 0$, τότε δεν μπορεί το σήμα στο χρόνο να είναι αριστερόηλεκτρο και ευσταθές ταυτόχρονα.

c. Δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να είναι δεξιόηλεκτρο και ευσταθές, αφού ο πόλος $\sigma = 3$ απαγορεύει την ύπαρξη ενός πεδίου σύγκλισης $\sigma > \sigma_0$, με $\sigma_0 < 0$, έτσι ώστε να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας.

d. Για να είναι αριστερόηλεκτρο και ευσταθές, πρέπει να υπάρχει ένα πεδίο σύγκλισης $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, με $\sigma_1 < 0$ και $\sigma_2 \geq 3$, έτσι ώστε το πεδίο σύγκλισης να είναι "λωρίδα" που να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Άρα θέλουμε έναν τουλάχιστον πόλο με $\sigma_0 < 0$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σήμα στο χρόνο δεν μπορεί να είναι αριστερόηλεκτρο.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

