

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13^Η

- Μετασχηματισμός Laplace



- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Στις επόμενες διαλέξεις θα συζητήσουμε για τον **μετασχ. Laplace**
- Θα συζητήσουμε το **κίνητρο** πίσω από τη χρήση του...
- ...καθώς και τις πολλαπλές διαισθητικές **ερμηνείες** που μπορεί να έχει
- Θα κατανοήσουμε τις **λεπτομέρειες** πίσω από τη θεωρία του και στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις **ιδιότητές** του
- Τέλος, θα δούμε πως θα χρησιμοποιούμε το μετασχ. Laplace για να **λύνουμε διαφορικές εξισώσεις** και να **αναλύουμε** – ΓΧΑ ή μη – **συστήματα**

• Προς το μετασχ. Laplace

• Μετασχ. Fourier: πανίσχυρο (!) εργαλείο ανάλυσης συστημάτων και σημάτων

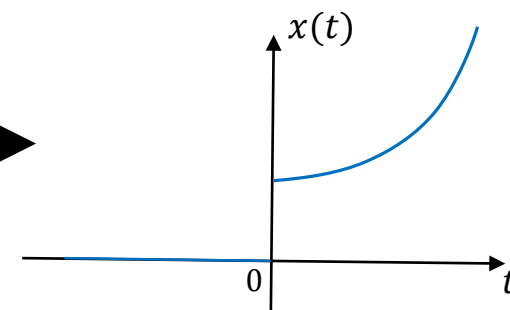
• Σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier (== δε συγκλίνει το ολοκλήρωμα)

- Κάποια σήματα ισχύος
- Κάποια σήματα ούτε ενέργειας ούτε ισχύος

• Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$

- Δεν έχει μετασχ. Fourier
- Τι θα έπρεπε να ισχύει για να έχει?

$$a < 0$$



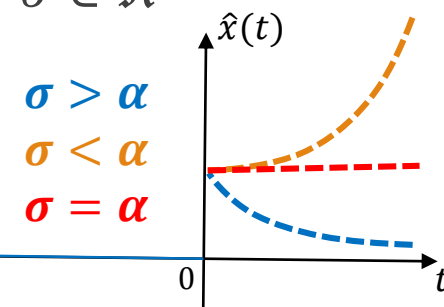
• Ας το “κάνουμε να έχει”! ☺

• Δημιουργούμε ένα νέο σήμα

$$\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t} = e^{at}e^{-\sigma t}u(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t), \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

• Τώρα αν $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)e^{-j2\pi ft} dt$$



• Προς το μετασχ. Laplace

• Δηλ.

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{(\sigma - a) + j2\pi f}, \sigma > a$$

• Ελέγχοντας έτσι την τιμή του σ μπορούμε να μετασχηματίζουμε το σήμα

• Όμως εμείς ενδιαφερόμαστε για το $x(t)$, όχι για το $\hat{x}(t)$! ☺

• Από την παραπάνω σχέση

$$\int_0^{+\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-\overbrace{(\sigma + j2\pi f)}^s} t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{e^{at} u(t)}^{x(t)} e^{-\overbrace{st}^s} dt = X(s)$$

• Οπότε βρήκαμε έναν **άλλο μετασχηματισμό** ο οποίος προβάλλει το σήμα όχι στις γνωστές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αλλά σε κάποιες άλλες της μορφής e^{-st}

• Αν θεωρήσουμε ότι ο μετασχ. Fourier εξαρτιόταν από τη μεταβλητή $j2\pi f$, τώρα ο νέος μετασχηματισμός εξαρτάται από τη μεταβλητή $s = \sigma + j2\pi f$

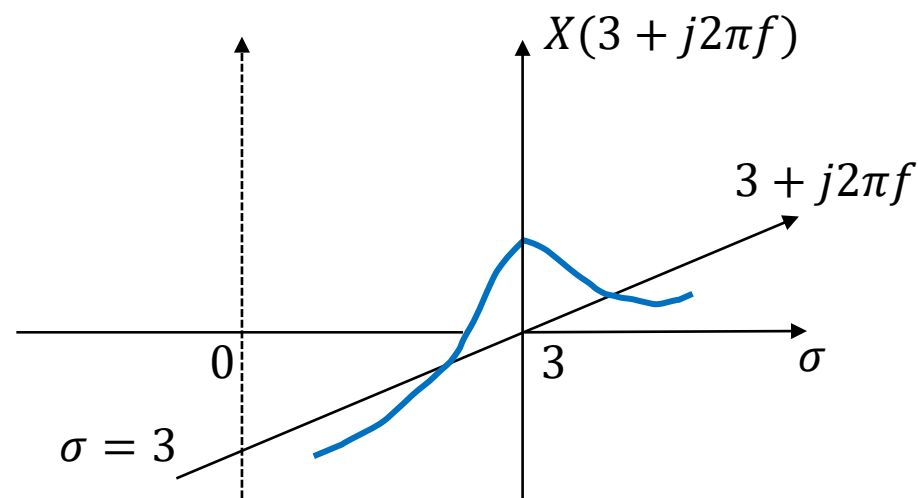
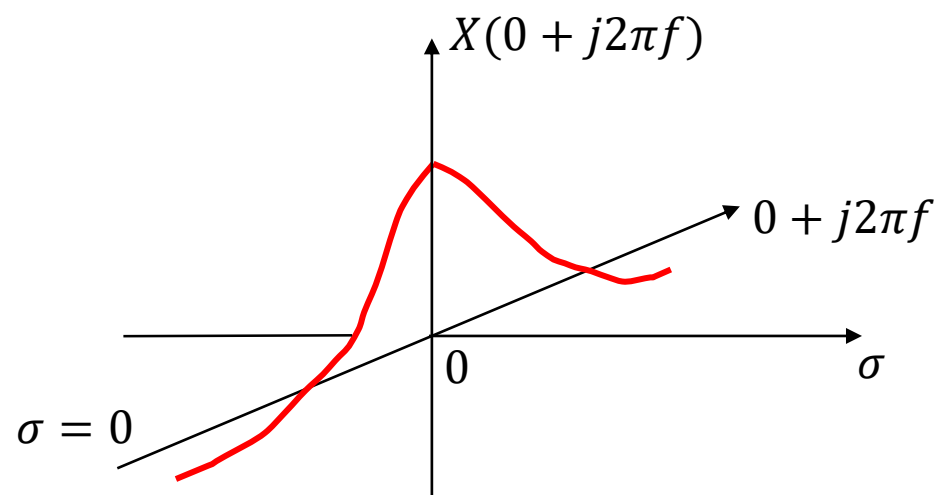
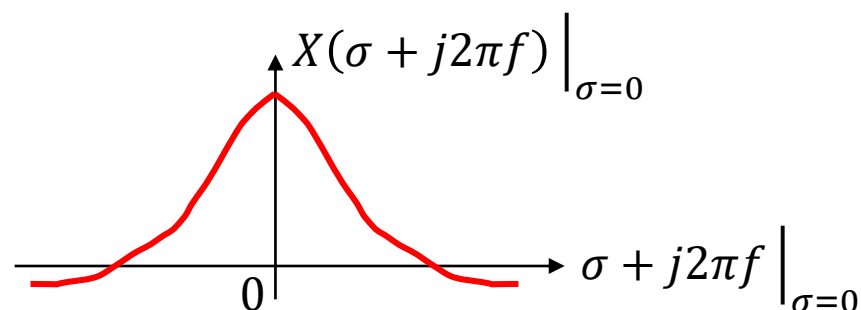
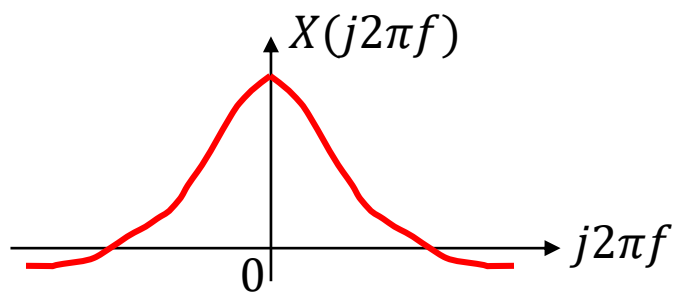
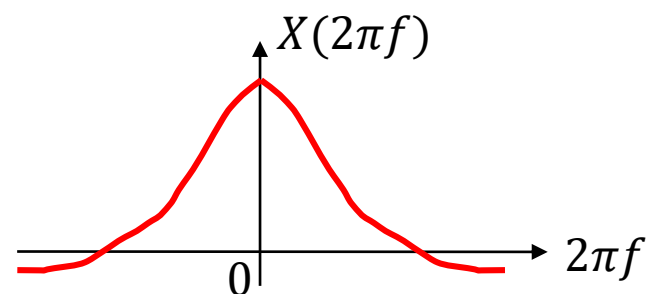
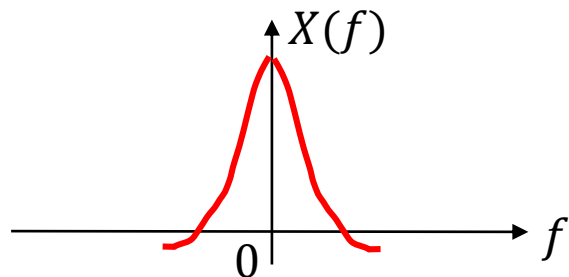
• Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται

μετασχηματισμός Laplace

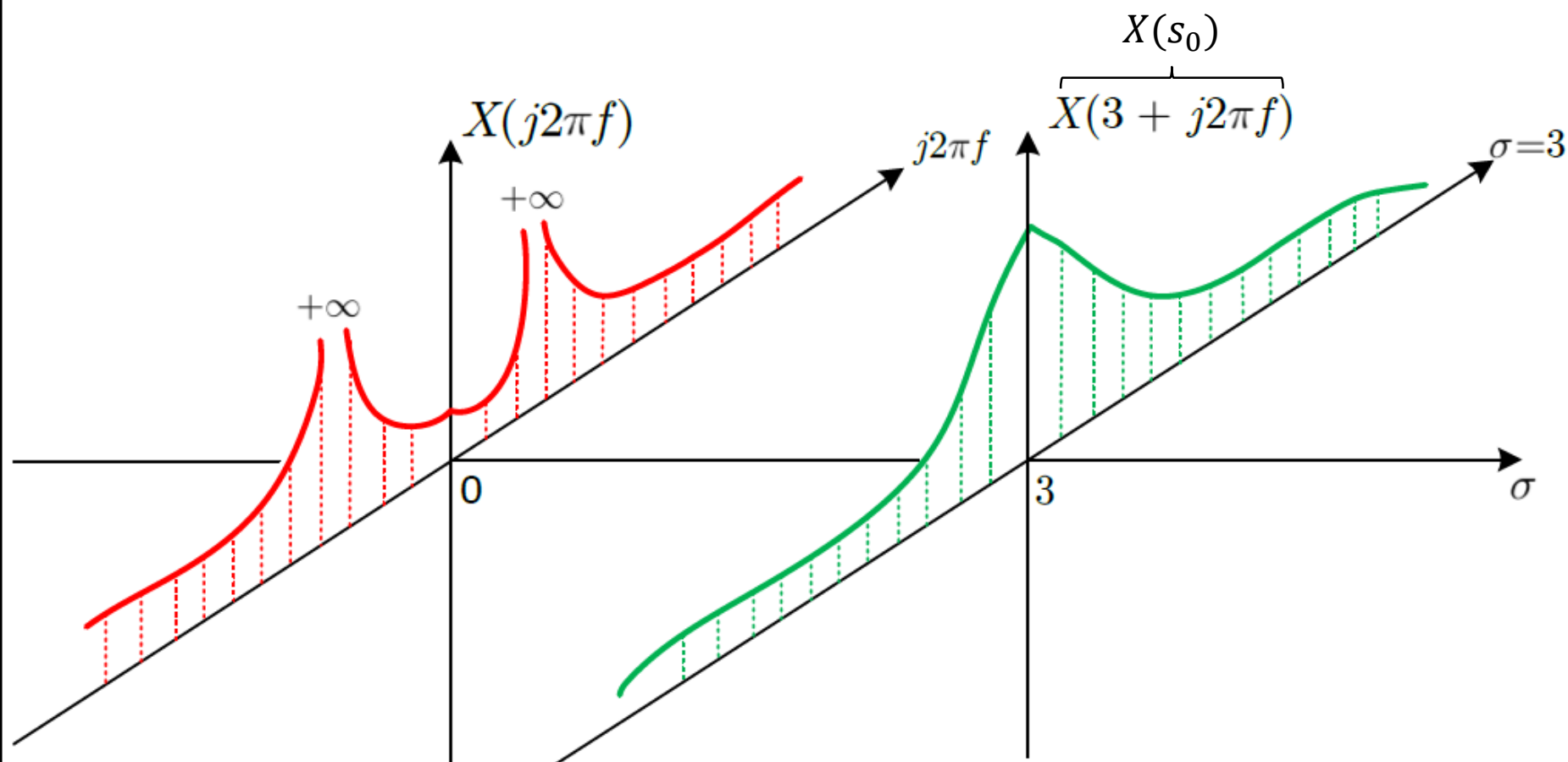
μιγαδικές
συχνότητες...



Προς το μετασχ. Laplace



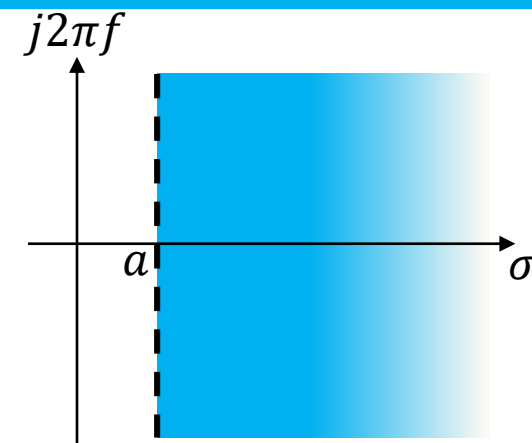
- Προς το μετασχ. Laplace



• Προς το μετασχ. Laplace

- Προφανώς καταλαβαίνετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε άπειρα σ για να μετασχηματίσουμε το σήμα που συζητάμε

- Αρκεί πάντα να έχουμε $\sigma > a$
- Η περιοχή αυτή αποτελεί ένα **ημιεπίπεδο** από το $\sigma = a$ (χωρίς να το περιλαμβάνει) ως το $\sigma = +\infty$



- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου στην οποία συγκλίνει ο μετασχ. Laplace ονομάζεται **πεδίο σύγκλισης (region of convergence - ROC)** και συμβολίζεται με R_x
 - Μπορείτε να το φαντάζεστε σαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μιας μεταβλητής

- Ορισμός Μετασχ. Laplace

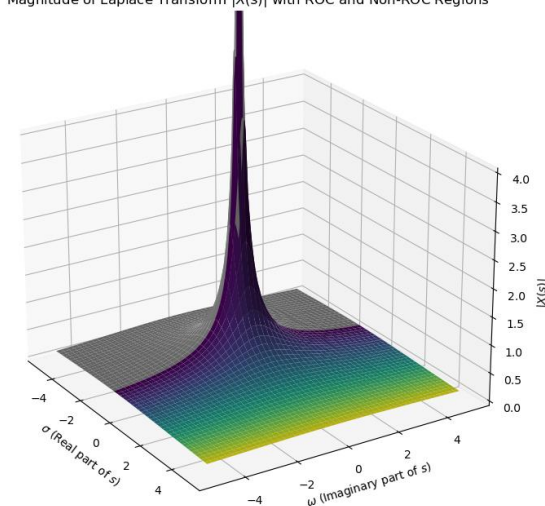
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- Αντίστροφος μετ. Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

- Δε θα τον χρησιμοποιήσουμε...

Magnitude of Laplace Transform $|X(s)|$ with ROC and Non-ROC Regions



• Προς το μετασχ. Laplace

• Η χρήση μιγαδικών συχνοτήτων ξενίζει...

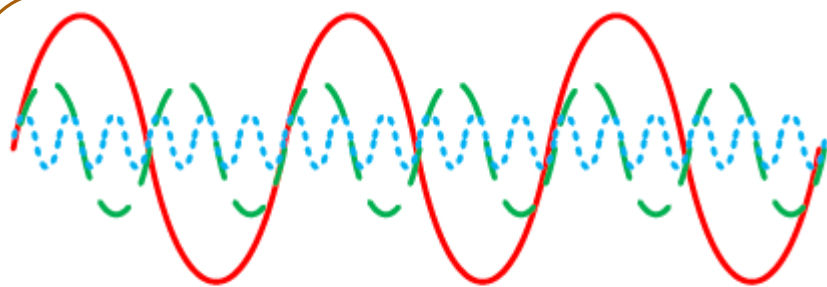
• Ας δούμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier στο σήμα $x(t)$ μέσω του $\hat{x}(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t)$

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{X}(f)e^{\sigma t})e^{j2\pi ft} df$$

• Θεωρώντας ότι αναλύουμε πραγματικά σήματα, ο μετασχ. Fourier έχει τις γνωστές συμμετρίες και το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

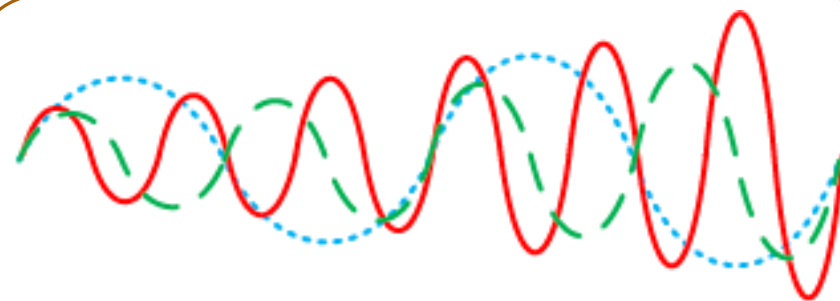
$$x(t) = \int_0^{+\infty} 2|\hat{X}(f)|e^{\sigma t} \cos(2\pi ft + \hat{\phi}(f)) df$$

$\sigma = 0$



(α') Σταθερού πλάτους ημίτονα

$\sigma \neq 0$

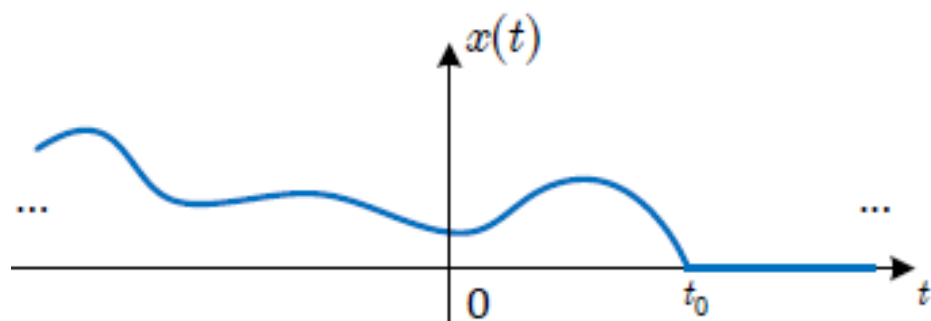


(β') Μεταβλητού πλάτους ημίτονα

- **Πόλοι και Μηδενικά**
- Οι μετασχηματισμοί Laplace που θα δούμε θα αποτελούν κατά κανόνα ρητές συναρτήσεις του s
- Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα δυο είδη σημείων του μιγαδικού επιπέδου
- 1. Οι **πόλοι** του μετασχηματισμού
 - Είναι οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που ο μετασχηματισμός Laplace απειρίζεται, δηλ. το σύνολο $S_p = \{s \in \mathbb{C} : X(s) \rightarrow \infty\}$
 - Ως εκ τούτου, οι πόλοι **δεν** ανήκουν στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού
 - Σε ρητές συναρτήσεις του s , οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι
 - Συμβολίζονται με ένα **X** στο μιγαδικό επίπεδο
- 2. Τα **μηδενικά** του μετασχηματισμού
 - Είναι οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που ο μετασχηματισμός Laplace μηδενίζεται, δηλ. το σύνολο $S_z = \{s \in \mathbb{C} : X(s) = 0\}$
 - Μπορούν να ανήκουν στο πεδίο σύγκλισης, δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα με αυτό
 - Σε ρητές συναρτήσεις του s , οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά
 - Συμβολίζονται με ένα **O** στο μιγαδικό επίπεδο

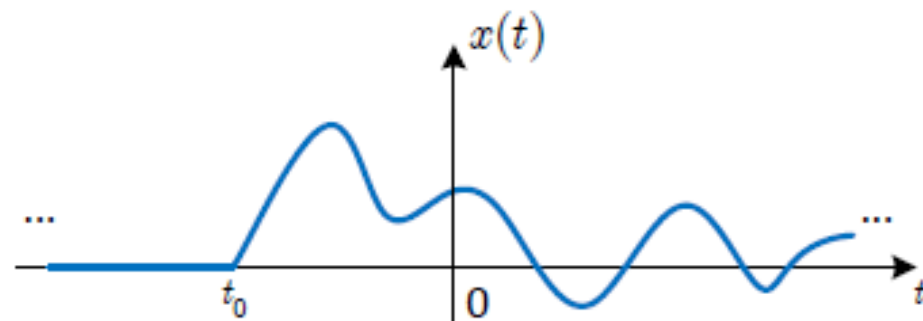
- Πλευρικότητα και Αιτιατότητα
- Πλευρικότητα

$$x(t) = 0, \quad t > t_0$$

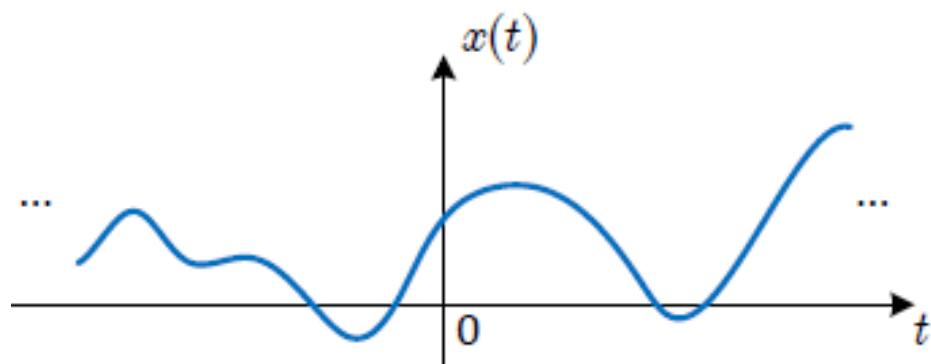


(α') Αριστερόπλευρο σήμα.

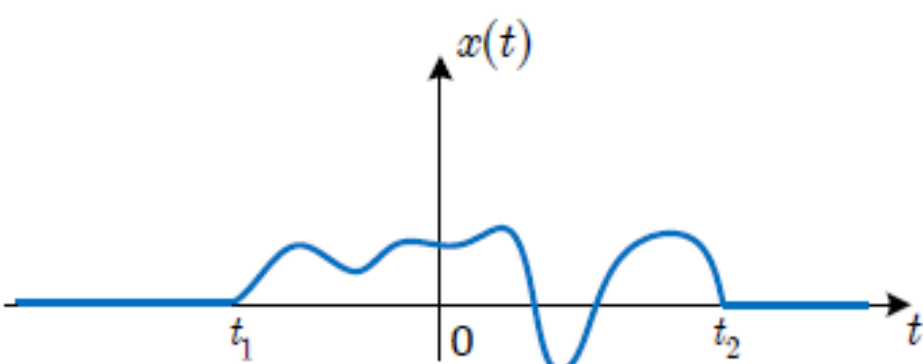
$$x(t) = 0, \quad t < t_0$$



(β') Δεξιόπλευρο σήμα.



(γ') Αμφίπλευρο σήμα.

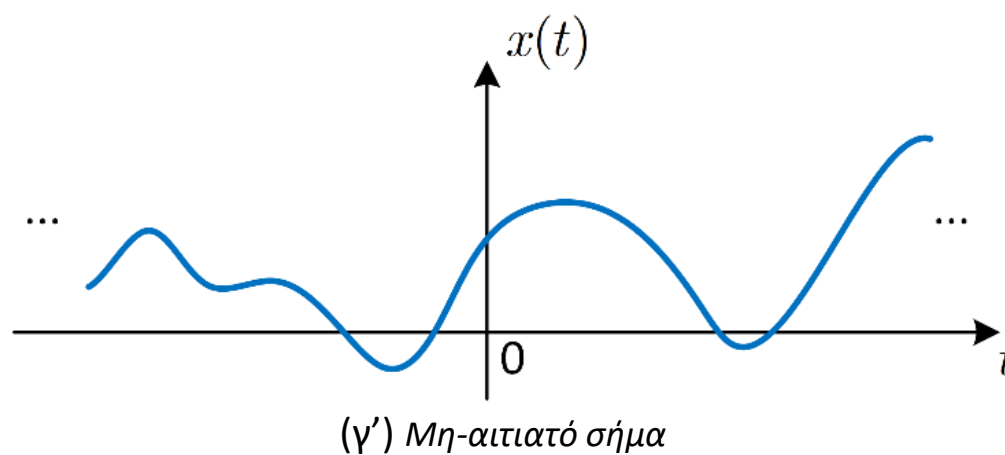
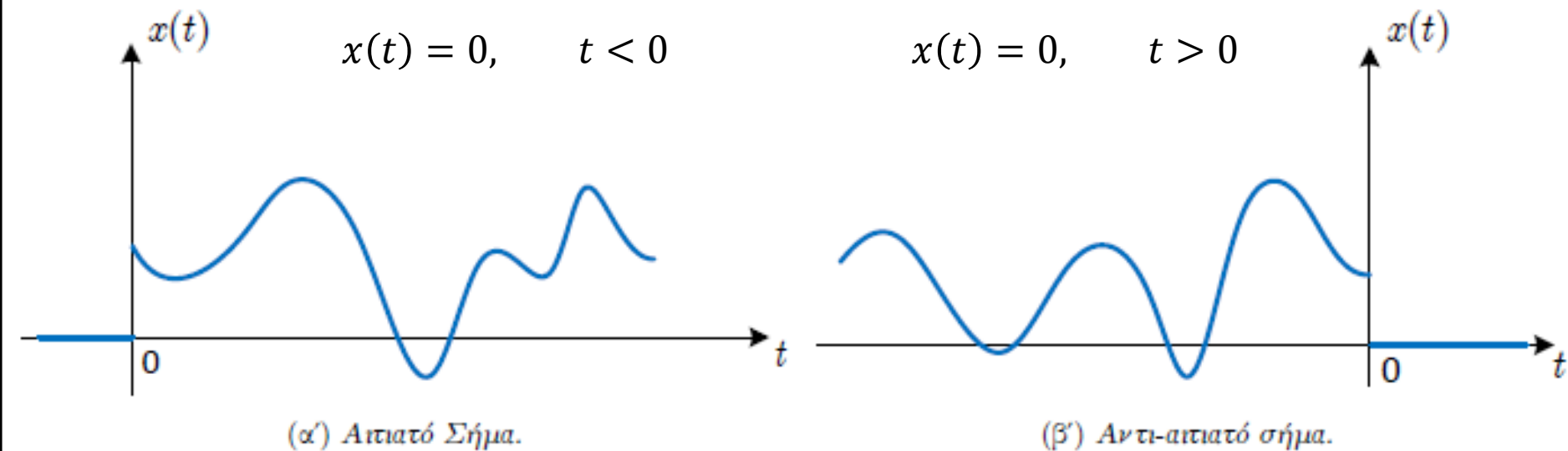


(δ') Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.

$$x(t) = 0, \quad t < t_1, t > t_2$$

• Πλευρικότητα και Αιτιατότητα

• Αιτιατότητα



• Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα: Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt$$

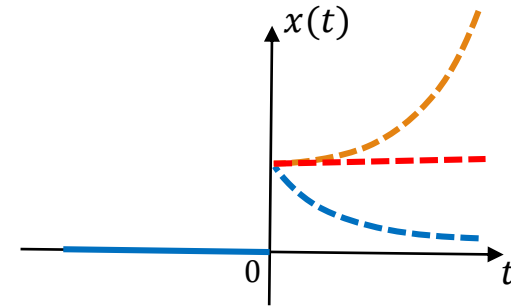
$1, t > 0$
 $0, t < 0$

$$= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (1)$$

Είναι $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j2\pi ft} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j2\pi ft}$

$\nearrow s = \sigma + j2\pi f$



• Μετασχηματισμός Laplace

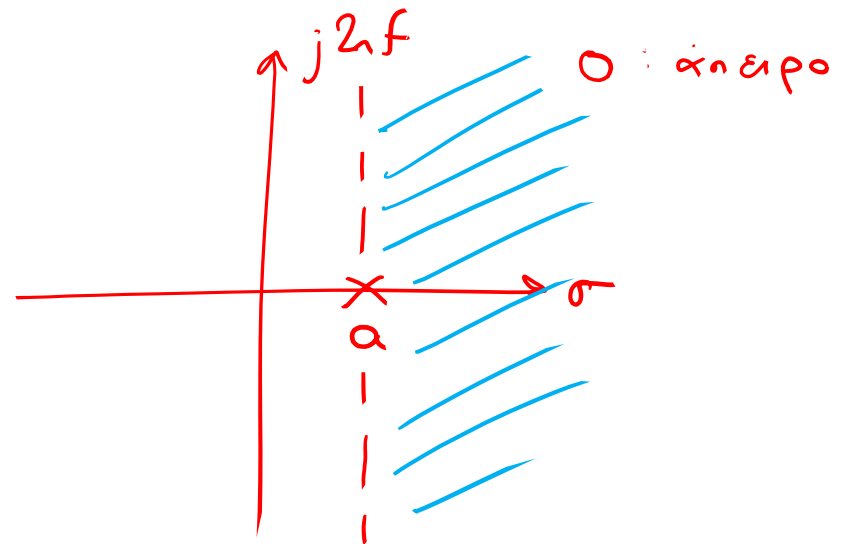
Για $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-s)t} = 0$ ②

① ② $X(s) = \frac{1}{a-s} (0-1) = \frac{1}{s-a}$, $\sigma > a \Leftrightarrow \text{Re}\{s\} > a$

Άρα $e^{at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}$, $\sigma > a$ Πεδίο Συγκλίσης

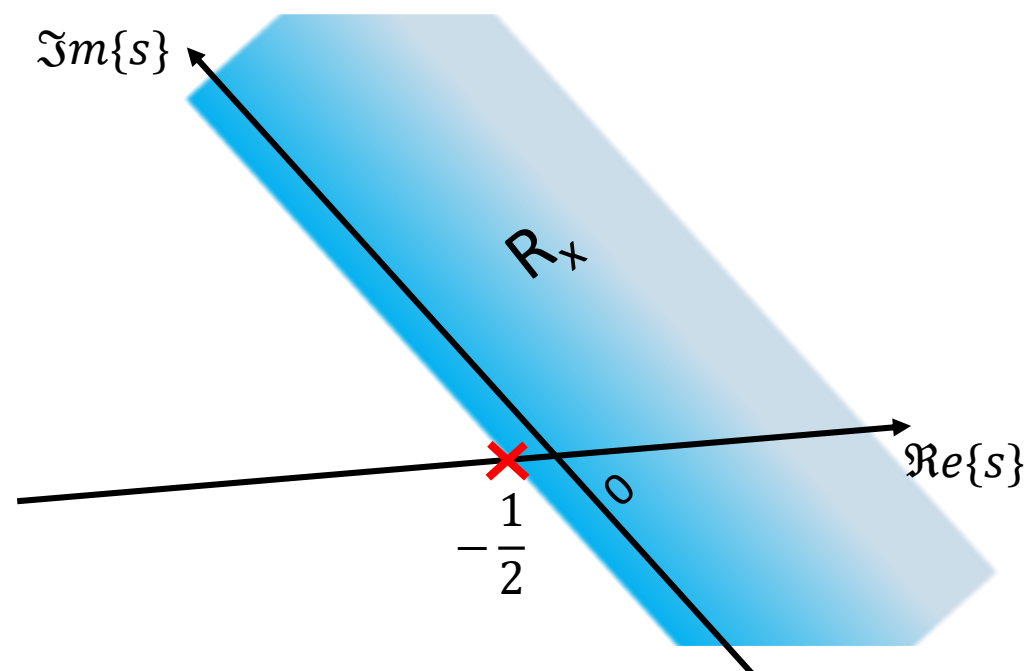
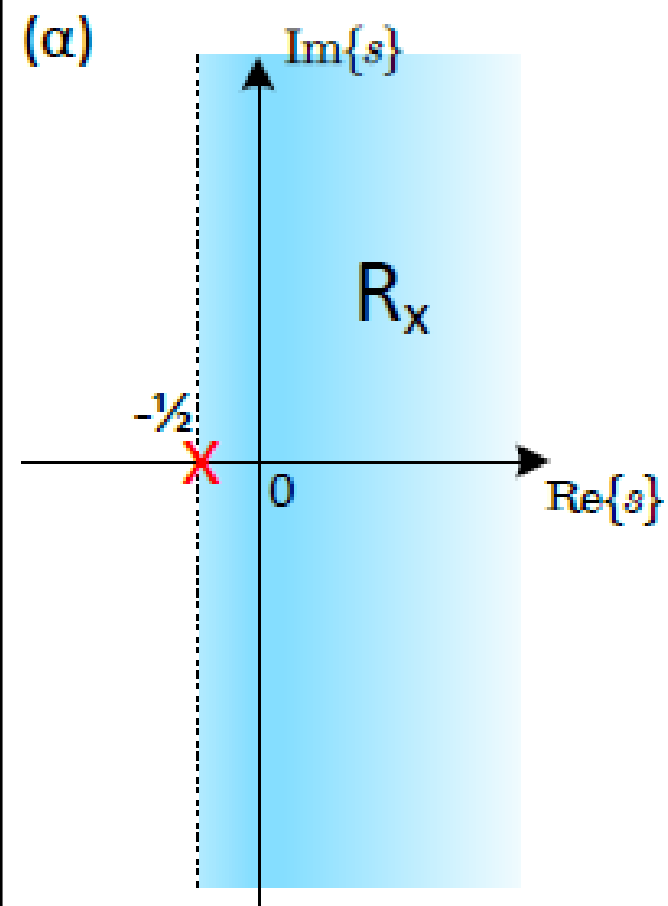
Πόλοι: $s = a$

Μηδενικά: $s = \infty$

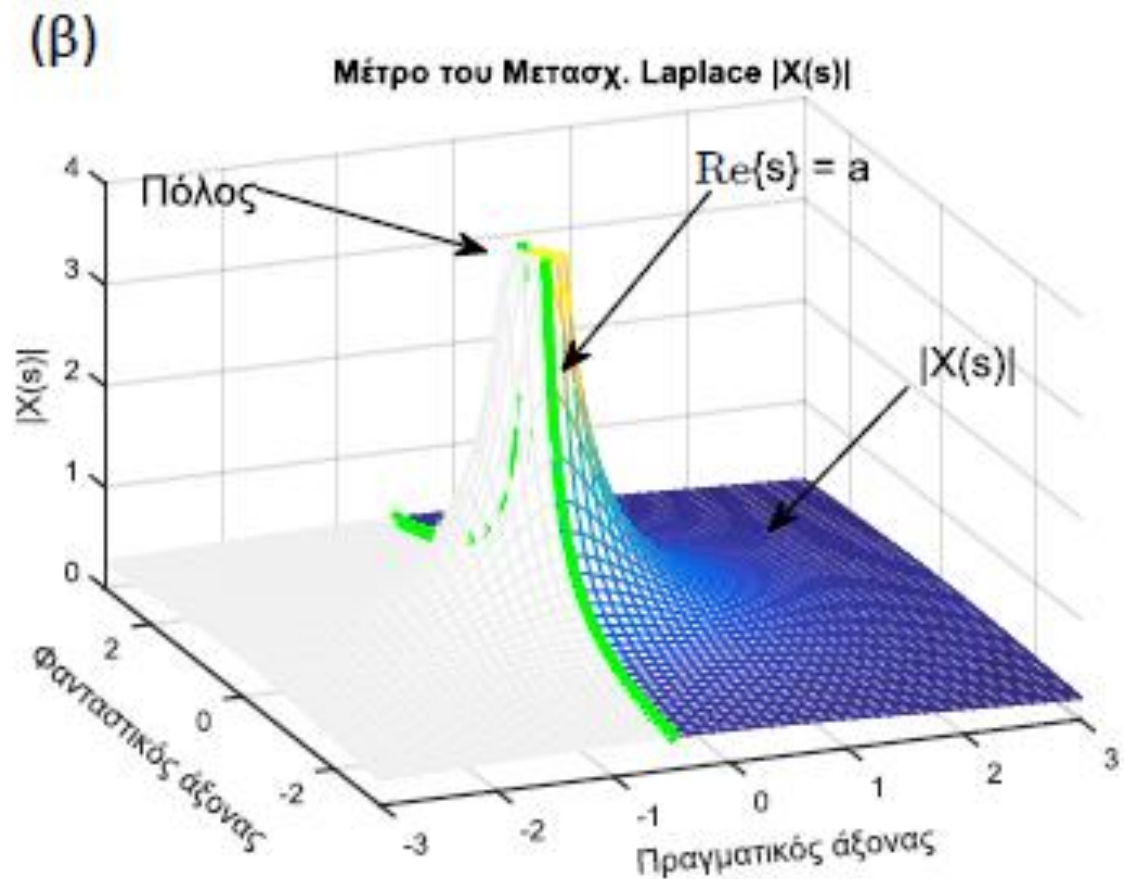
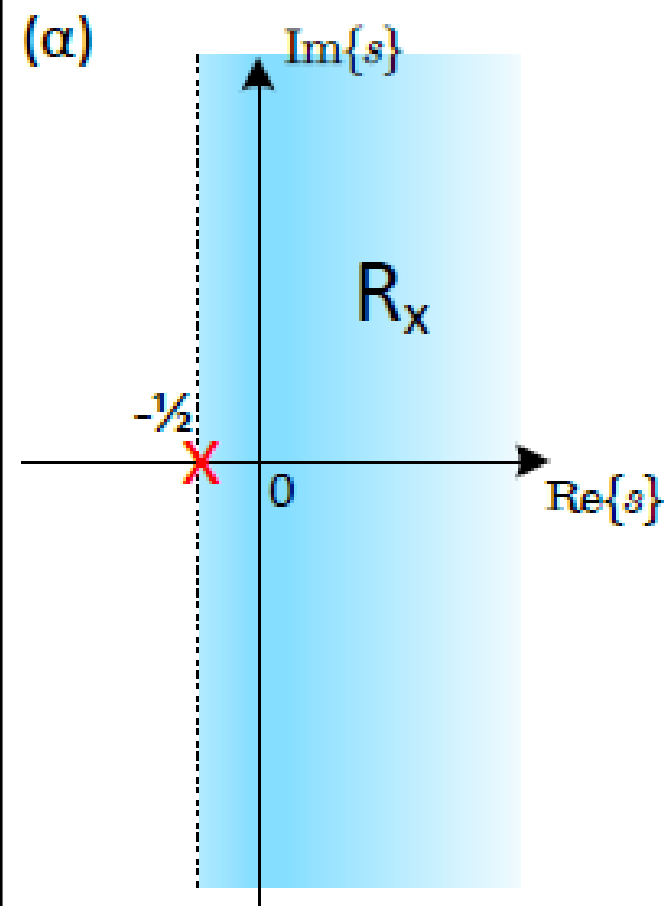


• Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:



- Μετασχηματισμός Laplace
- Παράδειγμα:



• Μετασχηματισμός Laplace

• Κώδικας:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Παράμετρος α (πρέπει να είναι > 0)
a = 2

# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου [-1,1] s
t = np.arange(-1, 1 + dt, dt)

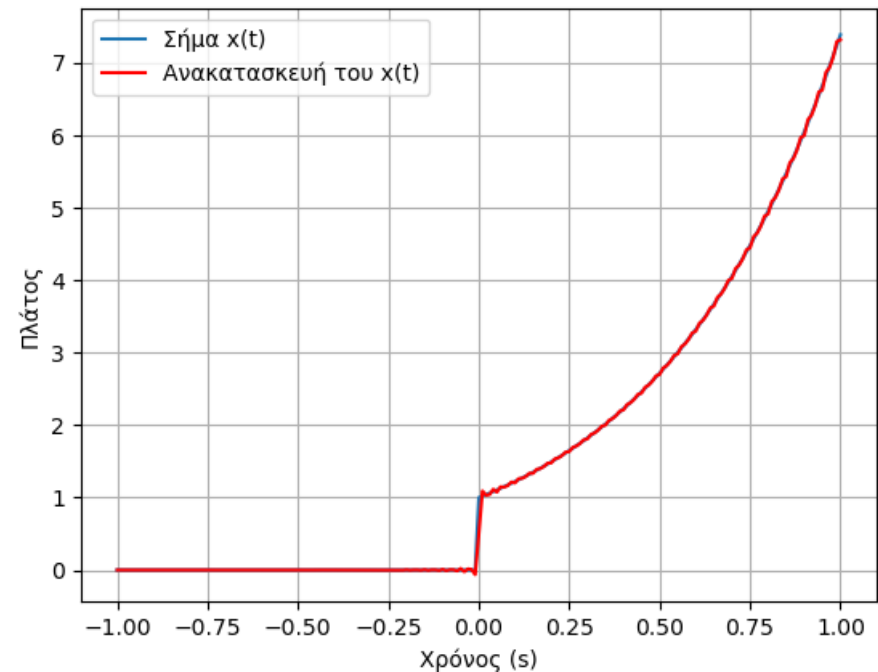
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνότητας [-40,40] Hz
f = np.arange(-40, 40 + df, df)

# Σήμα (0 για t < 0, exp(at) για t > 0)
x = np.where(t <= 0, 0, np.exp(a * t))

# Επιλογή μιας τιμής του σ (έστω 4)
sigma = 4

# Μετασχηματισμός Laplace
X = 1.0 / (sigma - a + 1j * 2 * np.pi * f)
```

Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για $\sigma=4$



```
# Δέσμευση μνήμης
x_est = np.zeros_like(t, dtype=complex)

# Σύνθεση του x(t) από ένα slice του μετασχ. Laplace
for i in range(len(f)):
    x_est += X[i] * np.exp((sigma + 1j * 2 * np.pi * f[i]) * t)

# Κανονικοποίηση
x_est = df * x_est

# Plotting
plt.plot(t, x, label='Σήμα x(t)')
plt.plot(t, x_est.real, 'r', label='Ανακατασκευή του x(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για σ=4")
plt.xlabel("Χρόνος (s)")
plt.ylabel("Πλάτος")
plt.show()
```


• Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα: Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = -e^{at}u(-t)$, $a \in \mathbb{R}$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

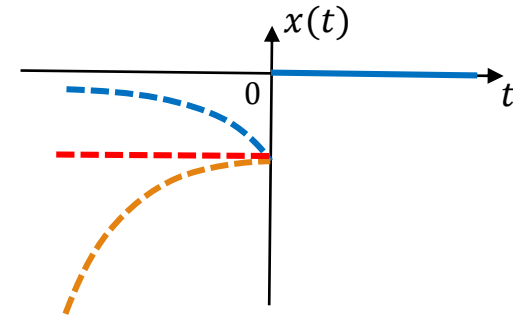
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{at} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt$$

$1, t < 0$
 $0, t > 0$

$$= - \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = - \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$= - \frac{1}{a-s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \right) \quad (1) \quad \text{Είναι } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{at} \cdot e^{-st} \cdot e^{-j2\pi ft} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \cdot e^{-j2\pi ft}$$



• Μετασχηματισμός Laplace

$$\text{Για } a - \sigma > 0 \Leftrightarrow \sigma < a, \text{ το } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} = 0 \quad (2)$$

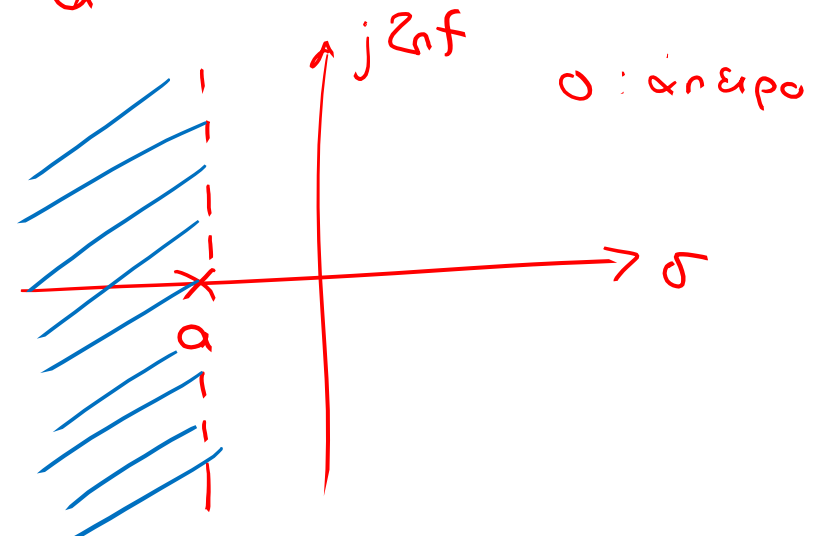
$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} X(s) = -\frac{1}{a-s} (1-0) = \frac{1}{s-a}, \text{ για } \sigma < a.$$

Πεδίο
Σειράς
" $\text{Re}\{s\} < a$

$$\text{Λες } -e^{at} u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}, \sigma < a.$$

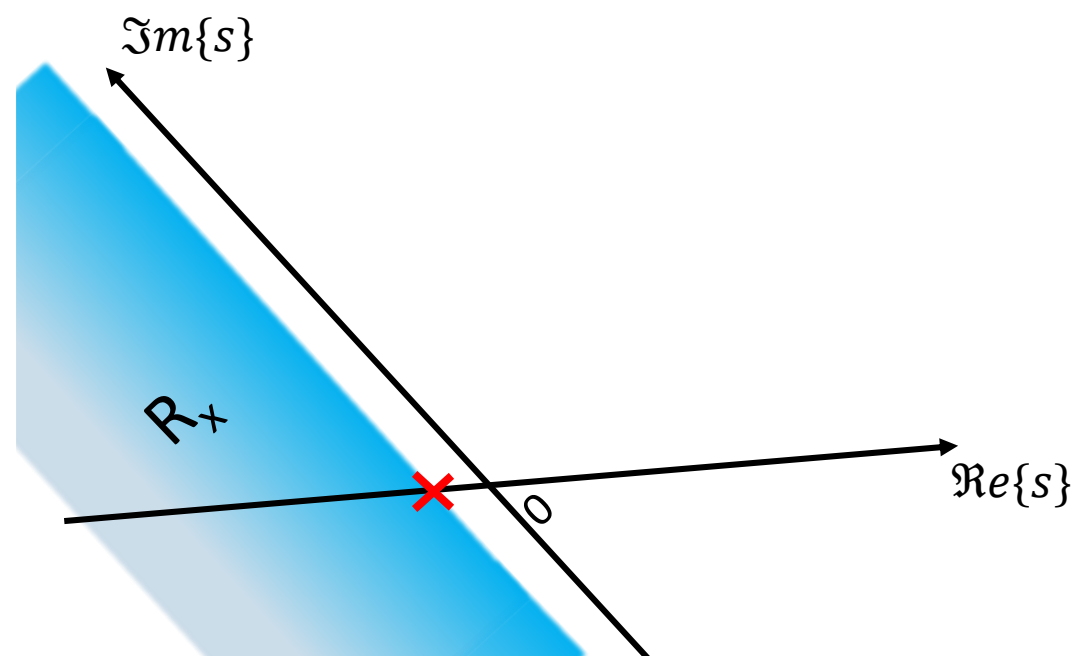
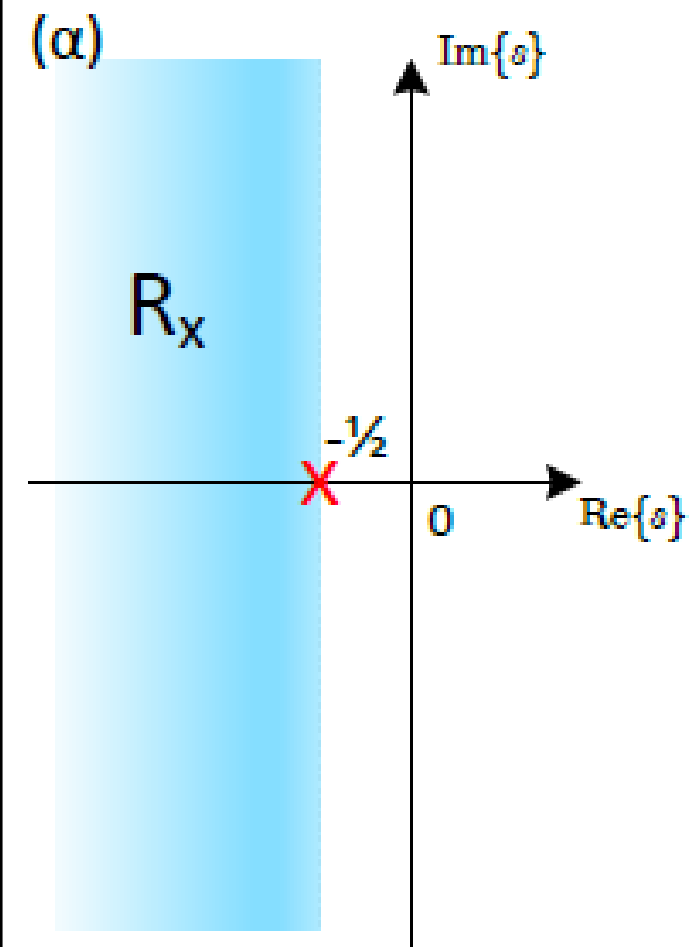
Μηδενικά: $s = \infty$

Πόλος: $s = a$

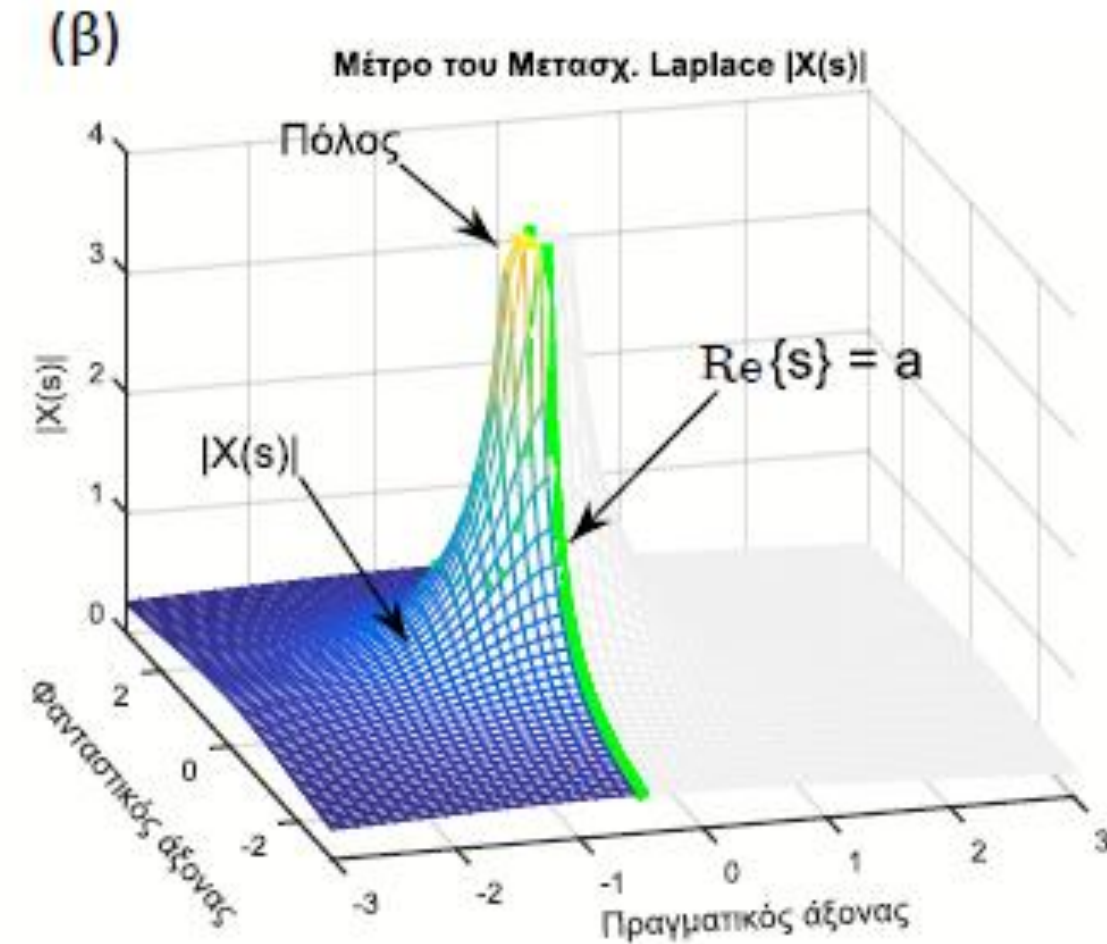
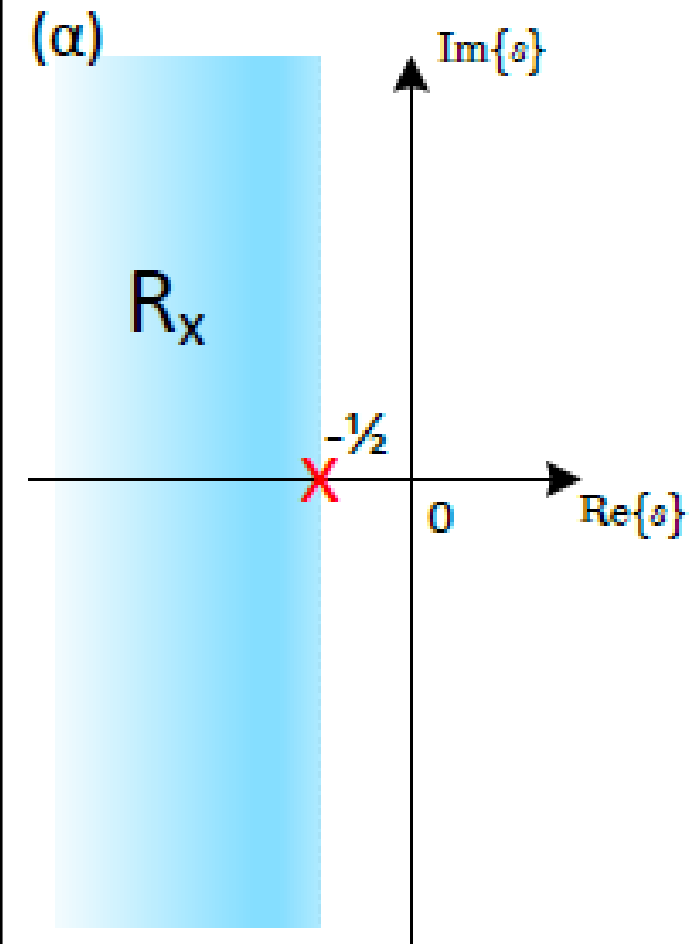


- Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:



- Μετασχηματισμός Laplace
- Παράδειγμα:



• Μετασχηματισμός Laplace

• Κώδικας:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Παράμετρος α (πρέπει να είναι < 0)
a = -3

# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01

# Άξονας χρόνου [-1,1] s
t = np.arange(-1, 1 + dt, dt)

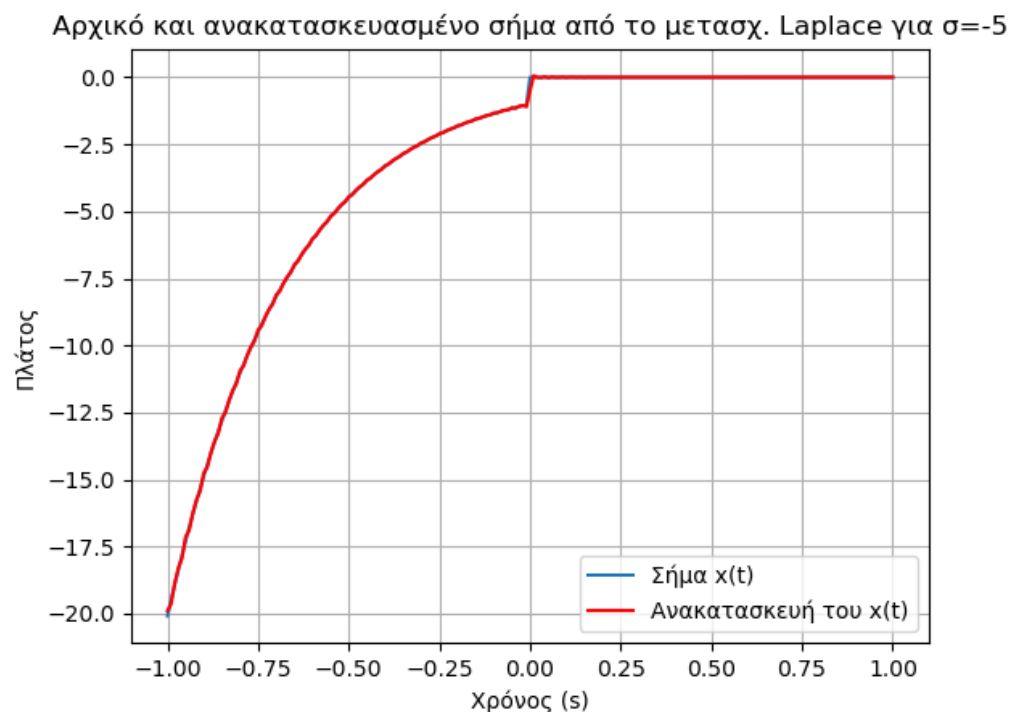
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01

# Άξονας συχνότητας [-40,40] Hz
f = np.arange(-40, 40 + df, df)

# Σήμα (0 για t >= 0, -exp(at) για t < 0)
x = np.where(t >= 0, 0, -np.exp(a * t))

# Επιλογή μιας τιμής του σ (έστω -5)
sigma = -5

# Μετασχηματισμός Laplace
X = 1.0 / (sigma - a + 1j * 2 * np.pi * f)
```



```
# Δέσμευση μνήμης
x_est = np.zeros_like(t, dtype=complex)

# Σύνθεση του x(t) από ένα slice του μετασχ. Laplace
for i in range(len(f)):
    x_est += X[i] * np.exp((sigma + 1j * 2 * np.pi * f[i]) * t)

# Κανονικοποίηση
x_est = df * x_est

# Plotting
plt.plot(t, x, label='Σήμα x(t)')
plt.plot(t, x_est.real, 'r', label='Ανακατασκευή του x(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για σ=-5")
plt.xlabel("Χρόνος (s)")
plt.ylabel("Πλάτος")
plt.show()
```

• Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα: Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{bt}u(-t), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a$$

$$-e^{bt}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-b}, \sigma < b$$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

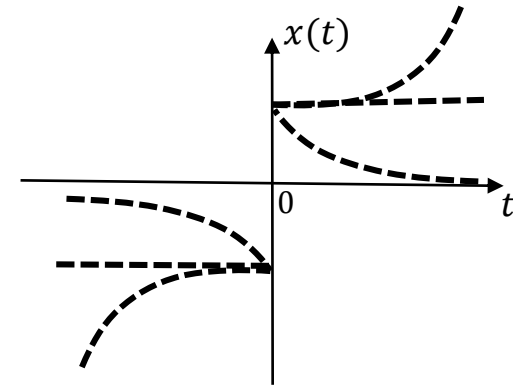
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{at}u(t) - e^{bt}u(-t)) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}u(t) e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{bt}u(-t) e^{-st} dt$$

$$= \mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} + \mathcal{L}\{-e^{bt}u(-t)\}$$

$$= \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} = \frac{2s - (a+b)}{(s-a)(s-b)}, \text{ for } \sigma > a \text{ and } \sigma < b.$$

$$\sigma > a \quad \sigma < b \Rightarrow a < \sigma < b \Rightarrow a < b!$$



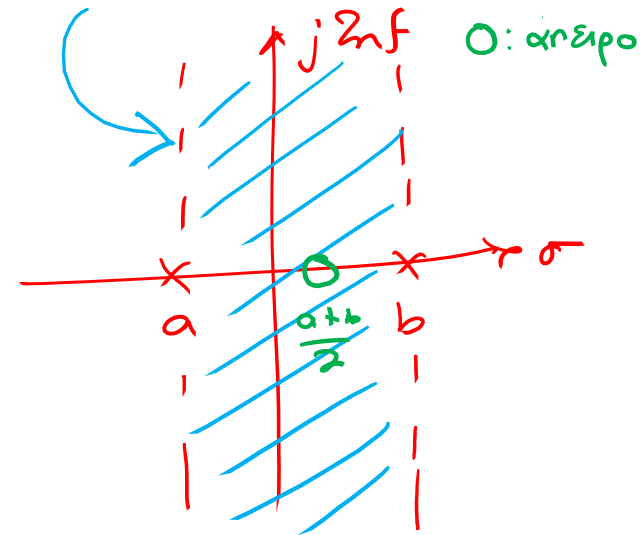
• Μετασχηματισμός Laplace

Αν $a \geq b$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, $\emptyset$.

Αν $a < b$, τότε $\text{---} \curvearrowright \text{---}$ $a < \sigma < b$.

Μηδενικά: $X(s) = 0$

$$\frac{2s - (a+b)}{(s-a)(s-b)} = 0 \Rightarrow s = \frac{a+b}{2} \quad \underline{1}$$



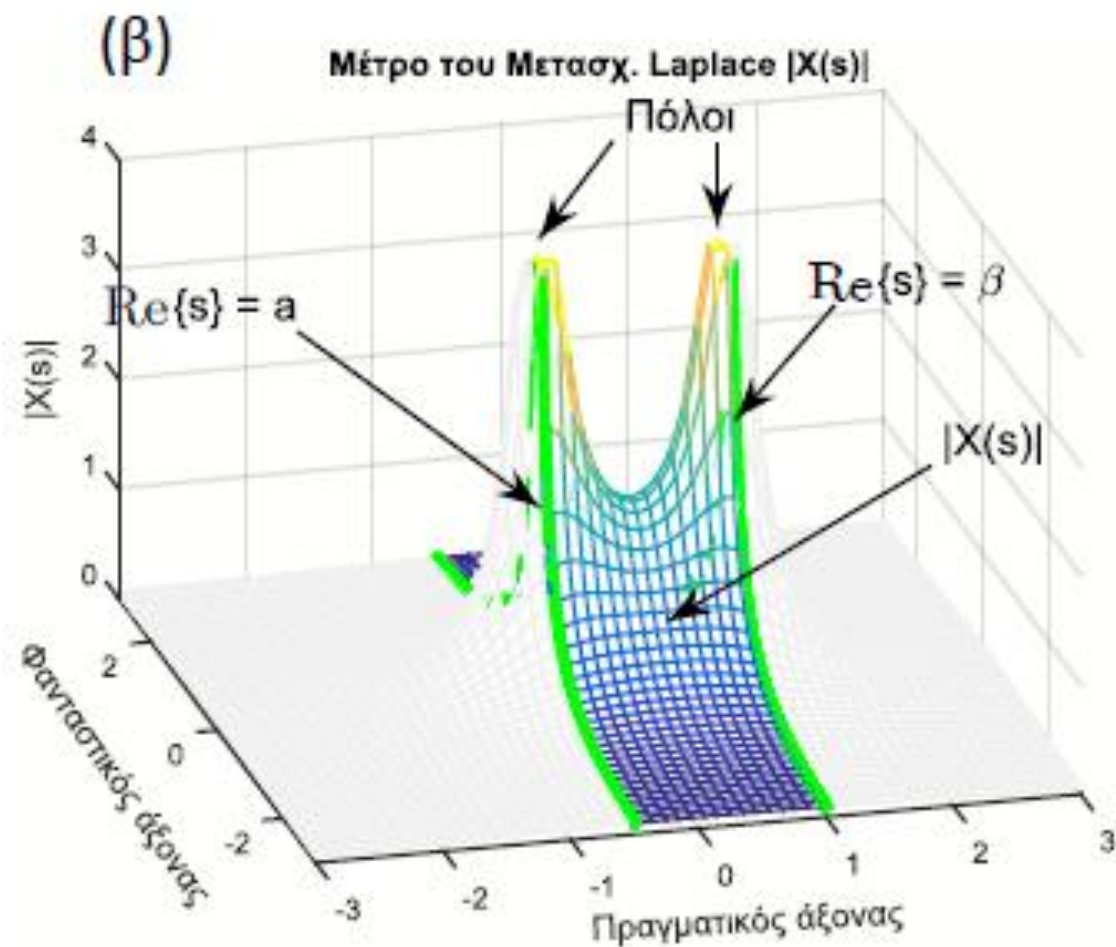
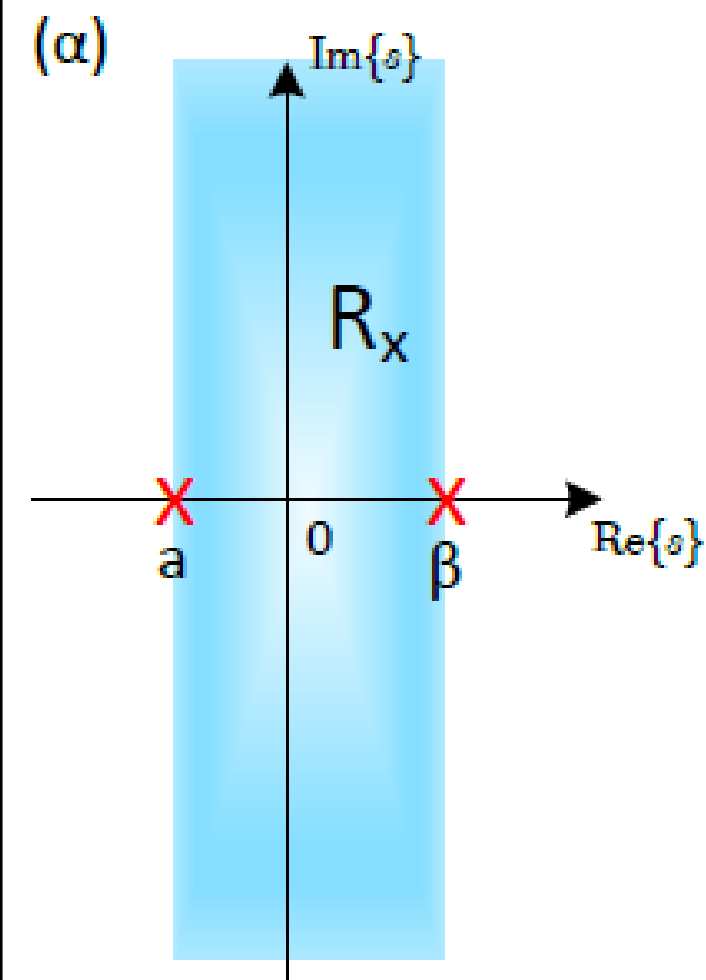
Πόλοι: $X(s) \rightarrow \infty$

$$\frac{2s - (a+b)}{(s-a)(s-b)} \rightarrow \infty \Rightarrow s = a, s = b \quad \underline{2}$$

Όπως, $X(s) = \frac{\cancel{s} \left(2 - \frac{a+b}{s} \right)}{\cancel{s} \left(1 - \frac{a}{s} \right) \left(1 - \frac{b}{s} \right)} = \frac{2 - \frac{a+b}{s}}{s \left(1 - \frac{a}{s} \right) \left(1 - \frac{b}{s} \right)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \textcircled{3}$

• Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα:



• Μετασχηματισμός Laplace

• Κώδικας:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Παράμετρος α
a = -3
# Παράμετρος β
b = 2

# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου [-1,1] s
t = np.arange(-1, 1 + dt, dt)

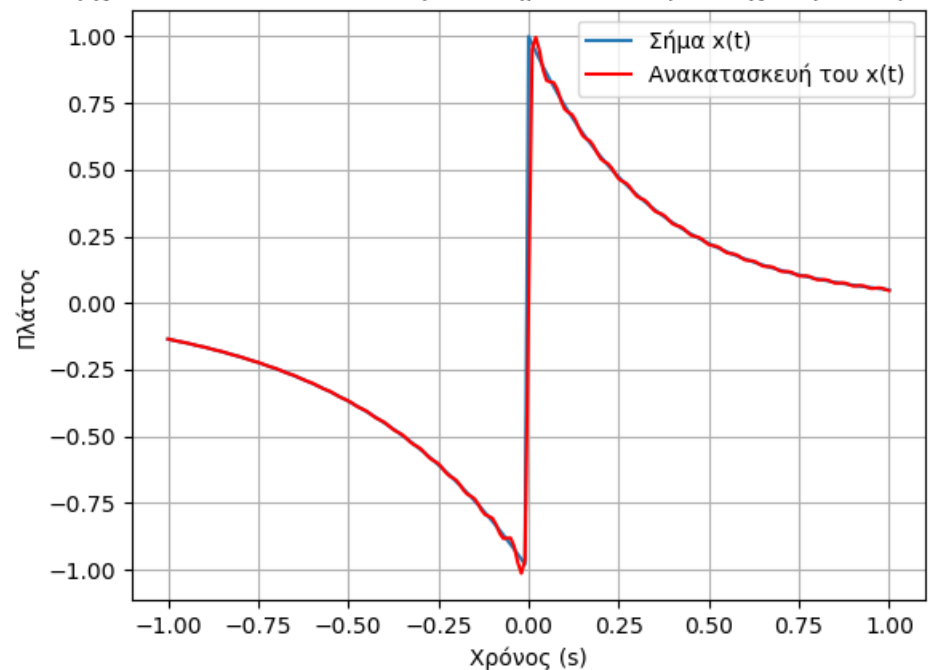
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνότητας [-40,40] Hz
f = np.arange(-80, 80 + df, df)

# Σήμα (exp(at) για t >= 0, -exp(bt) για t < 0)
x = np.where(t <= 0, -np.exp(b * t), np.exp(a * t))

# Επιλογή μιας τιμής του σ (πρέπει να είναι μεταξύ α < σ < β)
sigma = 1

s = sigma + 1j * 2 * np.pi * f
# Μετασχηματισμός Laplace
X = (2*s - (a+b)) / ((s - a)*(s - b))
```

Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για $\sigma=1$



```
# Δέσμευση μνήμης
x_est = np.zeros_like(t, dtype=complex)

# Σύνθεση του x(t) από ένα slice του μετασχ. Laplace
for i in range(len(f)):
    x_est += X[i] * np.exp((sigma + 1j * 2 * np.pi * f[i]) * t)

# Κανονικοποίηση
x_est = df * x_est

# Plotting
plt.plot(t, x, label='Σήμα x(t)')
plt.plot(t, x_est.real, 'r', label='Ανακατασκευή του x(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για σ=1")
plt.xlabel("Χρόνος (s)")
plt.ylabel("Πλάτος")
plt.show()
```

- **Μετασχηματισμός Laplace**

$$\int x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

- Παράδειγμα: Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \delta(t)$$

Είναι

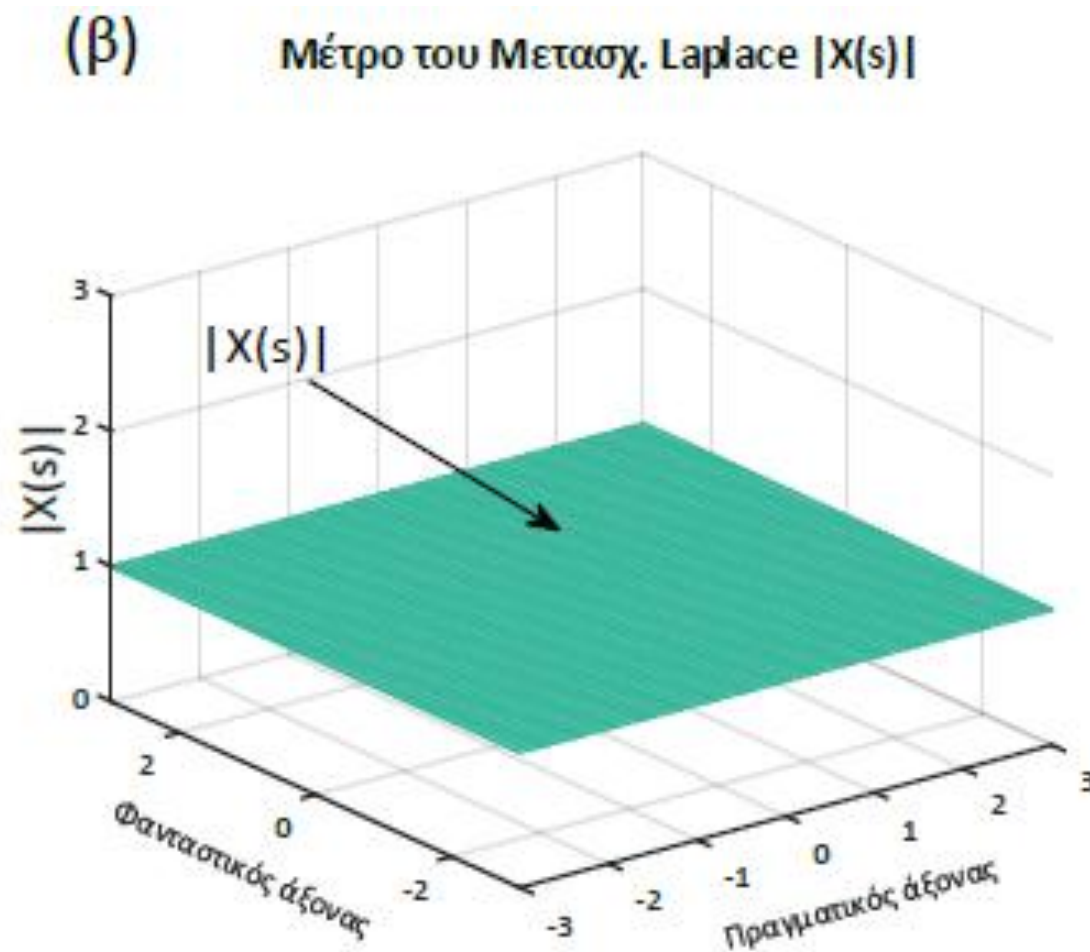
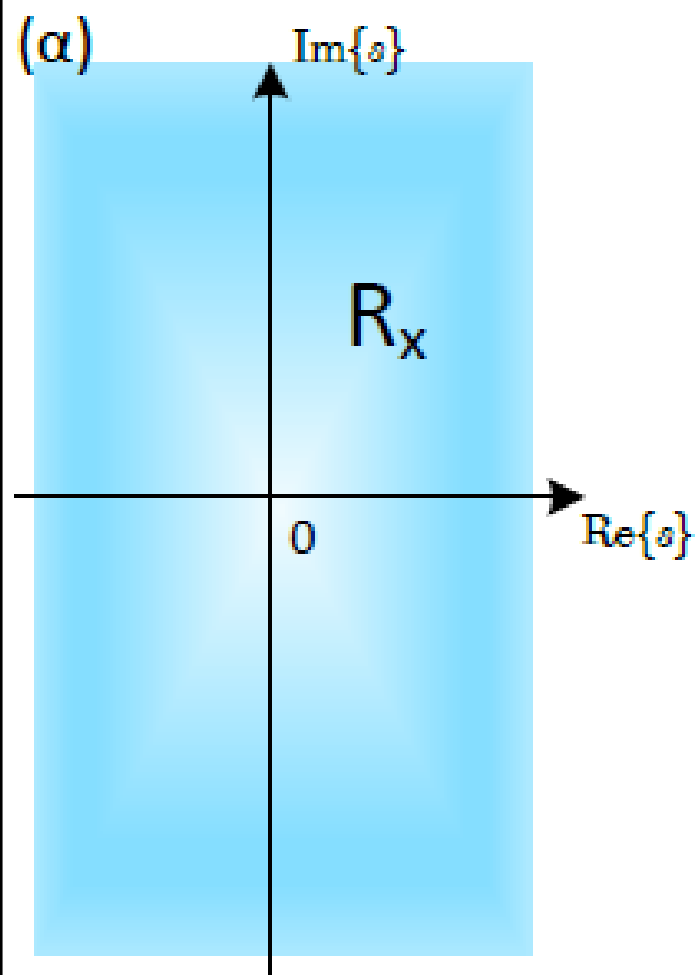
$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt \\ &= e^{-st} \Big|_{t=0} = e^0 = 1, \quad \forall s \end{aligned}$$

Άρα

$$\delta(t) \xrightarrow{L} 1, \quad \forall s$$

- Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα:



- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παρατηρήσεις:

1. Το πεδίο σύγκλισης καθορίζει μοναδικά κάθε ζεύγος μετασχ. Laplace

2. **Πόλοι:** θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το μετασχηματισμό

- ☐ Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s , οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι

3. **Μηδενικά:** θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό

- ☐ Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s , οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά

4. Πεδία σύγκλισης: προκύπτουν από την ανάγκη σύγκλισης του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Laplace

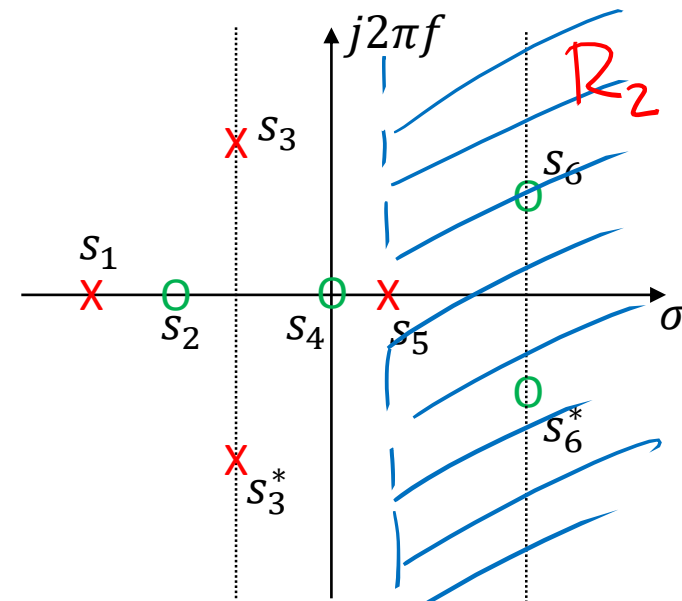
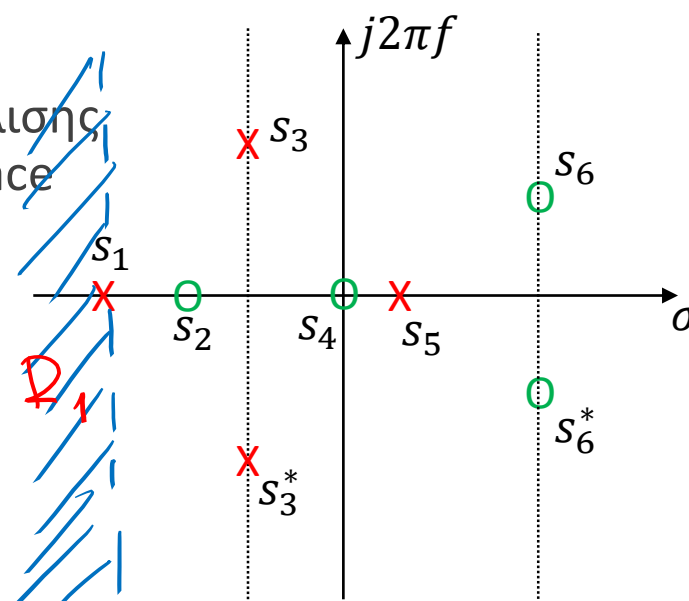
• Μετασχηματισμός Laplace – Πεδίο Σύγκλισης

• Ιδιότητες:

1. Ένα πεδίο σύγκλισης δεν περιέχει ΠΟΤΕ πόλους!
2. Ένα πεδίο σύγκλισης μπορεί να είναι
 - a) Ένα **ημιεπίπεδο** του μιγαδικού επιπέδου **δεξιά** από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
 - b) Ένα **ημιεπίπεδο** του μιγαδικού επιπέδου **αριστερά** από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
 - c) Μια **λωρίδα** του μιγαδικού επιπέδου μεταξύ δυο ευθειών που ορίζονται από δυο πόλους
 - d) **Όλο** το μιγαδικό επίπεδο
3. Ο Μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο και μηδενικά.
4. Αν ένα σήμα είναι **δεξιόπλευρο**, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2a).
5. Αν ένα σήμα είναι **αριστερόπλευρο**, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2b).
6. Αν ένα σήμα είναι **αμφίπλευρο**, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace είναι το 2c).
7. Αν ένα σήμα είναι **πεπερασμένης διάρκειας**, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2d).

Μετασχηματισμός Laplace – Πεδίο Σύγκλισης

- Quiz:** Ποια είναι τα πιθανά πεδία σύγκλισης για το μετασχ. Laplace που έχει πόλους και μηδενικά όπως στο Σχήμα?

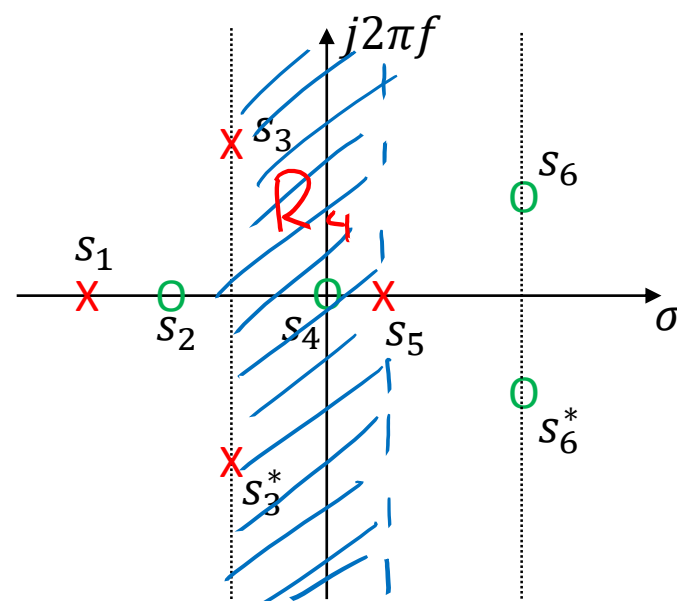
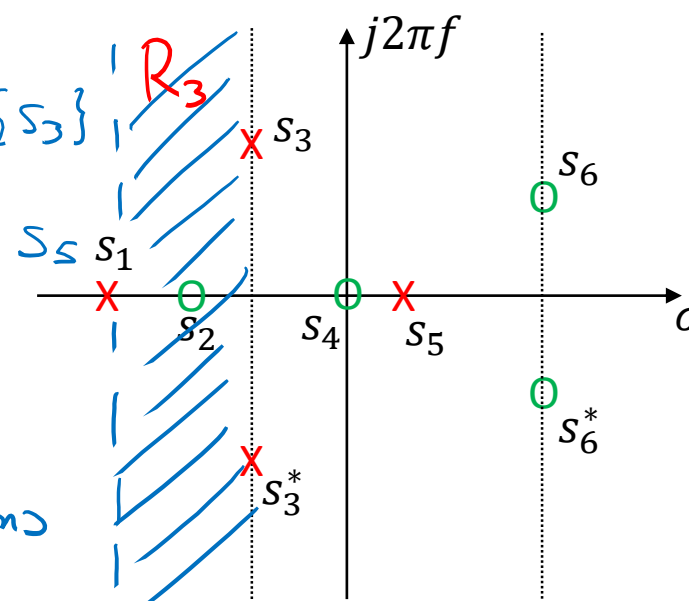


- $\sigma < s_1$
- $\sigma > s_5$

- $s_1 < \sigma < \operatorname{Re}\{s_3\}$

- $\operatorname{Re}\{s_3\} < \sigma < s_5$

4 πιθανά
πεδία σύγκλισης



- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s) \Big|_{s=j2\pi f} = X(\sigma + j2\pi f) \Big|_{\sigma=0}$$

- Άρα ο Μετασχ. Fourier είναι μια «**υποπερίπτωση**» του μετασχ. Laplace?
- Άρα ο μετασχ. Laplace είναι μια «**γενίκευση**» του μετασχ. Fourier?
- Η αλήθεια είναι ότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να προκύψει εκτιμώντας το μετασχ. Laplace επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. για $s = j2\pi f$
- Όπως και ότι μπορούμε – μερικές φορές – να πάρουμε το μετασχ. Laplace από το μετασχ. Fourier θέτοντας $j2\pi f = s$
- Όμως κάποια πράγματα θέλουν προσοχή... 😊

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- **1.** Για να γίνει η εκτίμηση

$$X(f) = X(s)|_{s=j2\pi f}$$

πρέπει το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace να περιέχει το φανταστικό άξονα

- **2.** Ακόμα κι αν δεν τον περιέχει, δε σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει
 - Απλώς δεν υπολογίζεται μέσω του μετασχ. Laplace
 - Μπορεί να υπάρχει μέσω συναρτήσεων Δέλτα π.χ.
- **3.** Αν το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier συγκλίνει, τότε ο μετασχ. Laplace υπάρχει για κάποιο πεδίο σύγκλισης (το οποίο περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα) και μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας $j2\pi f = s$
 - Για παράδειγμα, όταν ο μετασχ. Fourier είναι ρητή συνάρτηση του $j2\pi f$
 - Ενώ αν χρησιμοποιούμε γενικευμένες συναρτήσεις (π. χ. $\delta(t)$), η γενίκευση αυτή δε δουλεύει

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

- Βρήκαμε πριν ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{a + s}, \sigma > -a$$

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s) \Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) = X(f) \Big|_{j2\pi f=s}$$

• Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier

- Αντίθετα, ξέρουμε ότι

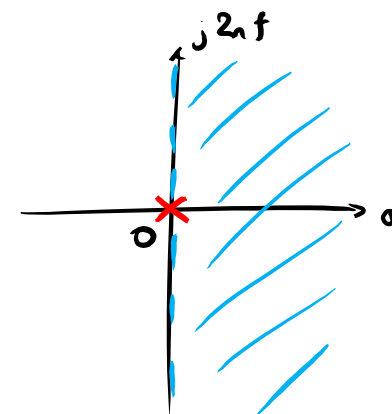
$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \sigma > 0$$

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) \neq X(s) \Big|_{s=j2\pi f}$$



αλλά και ότι

$$X(s) \neq X(f) \Big|_{j2\pi f=s}$$

- Ο λόγος είναι ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού **δεν περιέχει το φανταστικό άξονα**, αλλά και το ότι ο μετασχ. Fourier δεν προκύπτει από σύγκλιση του ορισμού

- Χρειαζόμαστε **γενικευμένη συνάρτηση** για τη σύγκλιση

• Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier

- Πέρα όμως από τις τυπικές μαθηματικές σχέσεις, τι άλλο υπάρχει?
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ας υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$ για $a = 2$ και $a = 4$
- Προφανώς μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

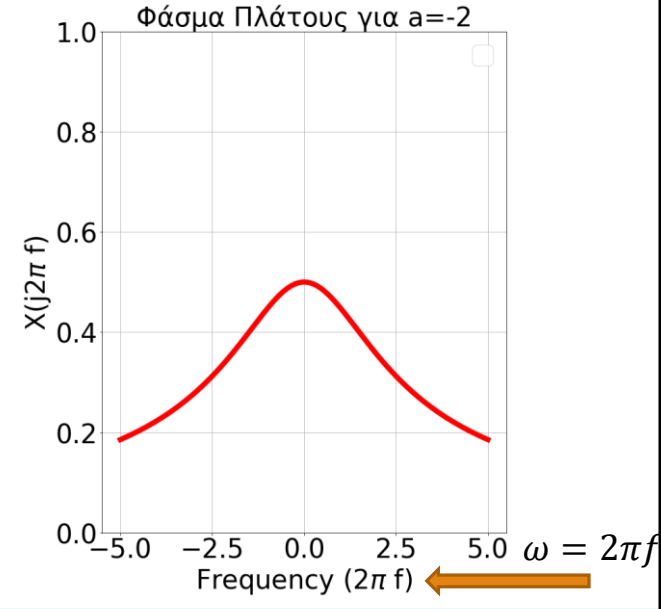
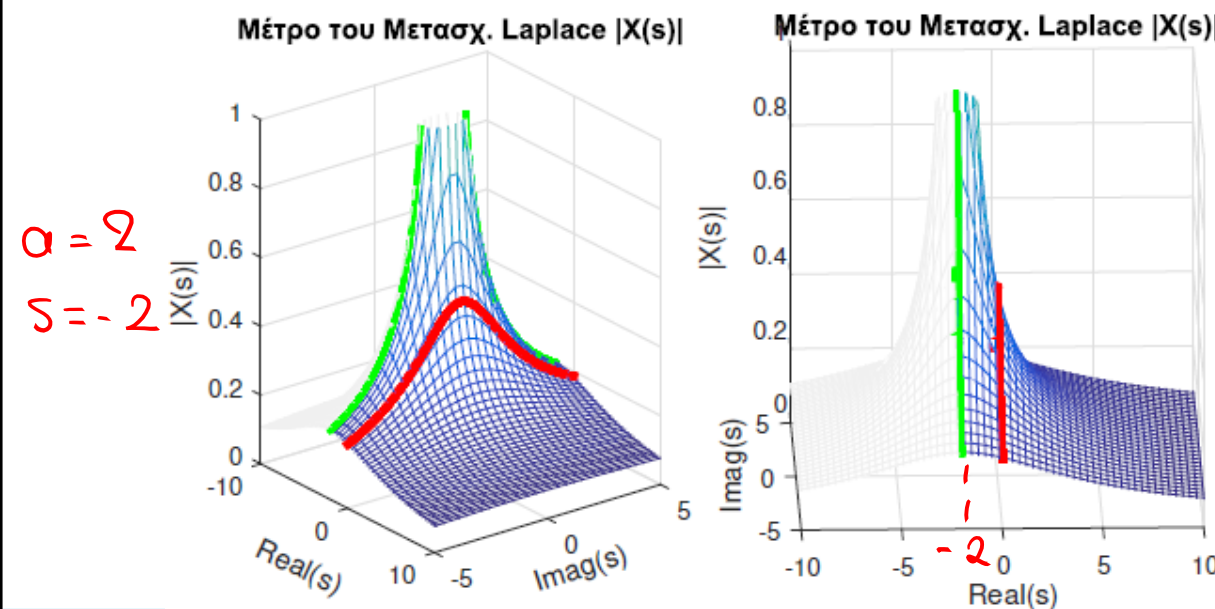
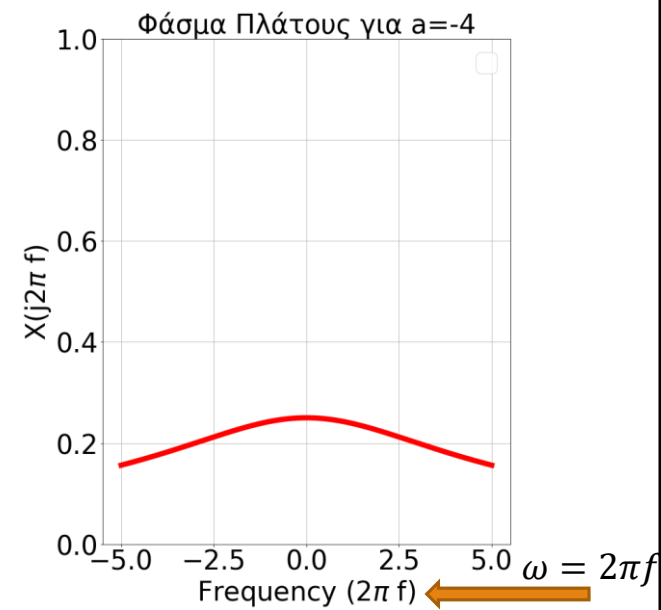
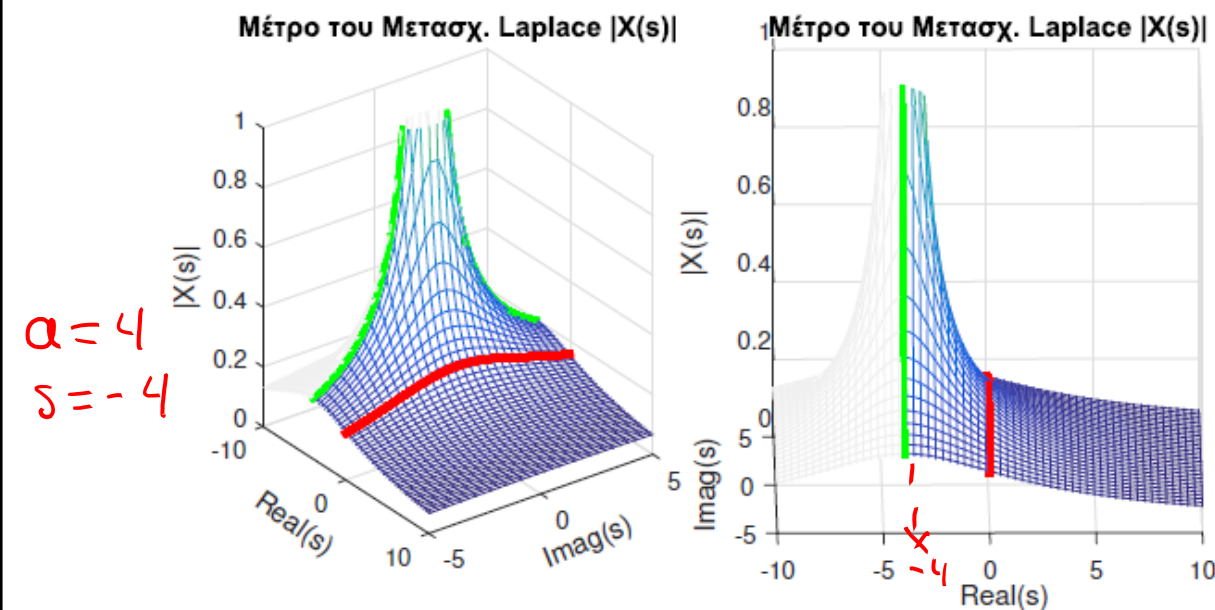
$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

και

$$X(s) = \frac{1}{a + s} \Rightarrow |X(s)| = \frac{1}{\sqrt{(a + \sigma)^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

- Ας απεικονίσουμε τις δυο περιπτώσεις για τις διαφορετικές τιμές του a
- Προσέξτε ότι το $s = -a$ είναι ο πόλος του μετασχηματισμού Laplace!
 - Δηλ. στα σχήματα που θα δούμε, ο πόλος θα είναι στις θέσεις -4 και -2

Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier



• Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier

• Η προηγούμενη συζήτηση αποκαλύπτει την κύρια χρήση του μετασχ. Laplace: ανάλυση και σχεδίαση συστημάτων!

- Το προηγούμενο παράδειγμα μας υποδεικνύει ότι αν θέλουμε να «ενισχύσουμε» πολύ τις συχνότητες γύρω από το μηδέν, μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύστημα της μορφής

$$H(s) = \frac{A}{s + 0.5}, \sigma > -0.5$$

- Το σύστημα αυτό θα έχει μετασχ. Fourier

$$H(f) = \frac{A}{j2\pi f + 0.5}$$



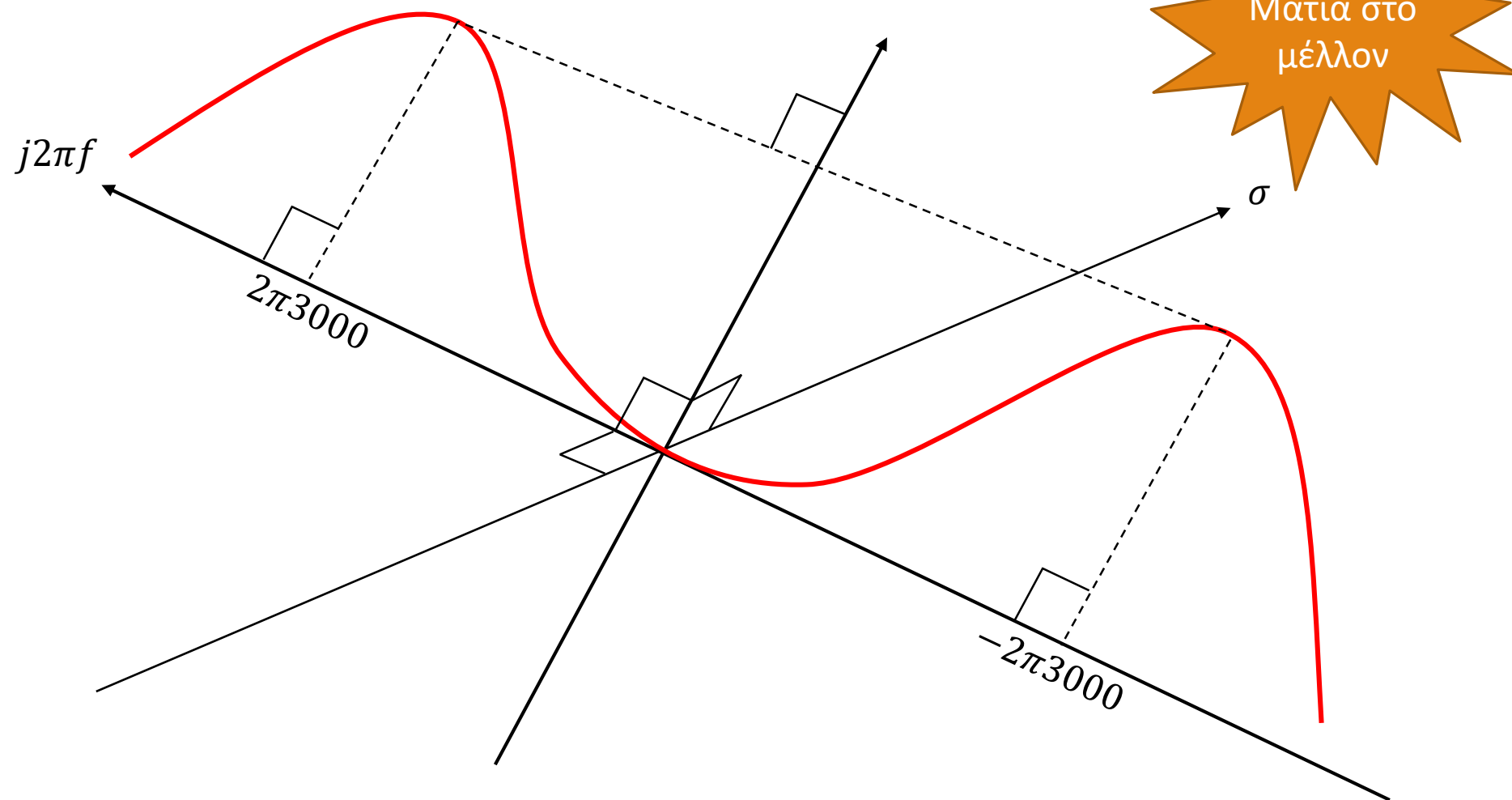
εφ' όσον το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $\sigma = 0$

- Η κρουστική του απόκριση θα είναι λοιπόν

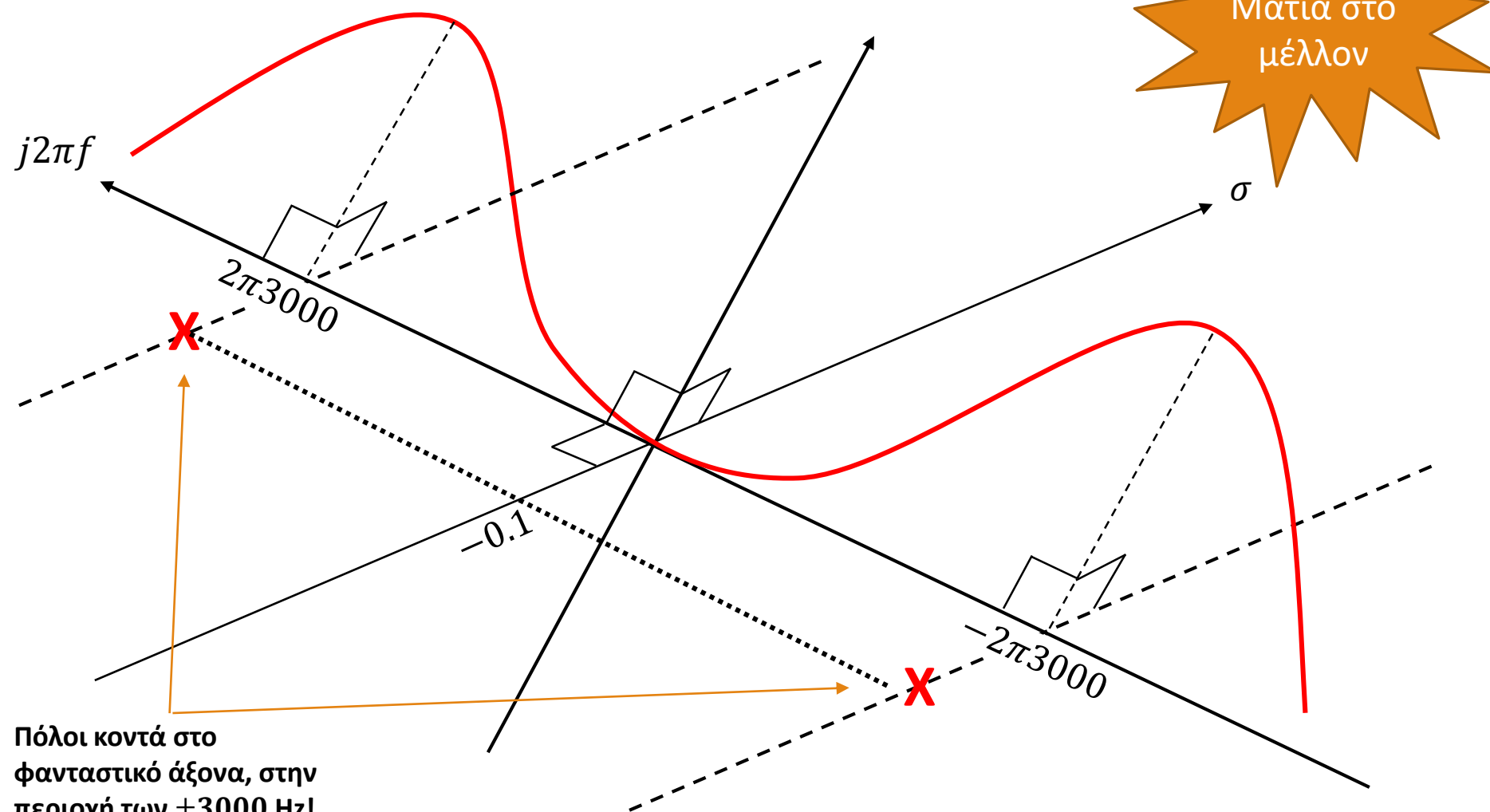
$$h(t) = Ae^{-0.5t}u(t)$$

- Αν κάνουμε συνέλιξη ένα οποιοδήποτε σήμα εισόδου (π.χ. ήχο) με την παραπάνω κρουστική απόκριση, οι συχνότητες **γύρω από το μηδέν** θα ενισχυθούν πολύ σε πλάτος!
 - Οι συχνότητες **αυτές** ονομάζονται **χαμηλές**
 - Αντίστοιχα, όλες οι άλλες θα μείνουν περίπου ίδιες (κατά πλάτος) ή (ανάλογα το φίλτρο) θα μεταβληθούν κι αυτές αλλά πολύ λιγότερο σε σχέση με τις χαμηλές

- Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier
- Κι αν θέλουμε ένα πραγματικό (άρα συζυγώς συμμετρικό ως προς f) φίλτρο που να ενισχύει πολύ τις συχνότητες γύρω από τα 3000 Hz?



- Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier
- Κι αν θέλουμε ένα πραγματικό (άρα συζυγώς συμμετρικό ως προς f) φίλτρο που να ενισχύει πολύ τις συχνότητες γύρω από τα 3000 Hz?



- Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier

- Ποιό θα είναι το φίλτρο μας στην τελευταία περίπτωση?

- Ο ένας πόλος θα αντιστοιχεί σε ένα σύστημα της μορφής

$$H_1(s) = \frac{A_1}{s + (-0.1 + j2\pi 3000)}, \sigma > -0.1$$

και ο άλλος πόλος σε ένα σύστημα της μορφής

$$H_2(s) = \frac{A_2}{s + (-0.1 - j2\pi 3000)}, \sigma > -0.1$$

- Ο συνδυασμός σε σειρά των δυο συστημάτων θα δώσει το σύστημα

$$H(s) = \frac{A_1}{[s + (-0.1 + j2\pi 3000)]} \frac{A_2}{[s + (-0.1 - j2\pi 3000)]}, \sigma > -0.1$$

- Με λίγες πράξεις παίρνουμε

$$H(s) = \frac{A_1 A_2}{s^2 - 0.2s + 3.55 \times 10^8}, \sigma > -0.1$$

- Σύντομα θα δούμε πως αντιστρέφουμε στο χρόνο ένα τέτοιο κλάσμα.... ☺

- Στην πράξη, η παραπάνω μορφή μας είναι αρκετή για να υλοποιήσουμε το φίλτρο!!

- Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με συστήματα στο χώρο του Laplace αργότερα...



Ματιά στο μέλλον

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$x(t)$ $y(t)$	$X(s)$ $Y(s)$	R_x R_y
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s),$	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n -οστη παραγωγή στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{ \operatorname{Re}\{s\} > 0 \} \right)$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R_x
	$y(t)$	$Y(s)$	R_y
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$

• Απόδειξη:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow Z(s) = ?$$

$$Z(s) = \int z(t)e^{-st}dt = \int (Ax(t) + By(t))e^{-st}dt$$

$$= \int Ax(t)e^{-st}dt + \int By(t)e^{-st}dt$$

$$= A \int x(t)e^{-st}dt + B \int y(t)e^{-st}dt, \quad \mu \varepsilon R_x, R_y$$

$$= AX(s) + BY(s), \quad \mu \varepsilon R \supseteq R_x \cap R_y$$

 **!?**

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

○ Βρείτε το μετασχ. Laplace του αθροίσματος των σημάτων

$$X(s) = \frac{1}{s-2}, \underbrace{\sigma > 2}_{R_x}, \quad Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s-2)}, \underbrace{\sigma > 2}_{R_y}$$

Είναι

$$X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{(s-1) - 1}{(s-1)(s-2)} = \frac{\cancel{s-2}}{(s-1)\cancel{(s-2)}}$$

$$= \frac{1}{s-1}, \quad R_z = ?$$

$$\sigma > 1$$

$$\sigma < 1$$

✓ Μόνο στην περίπτωση αλληλοεξουδετέρωσης πόλου-μηδενικού είναι πιθανό να έχουμε πεδίο σύγκλισης μεγαλύτερο της τομής των επιμέρους!

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R_x
	$y(t)$	$Y(s)$	R_y
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x

• Απόδειξη:

$$z(t) = x^*(t) \rightarrow Z(s) = ?$$

$$Z(s) = \int z(t) e^{-st} dt = \int x^*(t) e^{-st} dt$$

$$= \int (x(t) e^{-s^* t})^* dt = \left(\int x(t) e^{-s^* t} dt \right)^*$$

$$= (X(s^*))^* = X^*(s^*)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

○ Έστω ένα σήμα $x(t) \in \mathbb{R}$ με ρητό Μετασχ. Laplace $X(s)$. Για το σήμα γνωρίζετε ότι:

☐ έχει ένα πόλο στη θέση $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ κι άλλον ένα πόλο στη θέση s_2 , και κανέναν άλλο

☐ έχει ένα μηδενικό στη θέση $s_3 = -1$

☐ $X(0) = 2$

Βρείτε όσα περισσότερα μπορείτε για το $X(s)$

Επειδή $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = x^*(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = X^*(s^*)$ ①

Ξεραφει ότι ο $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ είναι πόλος του $X(s)$, δηλ:

$X(s_1) \rightarrow \infty \xRightarrow{①} X^*(s_1^*) \rightarrow \infty$, άρα ο s_1^* είναι επίσης πόλος του $X(s)$! Άρα ο πόλος s_2 είναι ο s_1^* , δηλ. $s_2 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$.

Συμπέρασμα: οι πόλοι - και τα μηδενικά - του Μετασχηματισμού

Laplace ενός πραγματικού σήματος $x(t)$ έρχονται σε συζυγή

Τείχη! Άρα οι δύο πόλοι είναι οι: $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$, $s_1^* = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Αρα

$$X(s) = A \frac{(s+1)}{(s-s_1)(s-s_1^*)}, \quad A \in \mathbb{R}$$

$$z \cdot z^* = |z|^2$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}$$

Εχουμε $X(0) = 2 \Rightarrow A \frac{(0+1)}{(0-s_1)(0-s_1^*)} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A}{|s_1|^2} = 2 \Rightarrow A = 2 |s_1|^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Αρα

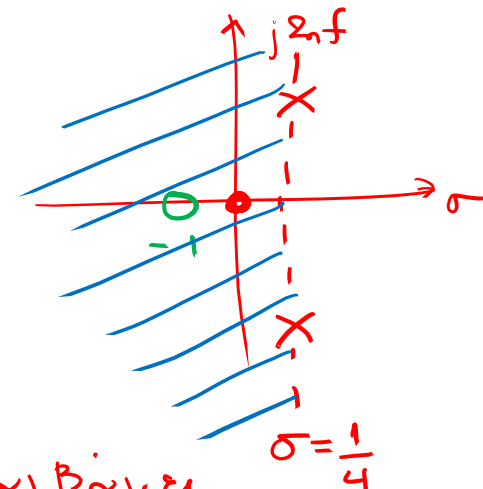
$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s-s_1)(s-s_1^*)}, \quad R_x = ?$$

Προσυν: ROC:

- $\sigma > \frac{1}{4}$ X

- $\sigma < \frac{1}{4}$ ✓

γιατί περιλαμβάνει
το $X(0) = 2$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R_x
	$y(t)$	$Y(s)$	R_y
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$

• Απόδειξη:

$$z(t) = x(t) * y(t) \rightarrow Z(s) = ?$$

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t)) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) e^{-st} dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(s) e^{-s\tau} d\tau, \quad \mu\epsilon R_y$$

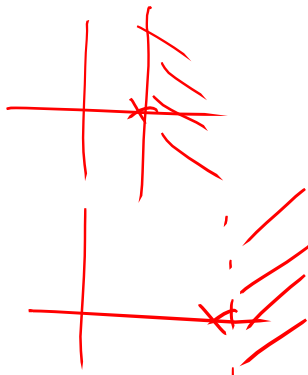
$$= Y(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = Y(s) X(s), \quad \mu\epsilon R \supseteq R_x \cap R_y$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

○ Έστω δυο σήματα $x(t) = e^{at}u(t)$, $y(t) = e^{2at}u(t)$. Υπολογίστε τη συνέλιξη τους.

• 1^η μέθοδος: $C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \dots$

• 2^η μέθοδος:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{at}u(t) &\xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a} = X(s), \quad \sigma > a \\ y(t) = e^{2at}u(t) &\xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-2a} = Y(s), \quad \sigma > 2a \end{aligned}$$


$$C_{xy}(s) = X(s)Y(s) = \frac{1}{(s-2a)(s-a)}, \quad R_{xy} = R_x \cap R_y = \{\sigma > 2a\}.$$

Λε $\propto$ $C_{xy}(s) = \frac{A}{s-2a} + \frac{B}{s-a}$

$$A = C_{xy}(s)(s-2a) \Big|_{s=2a} = \frac{1}{\cancel{(s-2a)}(s-a)} \cancel{(s-2a)} \Big|_{s=2a} = \frac{1}{s-a} \Big|_{s=2a} = \frac{1}{a}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Όφια, $B = -\frac{1}{a}$, αρα:

$$C_{xy}(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s-2a} - \frac{1}{a} \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > 2a$$

Ανι νινακας έτοιφω μετασχηματισμών

$$\begin{aligned} c_{xy}(t) &= \frac{1}{a} e^{2at} u(t) - \frac{1}{a} e^{at} u(t) \\ &= \frac{1}{a} (e^{2at} - e^{at}) u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{at} u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a \\ -e^{at} u(-t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a \end{aligned}$$

$$\{\sigma > a\} \cap \{\sigma > 2a\} \quad (*)$$

$$(*) \quad \frac{1}{a} \frac{1}{s-2a} - \frac{1}{a} \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > 2a$$

- $\sigma > 2a$ ✓
 - $\sigma < 2a$ ✗
 - $\sigma > a$ ✓
 - $\sigma < a$ ✗
- έτσι ώστε η τμή τους να είναι το $\{\sigma > 2a\}$!

• Ο Μονόπλευρος Μετασχ. Laplace

• Μονόπλευρος μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- Ουσιαστικά αποτελεί το μετασχ. Laplace που ξέρουμε ήδη, αλλά για αιτιατά σήματα
- Κάποιες ιδιότητες είναι λίγο διαφορετικές

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big _{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{ \operatorname{Re}\{s\} > 0 \} \right)$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s -επίπεδο
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s -επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$	Όλο το s -επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} < 0$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 - s^2}$	$a > \operatorname{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s + a}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -\operatorname{Re}\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s + a}$	$\operatorname{Re}\{s\} < -\operatorname{Re}\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s + a)^n}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -\operatorname{Re}\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s + a)^n}$	$\operatorname{Re}\{s\} < -\operatorname{Re}\{a\}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -\operatorname{Re}\{a\}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -\operatorname{Re}\{a\}$
$t \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2 - (2\pi f_0)^2}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$t \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10}, \quad \sigma < -2$$

$$\begin{aligned} e^{at}u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a \\ -e^{at}u(-t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a \end{aligned}$$

Είναι $s^2 - 3s - 10 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \rightarrow s_1 = 5 \rightarrow s_2 = -2$

Άρα $X(s) = \frac{s+7}{(s-5)(s+2)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+2}, \quad \sigma < -2$

$$A = X(s)(s-5) \Big|_{s=5} = \frac{s+7}{(s-5)(s+2)} (s-5) \Big|_{s=5} = \frac{s+7}{s+2} \Big|_{s=5} = \frac{12}{7}$$

$$B = X(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{s+7}{(s-5)(s+2)} (s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{s+7}{s-5} \Big|_{s=-2} = -\frac{5}{7}$$

Άρα $X(s) = \frac{12/7}{s-5} - \frac{5/7}{s+2}, \quad \sigma < -2$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

$\equiv \infty$

$$X(s) = \frac{12/7}{s-5} - \frac{5/7}{s+2}, \quad \underline{\underline{R_x}}$$

$$\begin{aligned} &\bullet \sigma > 5 \\ &\bullet \sigma < 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bullet \sigma > -2 \\ &\bullet \sigma < -2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \{\sigma < 5\} \cap \{\sigma < -2\} = R_x$$

$$\begin{aligned} e^{at}u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a \\ -e^{at}u(-t) &\leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a \end{aligned}$$

Από έστω για Μετ. Laplace

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{12}{7} e^{5t} u(-t) + \frac{5}{7} e^{-2t} u(-t) \\ &= \left(\frac{5}{7} e^{-2t} - \frac{12}{7} e^{5t} \right) u(-t). \end{aligned}$$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}, \sigma > 0$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$$

• 1^η μέθοδος: $X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2j} + \frac{C}{s+2j}, \sigma > 0 = \dots$

• 2^η μέθοδος: Είναι $X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{s} Y(s)$

$$= \frac{Y(s)}{s} \xleftrightarrow{L^{-1}} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \quad (1)$$

Αναζητείται το $y(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = \frac{1}{s^2+4}, \sigma > 0 = \frac{1}{s^2+2^2}, \sigma > 0$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{s^2+2^2}, \sigma > 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2}, \sigma > 0 \xleftrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{2} \underbrace{\sin(2t) u(t)}_{y(t)} \quad (2)$$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα:

Η ① λόγω ② :

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \\ y(t) &= \frac{1}{2} \sin(2t) u(t) \end{aligned} \right\} = \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} \sin(2\tau) u(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned} &1, \tau > 0 \\ &0, \tau < 0 \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2} \sin(2\tau) \cdot 1 d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos(2\tau) \right) \Big|_0^t = -\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos(2t),$$

$t > 0$, άρα

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos(2t) \right) u(t)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

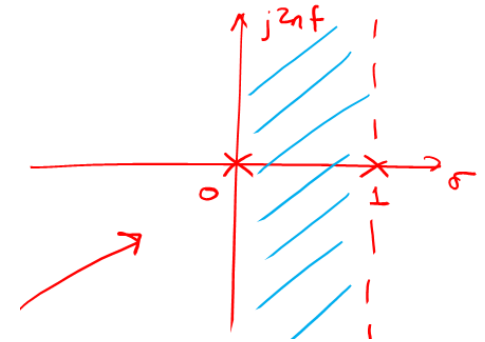
$$\sin(2\pi f_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - s}, \quad \underline{\underline{0 < \sigma < 1}}$$



→ προβλέπαμε ότι το $x(t)$ θα είναι αψευδές!

Δίνω

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 - 1)} = \frac{s^2 + 2}{s(s-1)(s+1)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{\Gamma}{s+1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

$$A = X(s)s \Big|_{s=0} = -2, \quad B = X(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{3}{2}, \quad \Gamma = \frac{3}{2}$$

Άρα

$$X(s) = \frac{-2}{s} + \frac{\frac{3}{2}}{s-1} + \frac{\frac{3}{2}}{s+1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

• Παράδειγμα:

Άρα

$$X(s) = -2 \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{s-1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

Ποιά τα πιθανά πεδία σύγκλισης των επιμέρους κλασμάτων?

$$\bullet \sigma > 0$$

$$\bullet \sigma < 0$$

$$\bullet \sigma > -1$$

$$\bullet \sigma < -1$$

$$\bullet \sigma > 1$$

$$\bullet \sigma < 1$$

Πρέπει να επιλέξουμε τα R_1, R_2, R_3 τέτοια ώστε

$$R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{0 < \sigma < 1\}$$

Άρα τελικά, από πίνακες Fourier:

$$x(t) = -2 \underline{u(t)} + \frac{3}{2} e^{-t} \underline{u(t)} - \frac{3}{2} e^t \underline{u(-t)}$$

Αφαιρεμένο!

(όπως αναφερόταν)

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma > a$$

$$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \sigma < a$$

- **Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής**

- **Θεώρημα Αρχικής Τιμής**

- Προϋποθέσεις

- Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό
- Υπάρχει ο μετασχ. Laplace του, και της παραγώγου του

Τότε ισχύει

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει (είναι πεπερασμένο)

- **Θεώρημα Τελικής Τιμής**

- Προϋποθέσεις

- Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό
- Υπάρχει ο μετασχ. Laplace του, και της παραγώγου του

Τότε ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει (είναι πεπερασμένο)

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

