

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 12^Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier



• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier



- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$
- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$, $A > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = A \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j(2\pi f_0 (t - \tau) + \varphi)} d\tau \\ &= Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau}_{H(f_0)} = AH(f_0) e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \\ &= H(f_0) x(t) \end{aligned}$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το **μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης** για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού
- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και “απλά” πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος ονομάζεται

απόκριση σε συχνότητα

ή

συχνοτική απόκριση

- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

- **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$
- **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως το σύστημα επηρεάζει το πλάτος της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως το σύστημα επηρεάζει τη φάση της εισόδου

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου

- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

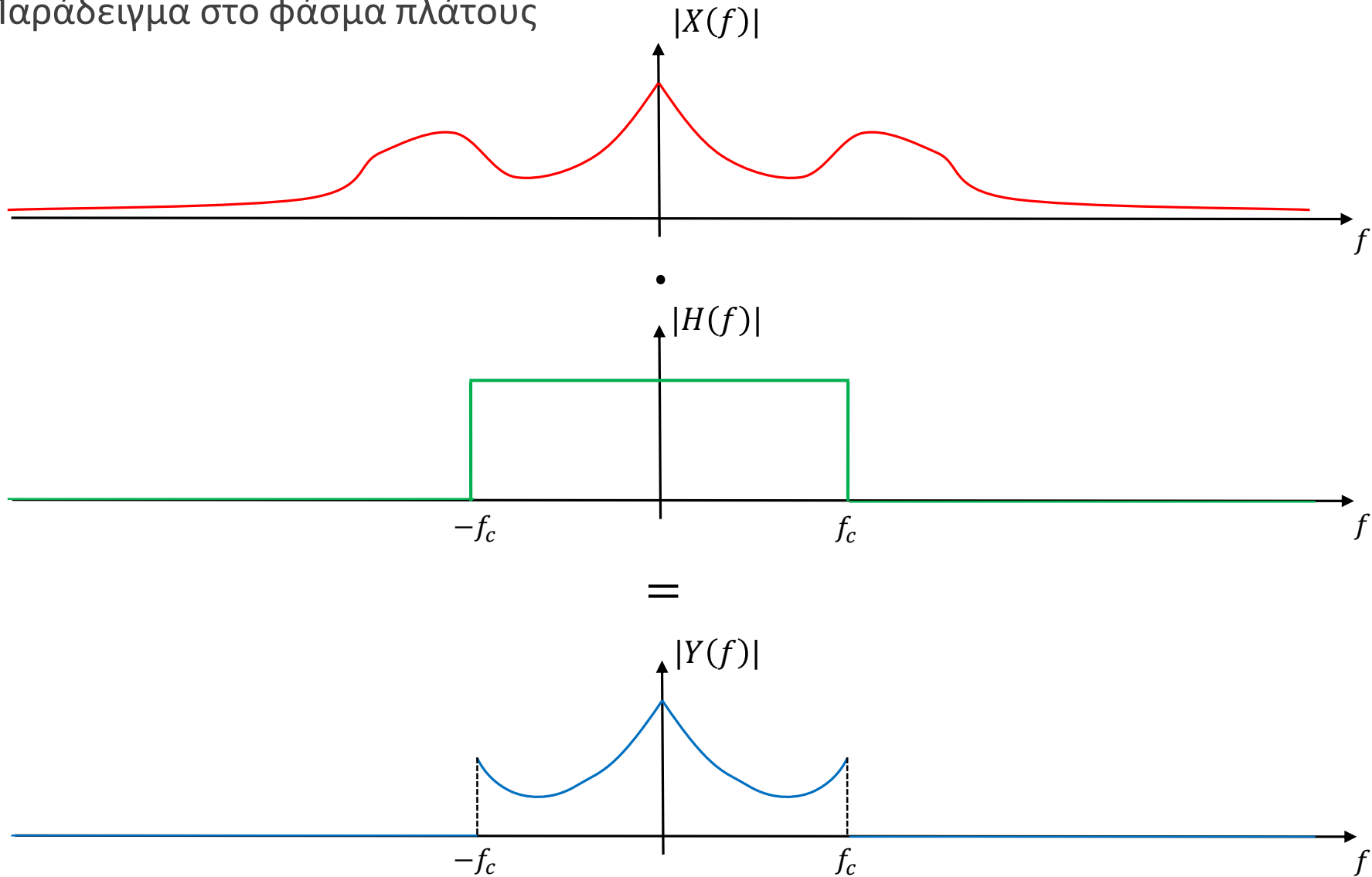
$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

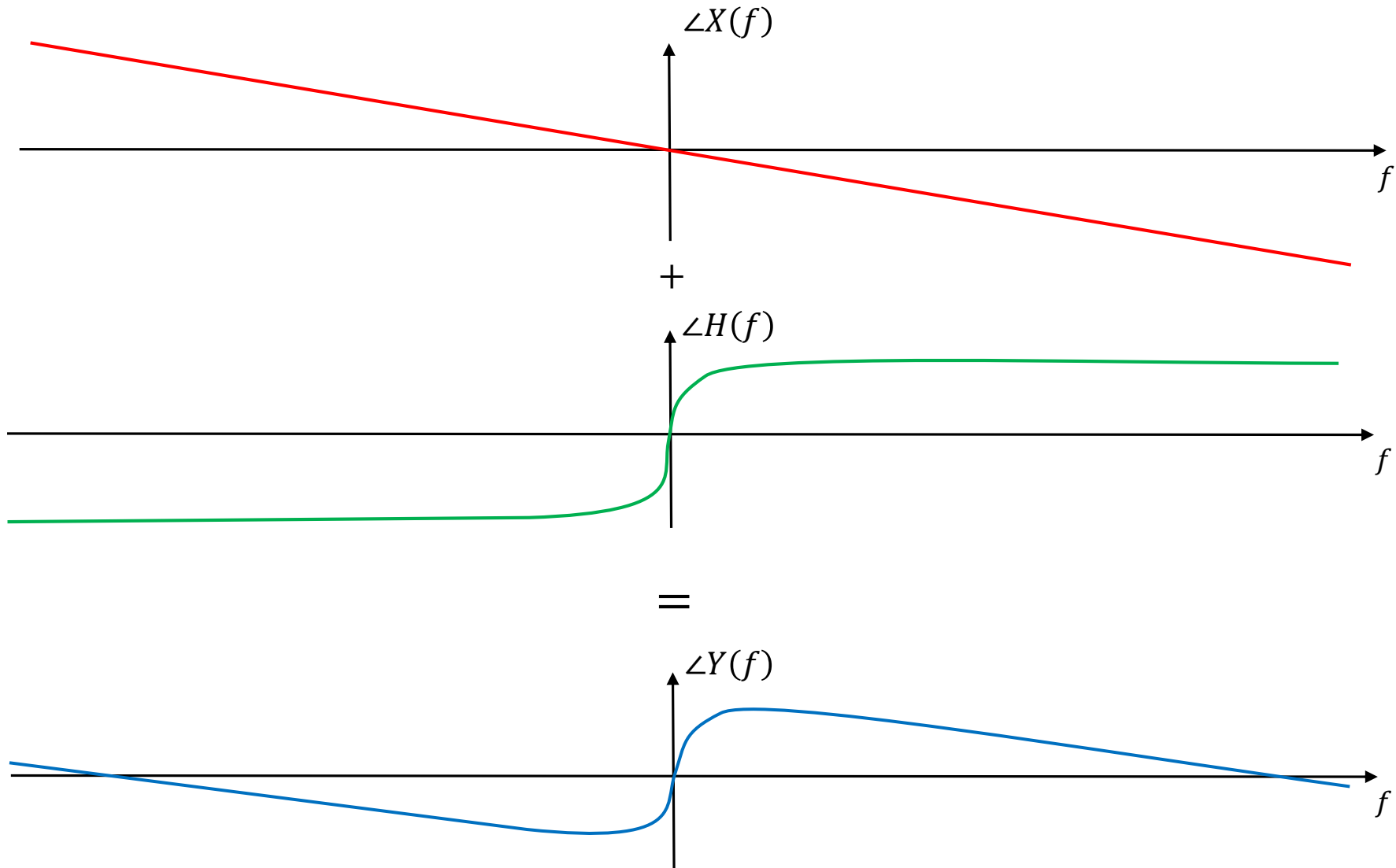
$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier
- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier
- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)| |H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

Ένα σύστημα μπορεί να μειώνει/ενισχύει το πλάτος κάποιων συχνοτήτων και να αλλάζει τη φάση τους

- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
 - Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους
 - Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

- Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας

- ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^N (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^M (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$Y(f) \sum_{i=0}^N (j2\pi f)^i a_i = X(f) \sum_{l=0}^M (j2\pi f)^l b_l \Leftrightarrow \frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i}$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμο του $(j2\pi f)$ και μπορεί – υποθέτοντας απλές ρίζες – να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^M (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (μόνο αν $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

• Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

Είναι

$$y'(t) + 2y(t) = -6x'(t) + 3x(t)$$

$\updownarrow f$

$$(j2\pi f)Y(f) + 2Y(f) = -6j2\pi fX(f) + 3X(f)$$

$$Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6j2\pi f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Διαρύνοντας τα πολυώνυμα

$$\begin{array}{r|l} -\cancel{6}j2\pi f + 3 & j2\pi f + 2 \\ -(-\cancel{6}j2\pi f - 12) & -6 \\ \hline & 15 \end{array}$$

Άρα

$$H(f) = -6 + \frac{15}{2 + j2\pi f}$$

$\updownarrow F^{-1}$

$$h(t) = -6\delta(t) + 15e^{-2t}u(t)$$

από πινακες εταίρων Ισχυών Μετασχ. Fourier.

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα – εναλλακτική λύση:

Όπως με πριν, καταλήγαμε στο $H(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$

$$\text{Είναι } H(f) = \frac{3}{2 + j2\pi f} - j2\pi f \frac{6}{2 + j2\pi f} \quad (1)$$

Ξέραμε ότι $\frac{3}{2 + j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} 3e^{-2t}u(t)$ ⁽³⁾ αλλά πως θα βρούμε τον

A.M.F. του $j2\pi f \frac{6}{2 + j2\pi f}$? Από την ιδιότητα της παραγωγής!

$$\text{Έστω } Y(f) = j2\pi f \frac{6}{2 + j2\pi f} = j2\pi f Z(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} y(t) = \frac{d}{dt} z(t)$$

$$\text{Το } z(t) = F^{-1} \left\{ \frac{6}{2 + j2\pi f} \right\} = 6e^{-2t}u(t). \text{ Άρα } y(t) = \frac{d}{dt} 6e^{-2t}u(t)$$

$$= 6 \cdot (e^{-2t})' u(t) + 6e^{-2t} u'(t) = -12e^{-2t}u(t) + 6e^{-2t} \delta(t)$$

$$= -12e^{-2t}u(t) + 6\delta(t) \quad (2)$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα – **εναλλακτική λύση**:

Από τις (1), (2), (3) θα έχουμε

$$H(f) = \frac{3}{2+j2\pi f} - j2\pi f \frac{6}{2+j2\pi f}$$

$\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$

$$\begin{aligned} h(t) &= 3e^{-2t}u(t) - (-12e^{-2t}u(t) + 6\delta(t)) \\ &= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t) \end{aligned}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό απεριοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
 - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
- Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

Συνέλιξη στο χρόνο $\leftrightarrow$ Γινόμενο στη συχνότητα

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις του $j2\pi f$, τότε (υποθέτοντας απλές ρίζες)

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{l=0}^K d_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^L c_i (j2\pi f)^i} \\ &= \frac{\prod_{l=1}^M (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{l=1}^K (j2\pi f + m_l)}{\prod_{i=1}^L (j2\pi f + q_i)} \end{aligned}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

• Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Είναι

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{F} H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$

$$x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} + \frac{1}{2 + j2\pi f}$$

$$= \frac{5 + 3j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)}$$

Οότες

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = \frac{\overbrace{5 + 3j2\pi f}^{\omega} \rightarrow 1^{\text{ος}} \text{ } \beta}{\underbrace{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)}_{3^{\text{ος}} \text{ } \beta}}$$

$$= \frac{A}{1 + j2\pi f} + \frac{B}{2 + j2\pi f} + \frac{\Gamma}{3 + j2\pi f}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$A = Y(f)(1 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -1} = \frac{5 + 3j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -1} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Όφεια, $B = 1$, $\Gamma = -2$. Άρα

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} + \frac{-2}{3+j2\pi f}$$

Από πίνακες έστω των μετασχηματισμών Fourier

$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

$$= (e^{-t} + e^{-2t} - 2e^{-3t})u(t).$$

$$\left\{ e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j2\pi f}, \right.$$

$a > 0$

• Συστήματα και Σειρές Fourier

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
 - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
- Το περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Αναπτύσσεται δηλαδή σε άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων του ΓΧΑ συστήματος! ☺
- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k f_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

και αν το σύστημα $h(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$y(t) = H(0)X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|H(k f_0)||X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(k f_0))$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

$$f_0 = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}$$

Βρείτε την έξοδό του όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα

$$x(t) = 3 + 2 \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) = 3 + 2 \cos\left(2\pi \cdot \frac{2}{\pi} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

As υπολογίσουμε πρώτα το $H(f)$.

Είναι

$$y'(t) + 3y(t) = x(t)$$

$\Downarrow F$

$$j2\pi f Y(f) + 3Y(f) = X(f)$$

$$Y(f)(3 + j2\pi f) = X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t) = e^{-3t} u(t).$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

$$\text{Άρα } H\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{3+j2n \cdot \frac{2}{n}} = \frac{1}{3+j4} \quad \text{και} \quad H(0) = \frac{1}{3} \quad \textcircled{A}$$

$$\leadsto |H\left(\frac{2}{n}\right)| = \frac{1}{|3+j4|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} \quad \textcircled{\Gamma}$$

$$\leadsto \angle H\left(\frac{2}{n}\right) = \tan^{-1} \frac{H_I(2/n)}{H_R(2/n)} \quad \textcircled{1}, \text{ οπότε } \frac{1}{3+j4} = \frac{3-j4}{|3+j4|^2} =$$

$$= \frac{3-j4}{25} = \frac{3}{25} + j \frac{-4}{25} = H_R\left(\frac{2}{n}\right) + j H_I\left(\frac{2}{n}\right) \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \xRightarrow{\textcircled{2}} \angle H\left(\frac{2}{n}\right) = \tan^{-1} \frac{\frac{-4}{25}}{\frac{3}{25}} = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \approx -0.92 \text{ rad} \quad \textcircled{B}$$

Άρα από τα $\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{\Gamma}$ θα έχουμε

$$y(t) = \cancel{\frac{3}{B}} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cos\left(4t + \frac{n}{3} - 0.92\right) = 1 + \frac{2}{5} \cos\left(4t + \frac{n}{3} - 0.92\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για να επιτύχουμε όλα τα ωραία αποτελέσματα που βρήκαμε πριν, υποθέσαμε ότι η **απόκριση συχνότητας $H(f)$ ορίζεται**

- Ισχύουν οι γνωστές απαιτήσεις για την ύπαρξη της, όπως τις γνωρίσαμε στη μελέτη του Μετασχ. Fourier

- Η κρουστική απόκριση να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (μη αναγκαία συνθήκη)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

- Η κρουστική απόκριση να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt < \infty$$

- Αν δε γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση τότε μπορούμε να ξέρουμε αν ένα σύστημα που **εκφράζεται από διαφορικές εξισώσεις** έχει απόκριση συχνότητας?

- Αν δεν έχει, τότε **ΔΕΝ** μπορούμε να γράψουμε τα ωραία αποτελέσματα που είδαμε πριν

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Θυμηθείτε ότι, για ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα, μια τέτοια κρουστική απόκριση αποτελείται από όρους της μορφής

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), \quad c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη μόνον όταν

$$\lambda_i < 0, \text{ αν } \lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ για κάθε } i$$



Ελέγξτε ΟΛΑ τα προηγούμενα παραδείγματα στη διάλεξη αυτή!!

- Αυτό θα σημαίνει ότι τότε θα **υπάρχει** και ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης (μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος του ορισμού)! 😊

- Αυτό ταυτόχρονα συνεπάγεται ότι το ΓΧΑ σύστημα είναι **ευσταθές**!

- Συνοψίζοντας: ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις μπορεί να γραφεί στο χώρο του Μετασχ. Fourier αν και μόνο αν το σύστημα είναι **ευσταθές**!

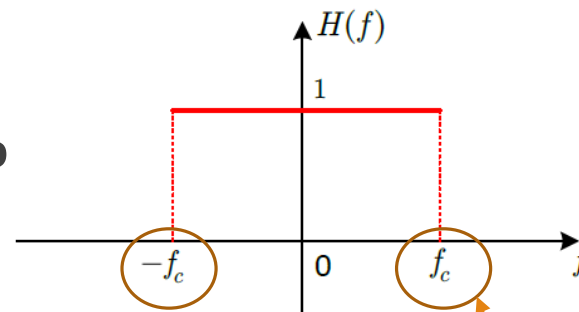
- Θα εξετάσουμε μη αιτιατά/μη ευσταθή συστήματα αργότερα

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

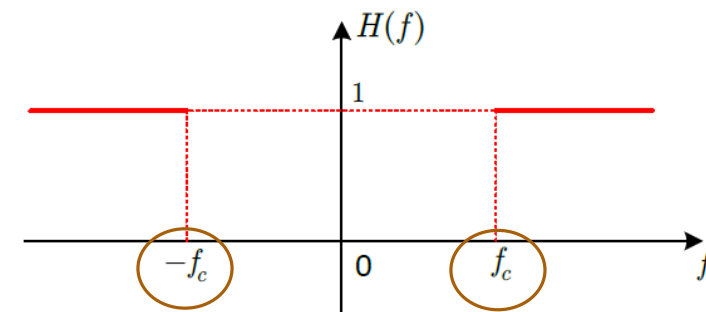
- Συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση μόνο ορισμένων συχνοτήτων στην έξοδό τους ονομάζονται **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**
- Θα μελετήσουμε τα **ιδανικά** φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (μηδενικής φάσης)
 - Ιδανικά : μη πραγματοποιήσιμα (θεωρητικά μοντέλα)

- Τέσσερις κατηγορίες

- Χαμηλοπερατό φίλτρο



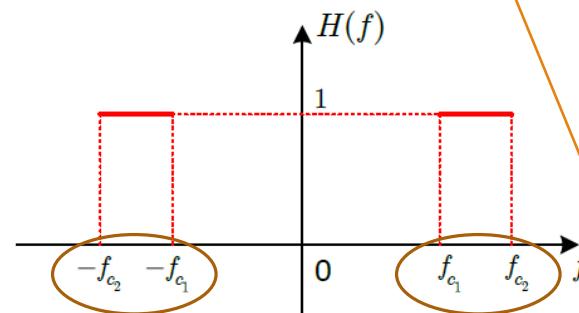
(α) Χαμηλοπερατό



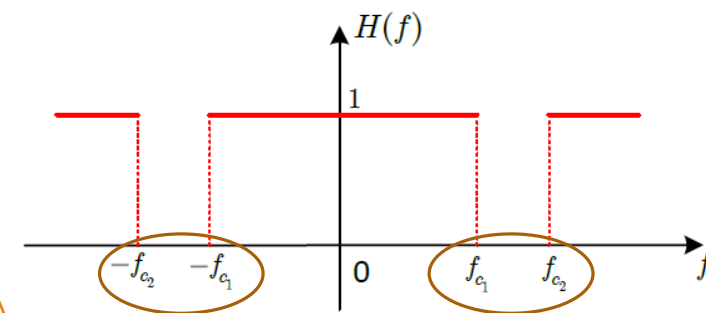
(β) Υψηλοπερατό

- Υψηλοπερατό φίλτρο

- Ζωνοπερατό φίλτρο



(γ) Ζωνοπερατό

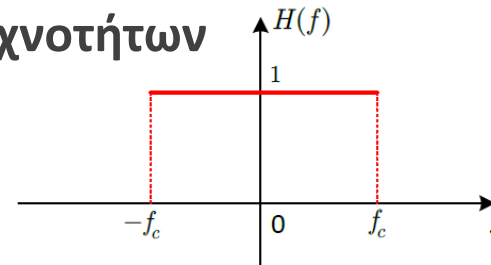


(δ) Ζωνοφρακτικό

- Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Συχνότητα αποκοπής

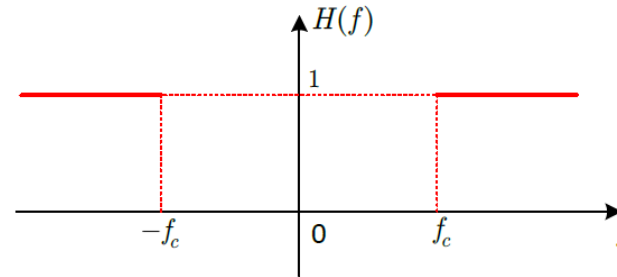
- Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων
- Χαμηλοπερατό φίλτρο



(α) Χαμηλοπερατό

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_c \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

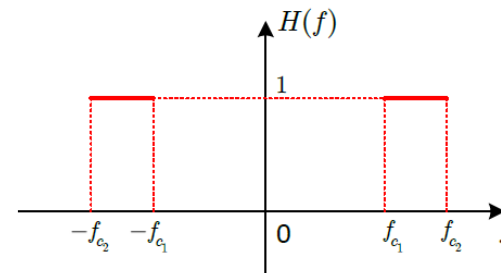
- Υψιπερατό φίλτρο



(β) Υψιπερατό

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| > f_c \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

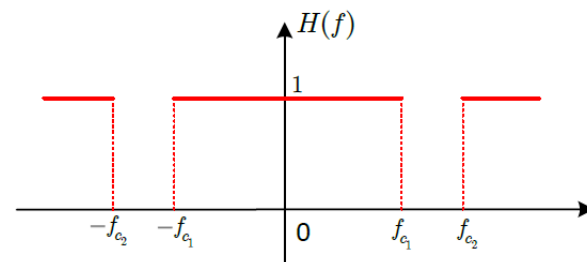
- Ζωνοπερατό φίλτρο



(γ) Ζωνοπερατό

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_{c1} < |f| < f_{c2} \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

- Ζωνοφρακτικό φίλτρο



(δ) Ζωνοφρακτικό

$$H(f) = \begin{cases} 0, & f_{c1} < |f| < f_{c2} \\ 1, & \text{αλλου} \end{cases}$$

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο
- Από την ιδιότητα της δυϊκότητας

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \operatorname{sinc}(fT)$$

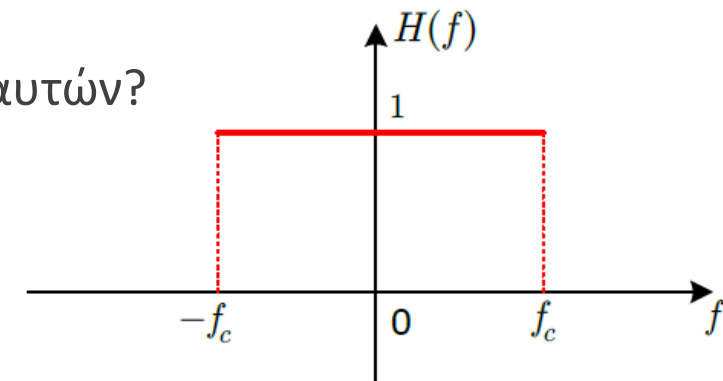
$$AT \operatorname{sinc}(Tt) \leftrightarrow A \operatorname{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = A \operatorname{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

- Για $A = 1, T = 2f_c$

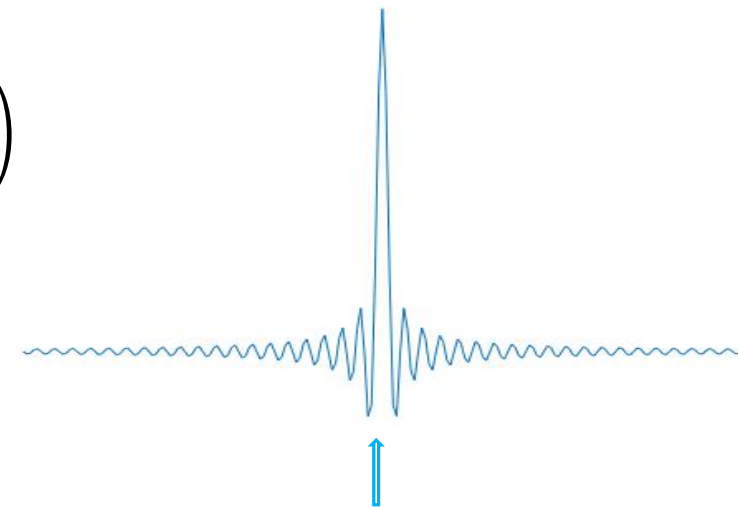
$$2f_c \operatorname{sinc}(2f_c t) \leftrightarrow \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

- Άρα

$$h_{LP}(t) = 2f_c \operatorname{sinc}(2f_c t) \leftrightarrow H_{LP}(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$



(α) Χαμηλοπερατό



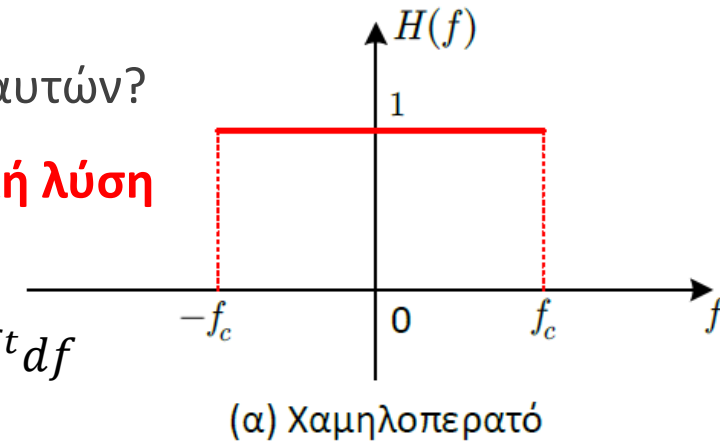
Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?

• Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο – **εναλλακτική λύση**



$$h_{LP}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{LP}(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) e^{j2\pi f t} df$$

$$= \int_{-f_c}^{f_c} 1 \cdot e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{j2\pi t} \left(e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t} \right) \Big|_{-f_c}^{f_c}$$

$$= \frac{1}{j2\pi t} \left(e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t} \right) = \frac{1}{j2\pi t} 2j \sin(2\pi f_c t)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} = 2f_c \frac{\sin(\pi 2f_c t)}{\pi 2f_c t} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t)$$

• Άρα

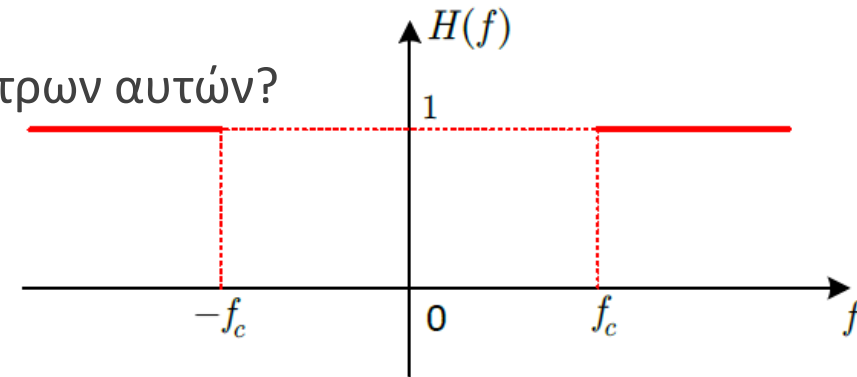
$$h_{LP}(t) = 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \leftrightarrow H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας δούμε το υψιπερατό φίλτρο
- Από δυϊκότητα και γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier



(β) Υψιπερατό

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

οπότε

$$F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = F^{-1}\{1\} - F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)\right\}$$

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2f_c \text{sinc}(2f_c t)$$

- Άρα

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \leftrightarrow H_{HP}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

Κρουστική απόκριση

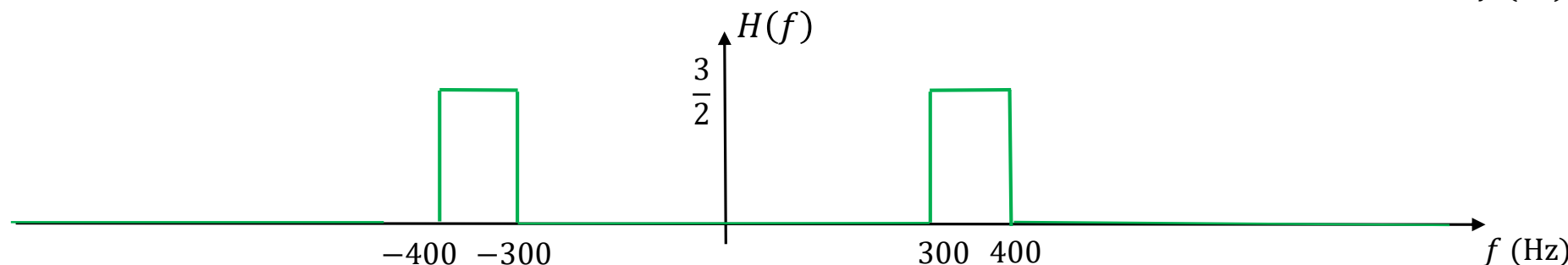
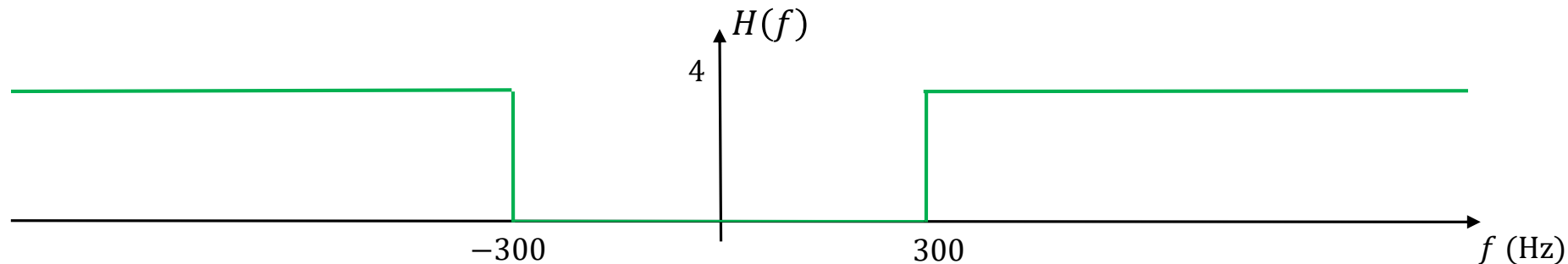
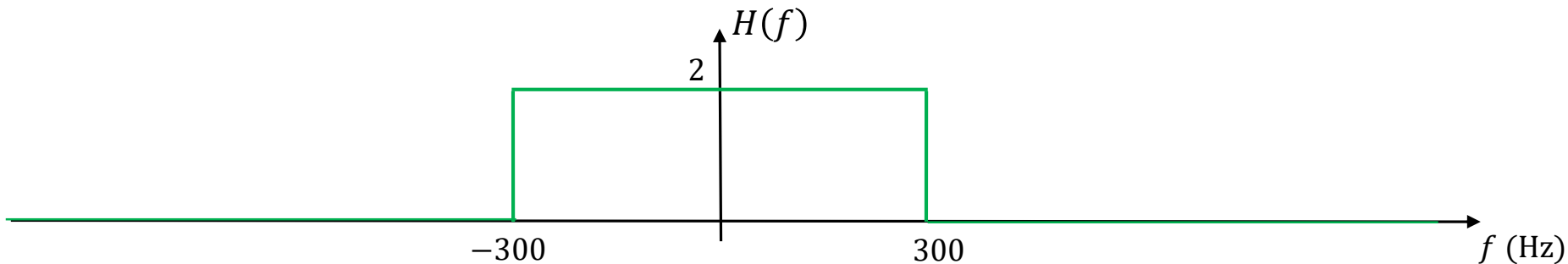
- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)
- Μην αναφέρουμε καν τη $\delta(t)$... ☺

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

• Παράδειγμα:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?



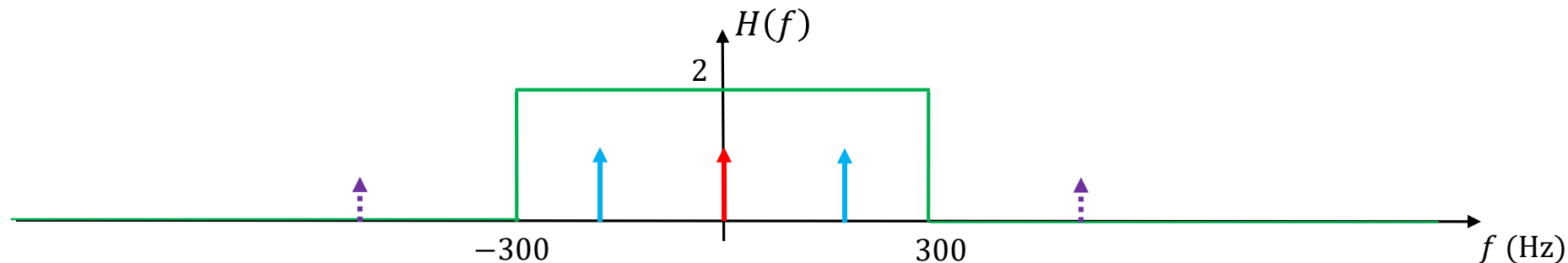
• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

• Παράδειγμα:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f - 200) + \delta(f + 200) + \frac{1}{2j} \delta(f - 500) - \frac{1}{2j} \delta(f + 500)$$



$$Y(f) = 2 \cdot \delta(f) + 2 \cdot \delta(f - 200) + 2 \cdot \delta(f + 200) + 0 \cdot \frac{1}{2j} \delta(f - 500) - 0 \cdot \frac{1}{2j} \delta(f + 500)$$

$$y(t) = 2 + 4\cos(2\pi 200t)$$

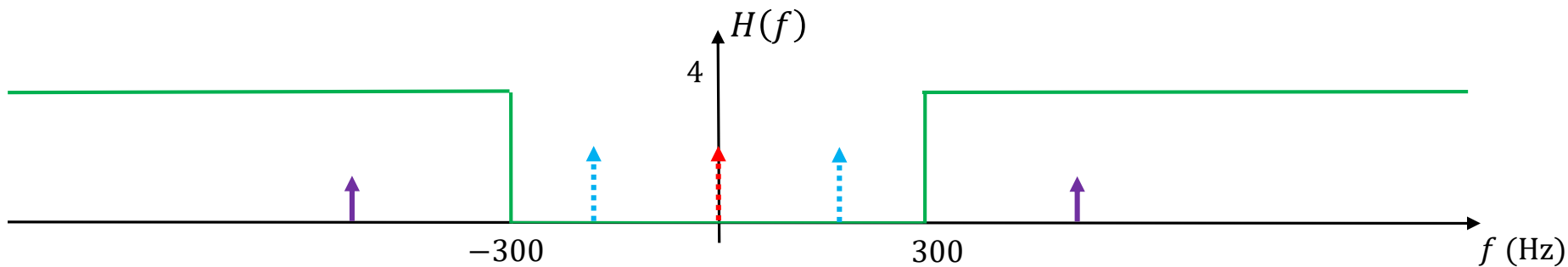
• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

• Παράδειγμα:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f - 200) + \delta(f + 200) + \frac{1}{2j} \delta(f - 500) - \frac{1}{2j} \delta(f + 500)$$



$$Y(f) = 0 \cdot \delta(f) + 0 \cdot \delta(f - 200) + 0 \cdot \delta(f + 200) + 4 \cdot \frac{1}{2j} \delta(f - 500) - 4 \cdot \frac{1}{2j} \delta(f + 500)$$

$$y(t) = 4 \sin(2\pi 500t)$$

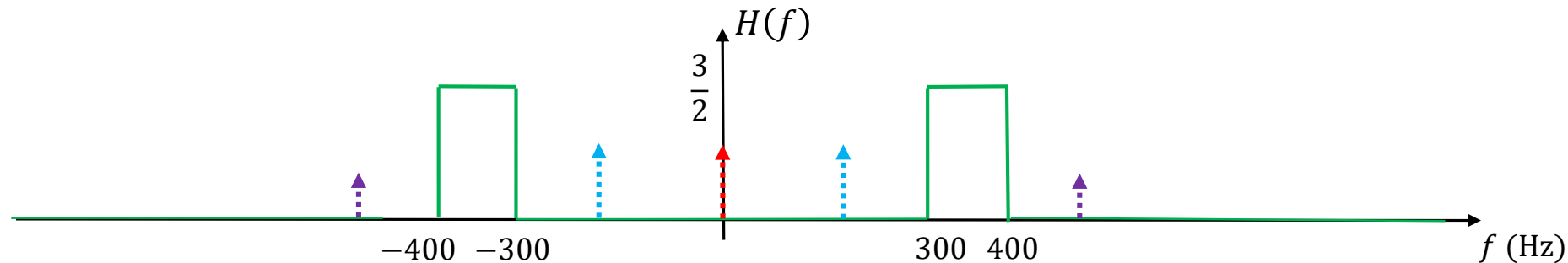
• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

• Παράδειγμα:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f - 200) + \delta(f + 200) + \frac{1}{2j} \delta(f - 500) - \frac{1}{2j} \delta(f + 500)$$



$$Y(f) = 0 \cdot \delta(f) + 0 \cdot \delta(f - 200) + 0 \cdot \delta(f + 200) + 0 \cdot \frac{1}{2j} \delta(f - 500) - 0 \cdot \frac{1}{2j} \delta(f + 500)$$

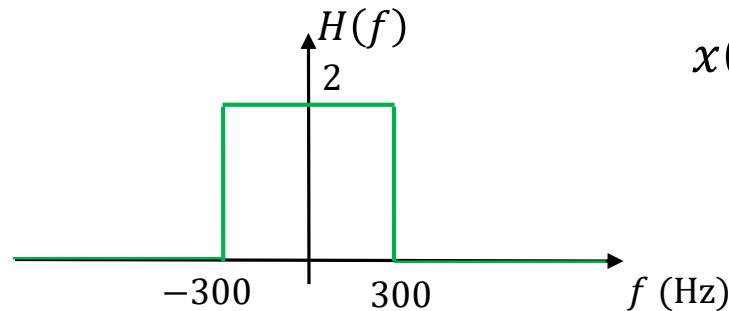
$$y(t) = 0$$

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Παράδειγμα – Εναλλακτική λύση

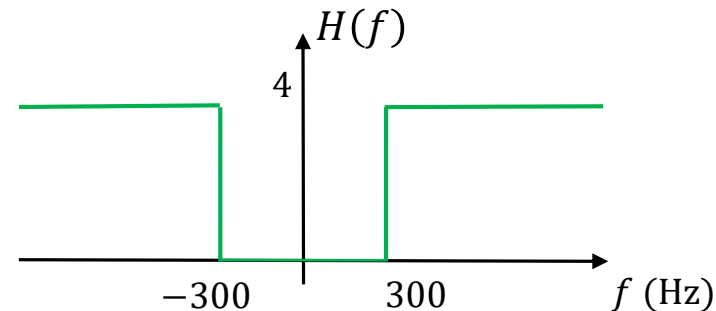
○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$f_0 = \text{ΜΚΔ}\{200, 500\} = 100 \text{ Hz}$$

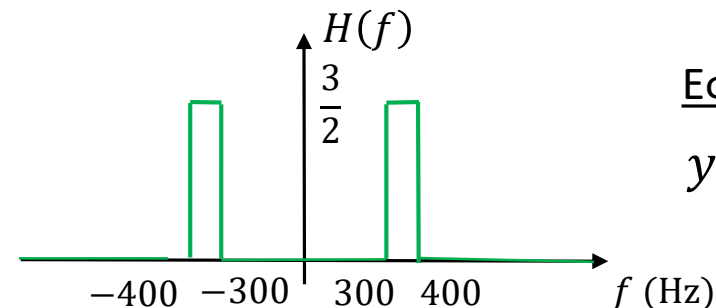


$$x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi(2 \cdot 100)t) + \sin(2\pi(5 \cdot 100)t)$$

$$H(f) = \begin{cases} 2, & |f| < 300 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$H(f) = \begin{cases} 4, & |f| > 300 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

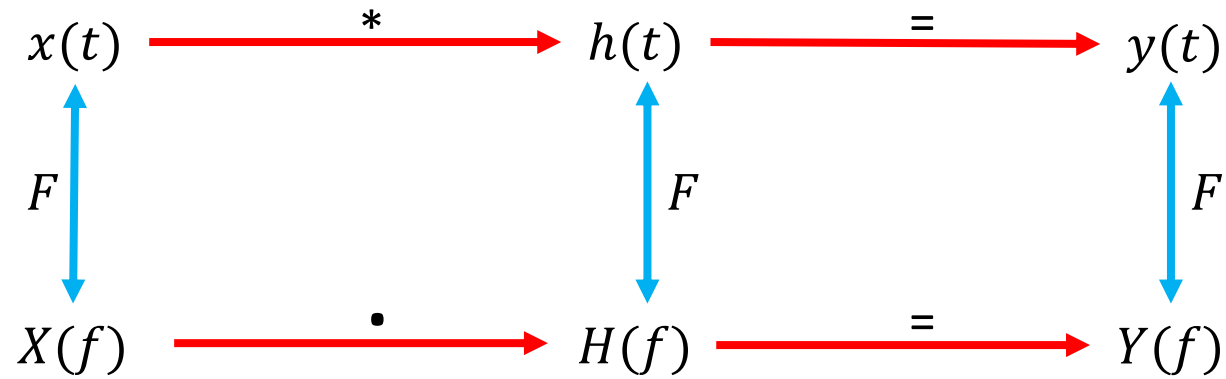


$$H(f) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & 300 < |f| < 400 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση εξόδου για περιοδική είσοδο (sl.13):

$$y(t) = 1 \cdot H(0) + 2H(2 \cdot 100) \cos(2\pi(2 \cdot 100)t) + H(5 \cdot 100) \sin(2\pi(5 \cdot 100)t)$$

- Συστήματα στο χώρο του Fourier
- Σύνοψη:



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

