

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 11^Η

- Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος



- **Μετασχηματισμός Fourier και Σήματα Ισχύος**
- Ο μετασχ. Fourier είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο ανάλυσης **απεριοδικών** σημάτων
- Μήπως θα μπορούσαμε να βάλουμε «κάτω από την ομπρέλα» του και άλλες κατηγορίες σημάτων?
- **Π.χ. Σήματα ισχύος?**
 - Δηλ. περιοδικά και απεριοδικά σήματα ισχύος
- Μα τα σήματα ισχύος **ΔΕΝ** έχουν μετασχ. Fourier!!
- Το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού **ΔΕ** συγκλίνει ομοιόμορφα (για κάθε f) για αυτήν την κατηγορία σημάτων
- Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier σε συνδυασμό με συναρτήσεις Δέλτα για να περιγράψουμε συχνοτικά ΚΑΙ τέτοιου είδους σήματα (ισχύος)!! 😊
- Αρχικά θα περιγράψουμε με όρους μετασχ. Fourier **περιοδικά σήματα που αναπτύσσονται σε σειρά Fourier!**
- Μετά θα δούμε μια τεχνική που μπορεί να περιγράψει συχνοτικά ΚΑΙ **απεριοδικά σήματα ισχύος**, όπως η βηματική συνάρτηση! 😊

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το Μ.Φ. ενός απλού ημιτόνου $\cos(2\pi f_0 t)$

- Θα είναι

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται (δε συγκλίνουν για κάθε f)

$$= \frac{1}{2} F\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2} F\{e^{-j2\pi f_0 t}\}$$

- Όμως ξέρουμε ότι

$$e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f \mp f_0)$$

- Οπότε

$$\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

- Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, και αφού μπορούμε να περιγράψουμε “κάθε” περιοδικό σήμα ως μια Σειρά Fourier, θα έχουμε

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_0)$$

- Όμως πάλι χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε το X_k για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω
 - Κάτι που είναι «επίπονο»... 😊

• Μπορούμε άραγε να βρούμε τους συντελεστές Fourier πιο εύκολα?

- Μέσω του Μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος ίσως?
- Στο παραπάνω θα μας βοηθήσει η γνωστή μας σχέση από τις σειρές Fourier

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ο μετασχ. Fourier της τελευταίας σχέσης θα είναι

$$\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta(f - k f_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right)$$

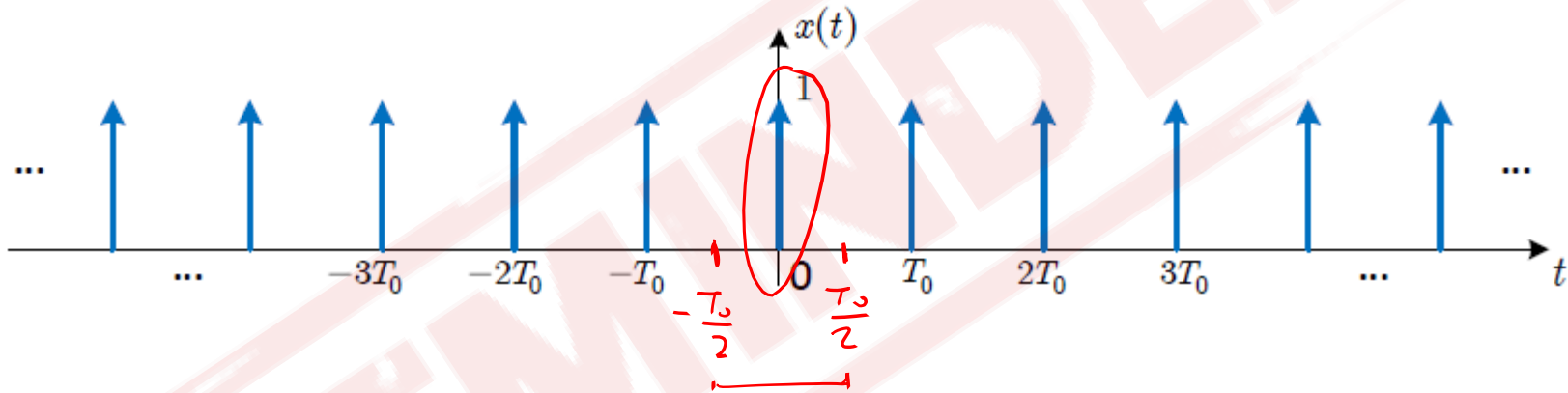
$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Παράδειγμα:

Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) f(t) dt = f(\mp t_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

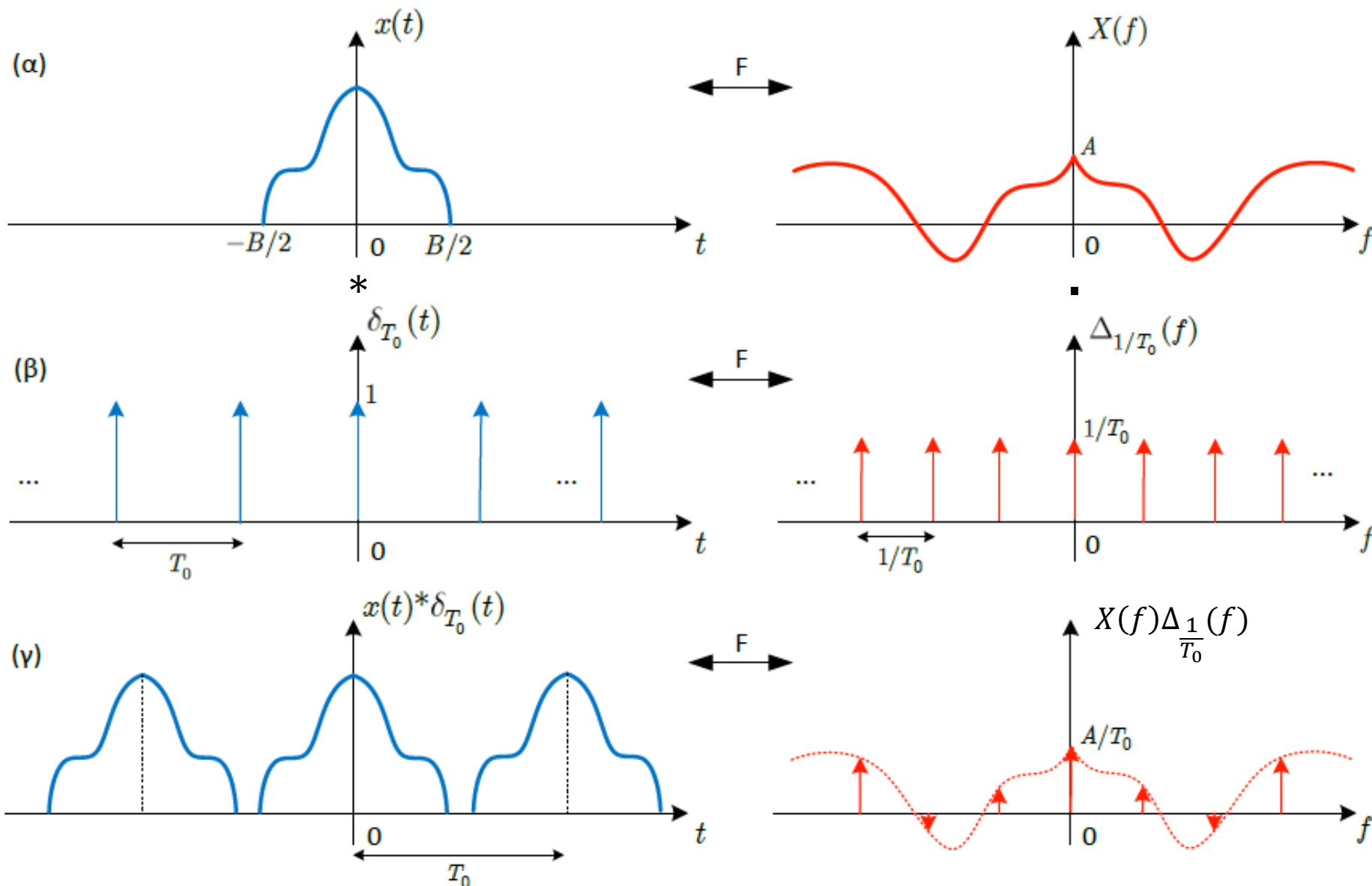


Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

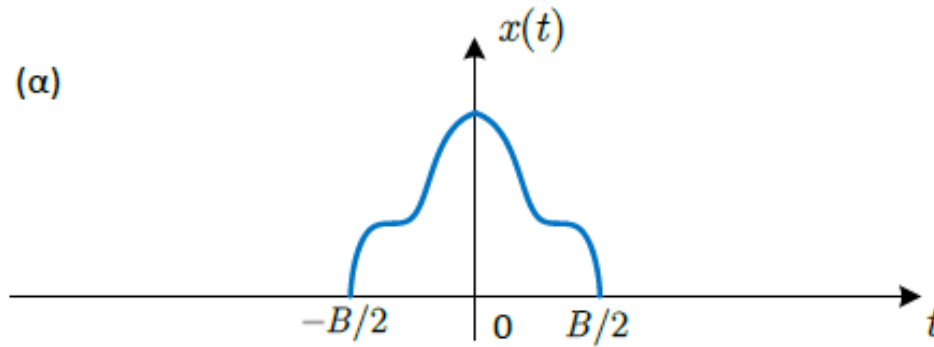
$$\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0} e^0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow \boxed{X_k = \frac{1}{T_0}}$$

Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

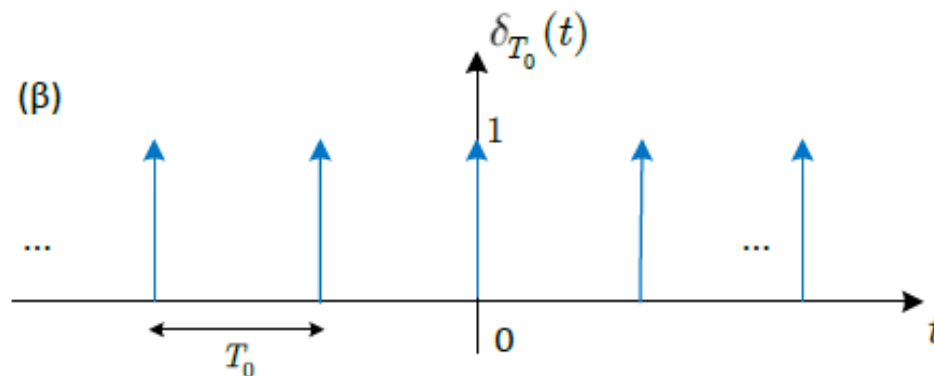


• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

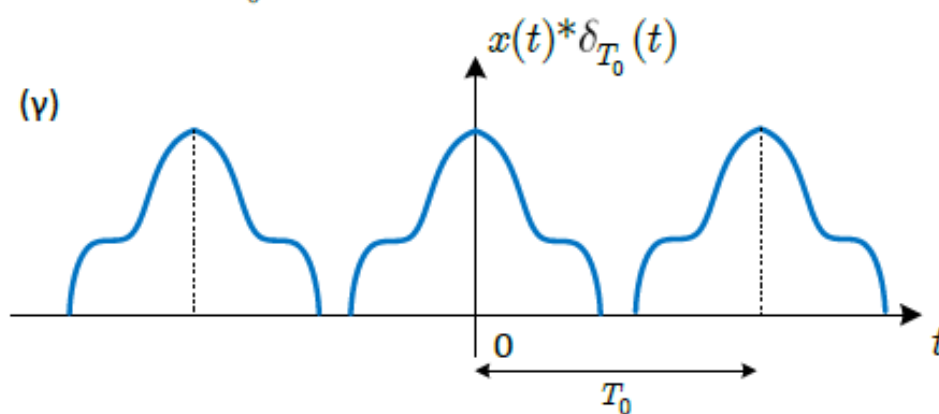
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$



$x(t)$



$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



$$\begin{aligned} x(t) * \delta_{T_0}(t) &= x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - kT_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) \end{aligned}$$

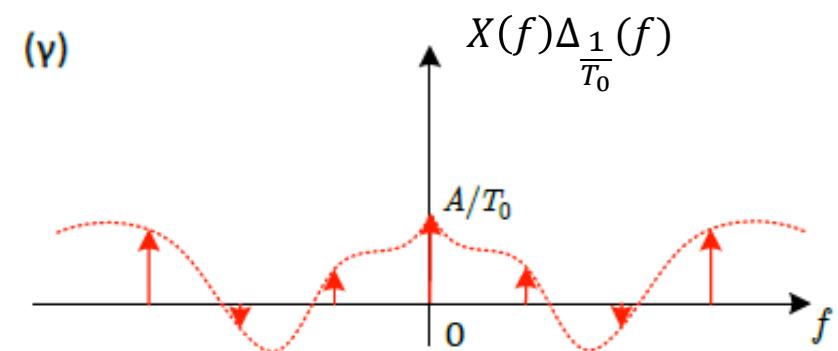
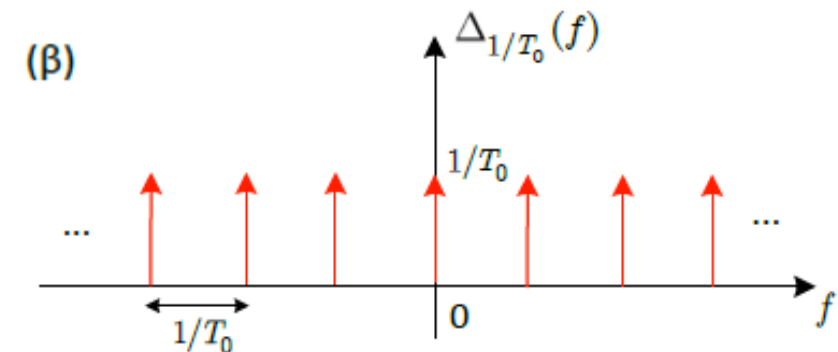
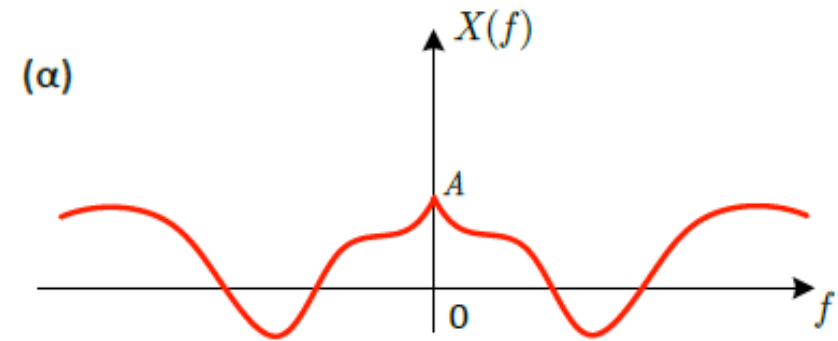
• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

$$X(f)\delta(f - f_0) = X(f_0)\delta(f - f_0)$$

$X(f)$

$$\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right)$$

$$\begin{aligned} X(f)\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) &= X(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(f) \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(k \frac{1}{T_0}\right) \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right) \end{aligned}$$



• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

• Άρα αφού

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{X_k} \delta(f - k f_0)$$

και

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) \leftrightarrow X_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T_0}} \mathbf{X} \left(\mathbf{k \frac{1}{T_0}} \right) \delta \left(f - k \frac{1}{T_0} \right)$$

οι συντελεστές Fourier μπορούν να προκύψουν από το Μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0} X \left(\frac{k}{T_0} \right)$$

δηλ. **αρκεί να δειγματοληπτήσουμε το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος ανά $\frac{k}{T_0}$ και ό,τι προκύψει να το πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{T_0}$!!!!**

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Συνοψίζοντας:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

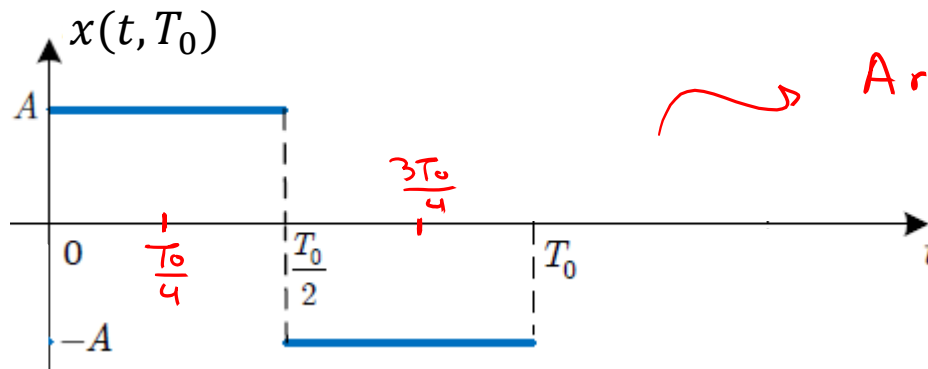
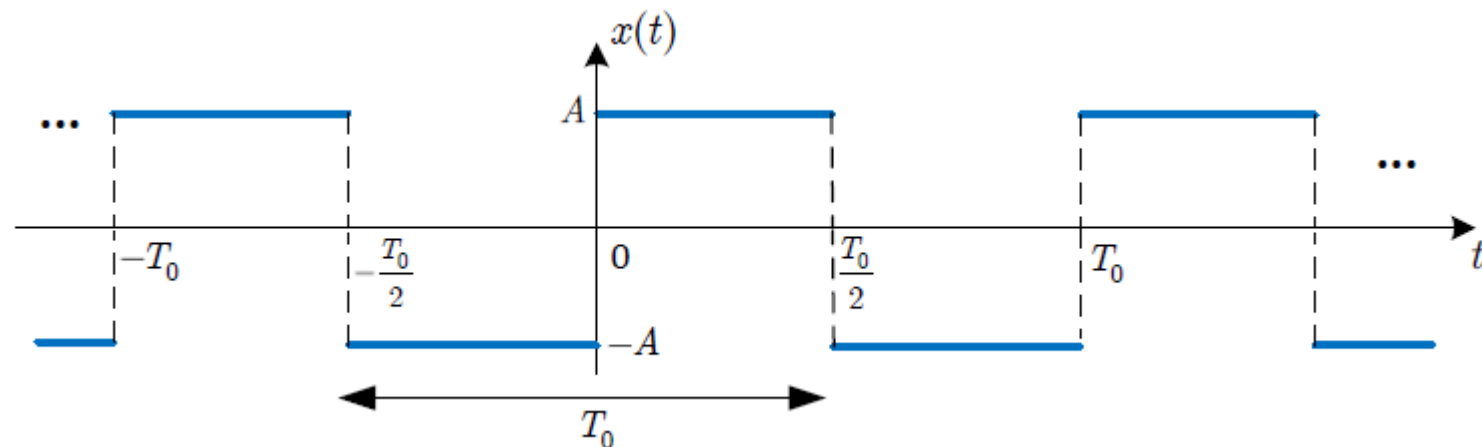
- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε μια περίοδο του σήματος $x(t)$ (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: $f = kf_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

- Παράδειγμα:** υπολογίστε τους συντελεστές Fourier για το περιοδικό σήμα με τιμές $\{A, -A\}$ που αναλύσατε στις διαφάνειες των Σειρών Fourier και δείξτε ότι ισούνται με

$$X_k = \frac{A}{\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-\frac{j\pi}{2}}, \quad k \neq 0$$



$$\text{Area} \left(\frac{t - \frac{T_0}{4}}{T_0/2} \right) - \text{Area} \left(\frac{t - \frac{3T_0}{4}}{T_0/2} \right)$$



ΜΙΑ περίοδος του περιοδικού σήματος

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Το σήμα μιας περιόδου του περιοδικού σήματος γράφεται ως

$$x(t) = A \operatorname{rect} \left(\frac{t - \frac{T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}} \right) - A \operatorname{rect} \left(\frac{t - \frac{3T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}} \right)$$

π.ε. μετασχ. Fourier

$$\begin{aligned} X(f) &= A \frac{T_0}{2} \operatorname{sinc} \left(f \frac{T_0}{2} \right) e^{-j 2\pi f \frac{T_0}{4}} - A \frac{T_0}{2} \operatorname{sinc} \left(f \frac{T_0}{2} \right) e^{-j 2\pi f \frac{3T_0}{4}} \\ &= \frac{AT_0}{2} \operatorname{sinc} \left(f \frac{T_0}{2} \right) \left(e^{-j \pi f \frac{T_0}{2}} - e^{-j 3\pi f \frac{T_0}{2}} \right) \\ &= \frac{AT_0}{2} \operatorname{sinc} \left(f \frac{T_0}{2} \right) e^{-j \pi f T_0} \left(e^{j \pi f \frac{T_0}{2}} - e^{-j \pi f \frac{T_0}{2}} \right) \\ &= \frac{AT_0}{2} \operatorname{sinc} \left(f \frac{T_0}{2} \right) e^{-j \pi f T_0} \cancel{2j} \sin \left(\pi f \frac{T_0}{2} \right) \\ &= j AT_0 e^{-j \pi f T_0} \operatorname{sinc} \left(f \frac{T_0}{2} \right) \sin \left(\pi f \frac{T_0}{2} \right) \end{aligned}$$

Άρα

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{T_0} j AT_0 e^{-j \pi \frac{k}{T_0} T_0} \operatorname{sinc} \left(\frac{k}{T_0} \frac{T_0}{2} \right) \sin \left(\pi \frac{k}{T_0} \frac{T_0}{2} \right)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

$$= j A e^{-j\pi k} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \quad (1)$$

$$\bullet e^{-j\pi k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k \quad (2)$$

$$\bullet \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi k}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi k}{2}} =$$

$$= \frac{\pi k}{2} \cdot \left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2} \right) = \frac{\pi k}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\text{Οπώς} \quad \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ \frac{4}{\pi^2 k^2}, & k \text{ περιττή} \end{cases} = \frac{2}{\pi^2 k^2} (1 - (-1)^k), \quad \forall k$$

$$\text{άρα} \quad \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \cancel{\frac{\pi k}{2}} \cdot \cancel{\frac{2}{\pi^2 k^2}} (1 - (-1)^k) = \frac{1}{\pi k} (1 - (-1)^k). \quad (3)$$

Η (1) λόγω (2),(3) δίνει

$$X_k = j A (-1)^k \frac{1}{\pi k} (1 - (-1)^k)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

$$= j A \frac{1}{\pi k} \left((-1)^k - (-1)^{2k} \right)$$

$$= j \frac{A}{\pi k} \left((-1)^k - 1 \right)$$

$$= -j \frac{A}{\pi k} \left(1 - (-1)^k \right)$$

$$= \frac{A}{\pi k} \left(1 - (-1)^k \right) e^{-j \frac{n}{2}}$$

ΟΚ, ήταν πιο δύσκολο από,τι έπρεπε ☺ Σε αυτό ίσως έφταιξε η επιλογή της περιόδου που κάναμε. Επαναλάβετε το παράδειγμα στο σπίτι επιλέγοντας ως περίοδο το κομμάτι του περιοδικού σήματος στο $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right]$ και ελέγξτε αν το αποτέλεσμα προκύπτει πιο εύκολα.

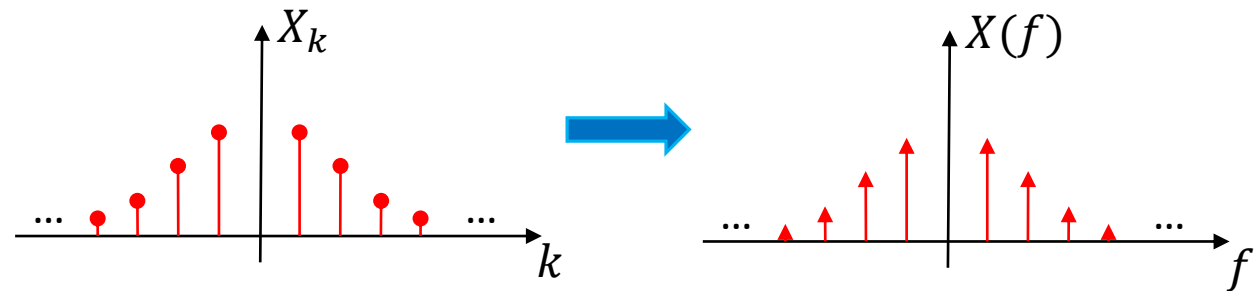
• Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος – Review ως τώρα

• Ερώτηση: μπορούμε να βάλουμε «κάτω από την ομπρέλα» του μετασχ. Fourier και σήματα που δεν «έχουν» μετασχ. Fourier?

• Για **περιοδικά** σήματα που αναπτύσσονται σε σειρά Fourier, είναι απλό! ☺

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_0)$$

χρησιμοποιώντας το ζεύγος $e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$



• Side-αποτέλεσμα:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}}$$

με $X(f, T_0)$ ο μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου του περιοδικού σήματος

• Και όσον αφορά τα **απεριοδικά** σήματα ισχύος??

- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**
- Γνωρίζουμε ότι τα σήματα ισχύος δεν είναι απολύτως ή τετραγωνικώς ολοκληρώσιμα, οπότε δεν έχουν Μετασχ. Fourier
- Μπορούμε άραγε να εκμεταλλευτούμε τη χρήση «ιδιαίτερων» συναρτήσεων όπως η συνάρτηση Δέλτα για να βρούμε μια τέτοια έκφραση?
- Μπορούμε να γράψουμε ένα **απεριοδικό** σήμα **ισχύος** ως

$$x(t) = x_0 + x_z(t)$$

με

☐ x_0 τη μέση τιμή του σήματος (αριθμός)

$$x_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

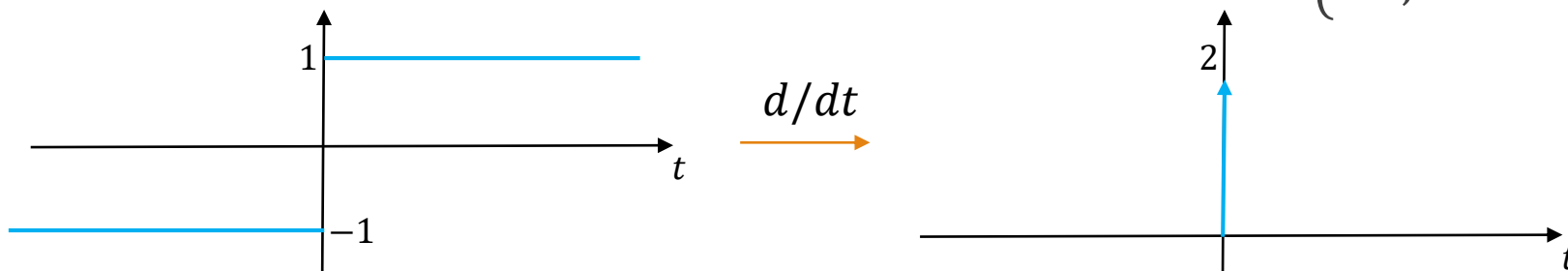
☐ $x_z(t)$ το υπόλοιπο σήμα μηδενικής μέσης τιμής, $x_z(t) = x(t) - x_0$

- Τότε

$$X(f) = x_0 \delta(f) + X_z(f)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

- Ως παράδειγμα, για το μετασχ. Fourier του σήματος $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$



- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x_0 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{sgn}(t) dt = 0$$

- Άρα

$$\text{sgn}(t) = \hat{x}(t) = 0 + x_z(t) \leftrightarrow \hat{X}(f) = 0 \cdot \delta(f) + X_z(f) = X_z(f)$$

- Παραγωγίζοντας το σήμα έχουμε

$$\frac{d}{dt} x_z(t) = 2\delta(t) \leftrightarrow j2\pi f X_z(f) = 2 \Leftrightarrow X_z(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

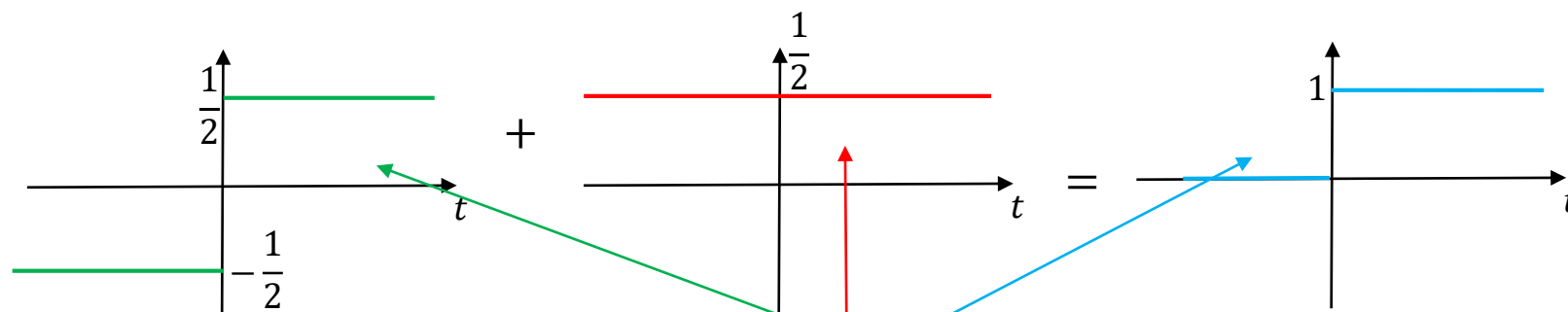
σύμφωνα με την ιδιότητα της παραγωγίσης του μετασχ. Fourier

- Οπότε

$$\hat{X}(f) = X_z(f) = F\{\text{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

- Ως παράδειγμα, βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



- Το σήμα $u(t)$ γράφεται ως

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

- Άρα

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right\} = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Οπότε

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier	
Σήματα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}(fT)$
$\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{j\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

- Για την αντίστροφη διαδικασία εύρεσης του σήματος στο χρόνο από το μετασχ. Fourier του, συνήθως ακολουθούμε τις παρακάτω μεθόδους:

- Χρήση του ορισμού
- Χρήση ιδιοτήτων (π.χ. δυϊκότητα)
- Χρήση πινάκων γνωστών μετασχηματισμών

ενώ χρησιμοποιείται συχνά η τεχνική του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Έστω ότι γνωρίζετε τα παρακάτω:

■ Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές

■ Ισχύει

$$F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t), \quad A \in \mathbb{R}$$

■ Ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{4}{15} \quad \rightarrow \text{Parseval.}$$

Βρείτε το $x(t)$

Είναι

$$F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t)$$

$$F\{F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\}\} = F\{Ae^{-3t}u(t)\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Είναι $(2+j2\pi f)X(f) = \frac{A}{3+j2\pi f} \Rightarrow X(f) = \frac{A}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$

Αρ. $X(f) = A \left(\frac{A_1}{3+j2\pi f} + \frac{A_2}{2+j2\pi f} \right) = A G(f)$

τε $A_1 = G(f)(3+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -3} = -1$ $\hookrightarrow \frac{1}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$

$A_2 = G(f)(2+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -2} = 1$

Οότε $X(f) = \frac{A}{j2\pi f + 2} - \frac{A}{j2\pi f + 3}$ και από πίνακες Laplace

θα είναι $x(t) = A(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$.

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Από Parseval, θα έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{4}{15}$

$\times$
 $\checkmark$

Αρα

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(e^{-2t} - e^{-3t}) u(t) \right)^2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 (e^{-2t} - e^{-3t})^2 \underbrace{u^2(t)}_{u(t)} dt = \int_0^{+\infty} A^2 (e^{-2t} - e^{-3t})^2 \cdot 1 \cdot dt \\
 &= A^2 \int_0^{+\infty} (e^{-4t} - 2e^{-2t} \cdot e^{-3t} + e^{-6t}) dt \\
 &= A^2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-4t} dt - 2 \int_0^{+\infty} e^{-5t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-6t} dt \right) \\
 &= A^2 \cdot \frac{1}{60} = \frac{4}{15} \Rightarrow A^2 = 16 \Rightarrow A = \pm 4
 \end{aligned}$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Αρα $x(t) = 4 \left(e^{-2t} - e^{-3t} \right) u(t)$

ή
 $x(t) = -4 \left(e^{-2t} - e^{-3t} \right) u(t)$

$$= 4 \left(e^{-3t} - e^{-2t} \right) u(t)$$

Όπως το $x(t) > 0 \quad \forall t$, κι επειδή $e^{-2t} > e^{-3t}$, το

σημαίνει ότι είναι το

$$x(t) = 4 \left(e^{-2t} - e^{-3t} \right) u(t)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

