

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 10^Η

- Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες



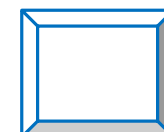
• Ιδιότητες Σειρών Fourier

REMINDER

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k
	$y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X_{-k}^*
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	X_k , με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγωγή	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X_{-k}^*, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ X_k = X_{-k} , \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k ^2$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{f}{a}\right)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Διαικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ X(f) = X(-f) , \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int Ax(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int By(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= A \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt + B \int y(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

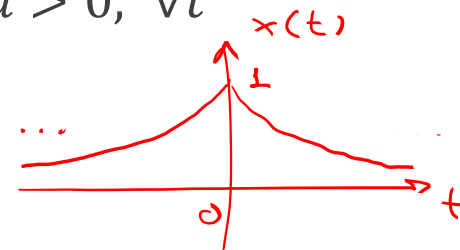
$$= AX(f) + BY(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, $\forall t$

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad \left\{ \begin{array}{l} |t| = \begin{cases} t, & t > 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

$$= e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)$$



Είνα

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j2\pi ft} dt}_{F\{e^{-at} u(t)\}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} u(-t) e^{-j2\pi ft} dt}_{F\{e^{at} u(-t)\}} = ? \quad (1)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Γνωρίζω ότι

$$F\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j2\pi f}, \quad a > 0$$

αλλά

$$F\{e^{at}u(-t)\} = ? \quad \leftarrow \text{ας το βρούμε!}$$

Είναι

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-j2\pi ft} dt \\ u(-t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} = \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a-j2\pi f} e^{(a-j2\pi f)t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{at} \cdot e^{-j2\pi ft} \right) \quad \text{Όφειο με ντροπή να πω:}$$

$$\text{δυστυχώς, } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t} = 0, \text{ άρα } F\{e^{at}u(-t)\} = \frac{1}{a-j2\pi f} \quad (2)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Από το ①, ②

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \frac{1}{a+j2\pi f} + \frac{1}{a-j2\pi f} \\
 &= \frac{a-j2\pi f}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} + \frac{a+j2\pi f}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} \\
 &= \frac{2a}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} = \frac{2a}{|a+j2\pi f|^2} \\
 &= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}
 \end{aligned}$$

Από $e^{-a|t|}, a > 0 \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

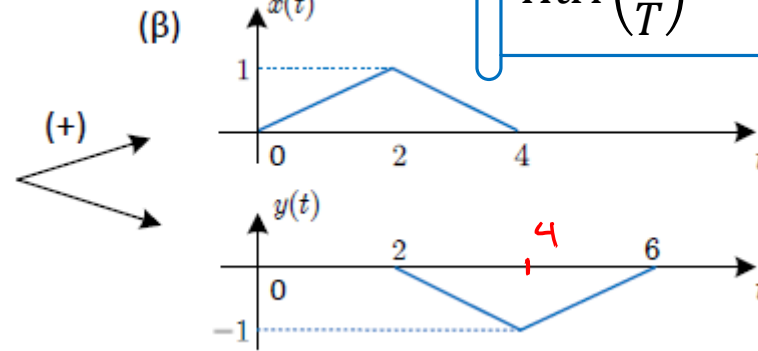
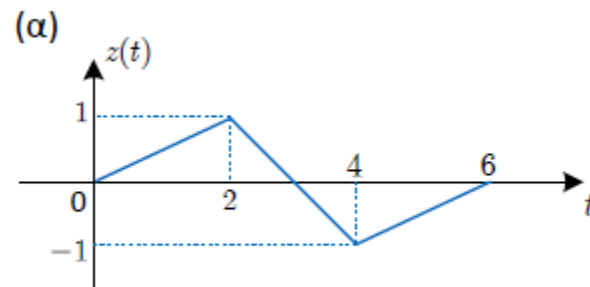
Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t - t_0) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$\begin{aligned}
 Z(f) &= \int x(\textcolor{red}{t} - t_0) e^{-j2\pi f t} dt \Bigg\{ \substack{\textcolor{red}{u} = t - t_0 \Rightarrow du = dt} \\ &= \int x(\textcolor{red}{u}) e^{-j2\pi f (u + t_0)} du \\ &= \int x(u) e^{-j2\pi f u} e^{-j2\pi f t_0} du \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \left[\int x(u) e^{-j2\pi f u} du \right] \\ &= e^{-j2\pi f t_0} X(f)
 \end{aligned}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier



$$A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \operatorname{sinc}^2(fT)$$

Είχα

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

$$= 1 \cdot \operatorname{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) - 1 \cdot \operatorname{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

$x(t-t_0)$
 $\downarrow F$
 $X(f) e^{-j2\pi f t_0}$

άρα

$$Z(f) = 1 \cdot 2 \cdot \operatorname{sinc}^2(2f) e^{-j2\pi f \cdot 2}$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot \operatorname{sinc}^2(2f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot 4}$$

$$= 2 \operatorname{sinc}^2(2f) (e^{-j4\pi f} - e^{-j8\pi f})$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f - f_0)$

Απόδειξη:

$$z(t) = e^{j2\pi f_0 t} x(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$\begin{aligned}
 Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi (f - f_0) t} dt \\
 &= X(f - f_0)
 \end{aligned}$$

Σημείωση: η συχνότητα f_0 **δεν** έχει να κάνει με τη θεμελιώδη συχνότητα κάποιου περιοδικού σήματος. Είναι απλά μια τυχαία συχνότητα.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = 2x(t) \cos(2\pi f_0 t)$

Είναι

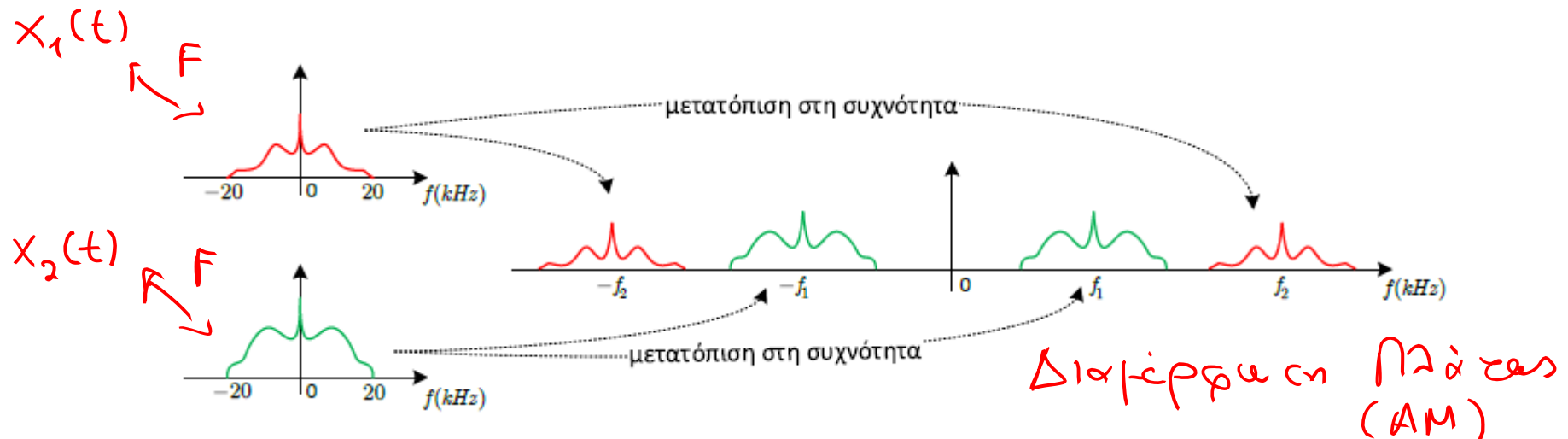
$$y(t) = 2x(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (\text{Euler})$$

$$= 2x(t) \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

$$= x(t) e^{j2\pi f_0 t} + x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \quad (\text{Μετατ στη Συχνότητα})$$

Άρα

$$Y(f) = X(f - f_0) + X(f + f_0)$$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(at), a \in \mathbb{R} \rightarrow Z(f) = ?$$

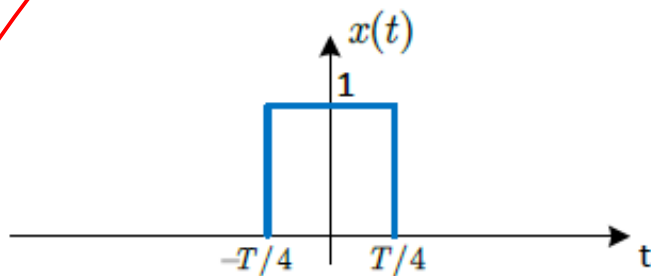
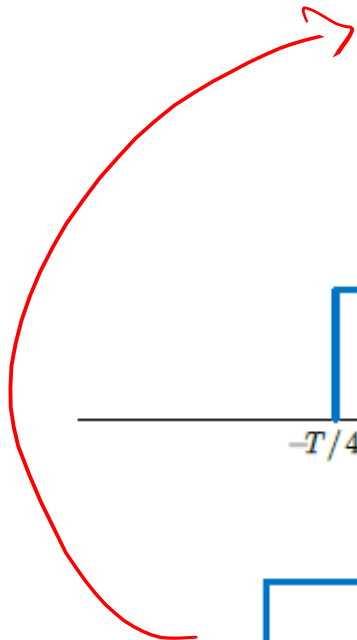
Έστω $a > 0$:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\textcolor{red}{at}) e^{-j2\pi ft} dt \left\{ \begin{array}{l} u = at \Rightarrow du = a dt \\ \textcolor{red}{a} \end{array} \right. = \frac{\textcolor{red}{1}}{\textcolor{red}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi \left(\frac{f}{a}\right)u} \textcolor{red}{du} = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

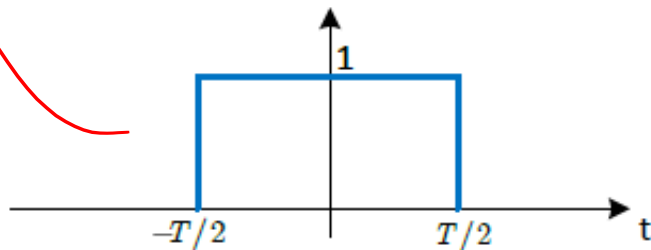
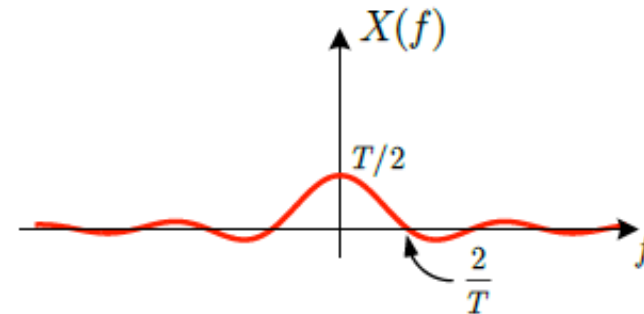
Όμοια είναι η απόδειξη για $a < 0$.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

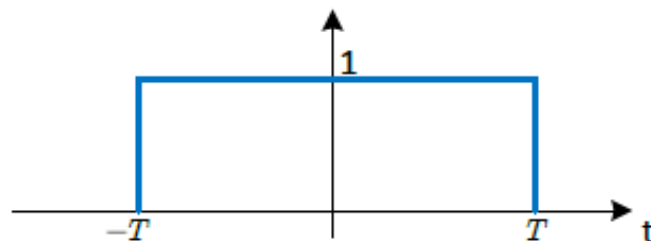
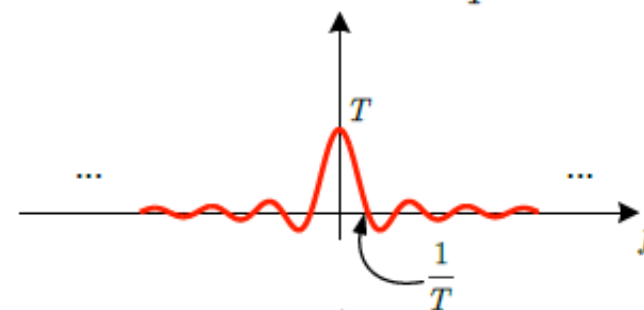
$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T \text{sinc}(fT)$$



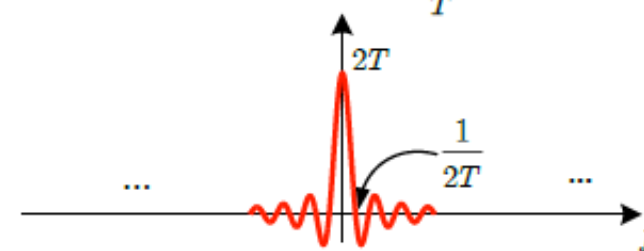
$\longleftrightarrow F$



$\longleftrightarrow F$



$\longleftrightarrow F$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t) * y(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t)) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = Y(f) X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$

1^η μέθοδος: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots d\tau$

2^η μέθοδος:

$$\left. \begin{aligned} x(t) = e^{-t}u(t) &\xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \\ h(t) = e^{-2t}u(t) &\xleftrightarrow{F} H(f) = \frac{1}{2+j2\pi f} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

$$= \frac{1}{1+j2\pi f} \cdot \frac{1}{2+j2\pi f} = \frac{1}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)} \quad \text{Θέτω } w = j2\pi f, \text{ τότε}$$

$$Y(w) = H(w)X(w) = \frac{1}{(1+w)(2+w)} = \frac{A}{1+w} + \frac{B}{2+w}, \quad \text{τε}$$

$$A = Y(w)(1+w) \Big|_{w=-1} = \frac{1}{(1+w)(2+w)} (1+w) \Big|_{w=-1} = \frac{1}{2+w} \Big|_{w=-1} = 1$$

$$B = Y(w)(2+w) \Big|_{w=-2} = \frac{1}{(1+w)(2+w)} (2+w) \Big|_{w=-2} = \frac{1}{1+w} \Big|_{w=-2} = -1$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Άρα $Y(w) = \frac{1}{1+w} + \frac{-1}{2+w}$, θέτουμε $j2\pi f := w$

και

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{-1}{2+j2\pi f}$$

$\updownarrow F^{-1}$
 $e^{-t}u(t)$

$\updownarrow F^{-1}$
 $-e^{-2t}u(t)$

Οπότε τελικά

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \\ &= (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Δυσιχότητα	$X(t)$	$x(-f)$

Απόδειξη:

Ξέρουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \\ u = -t &\Rightarrow du = -dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi f u} df$$

Αν αλλάξουμε μεταξύ τους τις μεταβλητές $u \leftrightarrow f$, τότε

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{-j2\pi f u} du \stackrel{u:=t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi f t} dt = F\{X(t)\}$$

Άρα αν

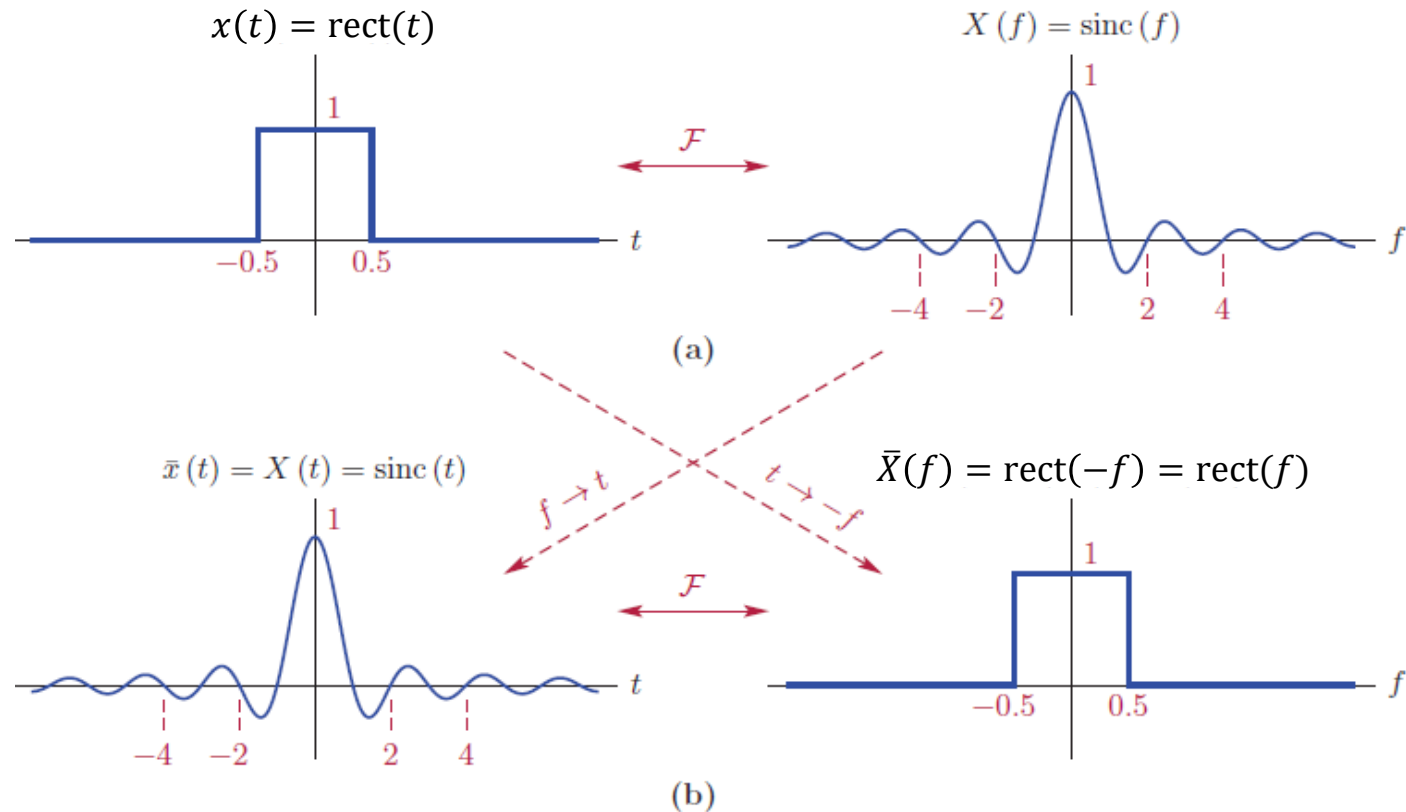
τότε

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα:



Άλλο παράδειγμα:

$$e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$\frac{1}{a + j2\pi t}, a > 0 \leftrightarrow e^{-a(-f)}u(-f) = e^{af}u(-f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t)y(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)y(t))e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du \right) y(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi(f-u)t} dt \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) Y(f-u) du$$

$$= X(f) * Y(f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t) * y(t)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$e^{\mp j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f \pm f_0)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$A\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT\text{sinc}(fT)$$

Είναι

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad (\text{Euler})$$

$$= \cancel{2} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \left(\cancel{\frac{1}{2}} e^{j2\pi f_0 t} + \cancel{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

$$= \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

όπ.

$$X(f) = F\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} * F\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} + F\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} * F\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= T\text{sinc}(fT) * \delta(f - f_0) + T\text{sinc}(fT) * \delta(f + f_0)$$

$$= T\text{sinc}((f - f_0)T) + T\text{sinc}((f + f_0)T).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t)$$

Είναι

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$= \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{j2\pi f_0 t} + \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f_0 t}$$

Ξέρουμε ότι

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T \text{sinc}(fT)$$

Άρα

$$X(f) = T \text{sinc}((f-f_0)T) + T \text{sinc}((f+f_0)T)$$

ΜΕΤΑΤΟΜΗ ΣΤΗ
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ :

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(f-f_0)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

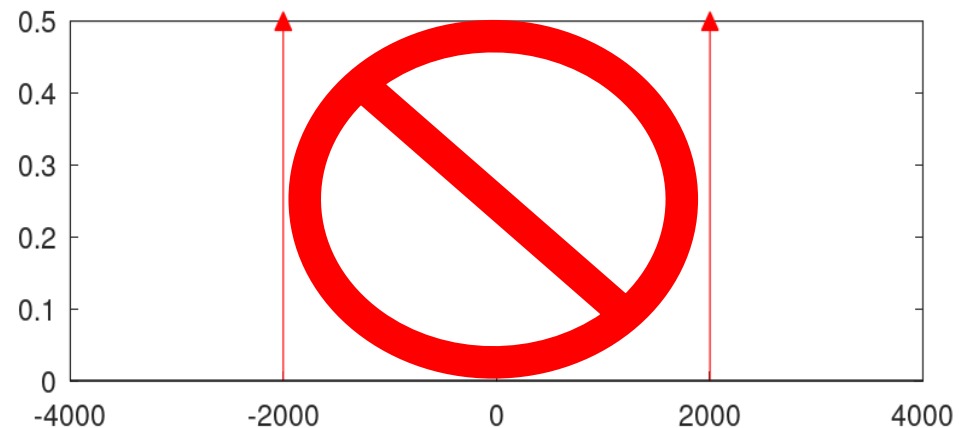
Θα δούμε αργότερα ότι

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t), \quad -\infty < t < +\infty$$

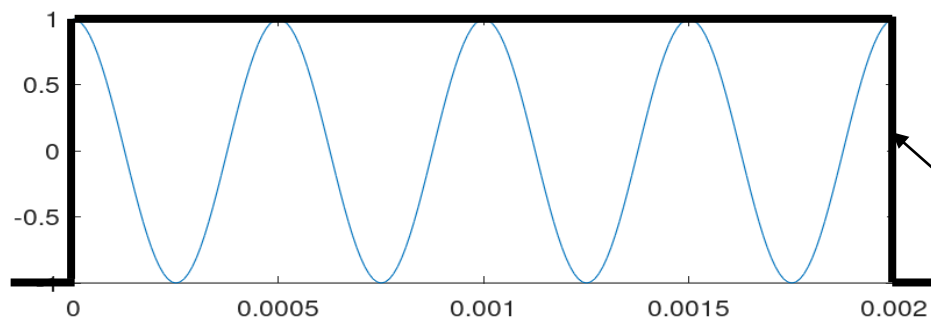
↕

$$X(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$

Έστω $f_0 = 2000$ Hz

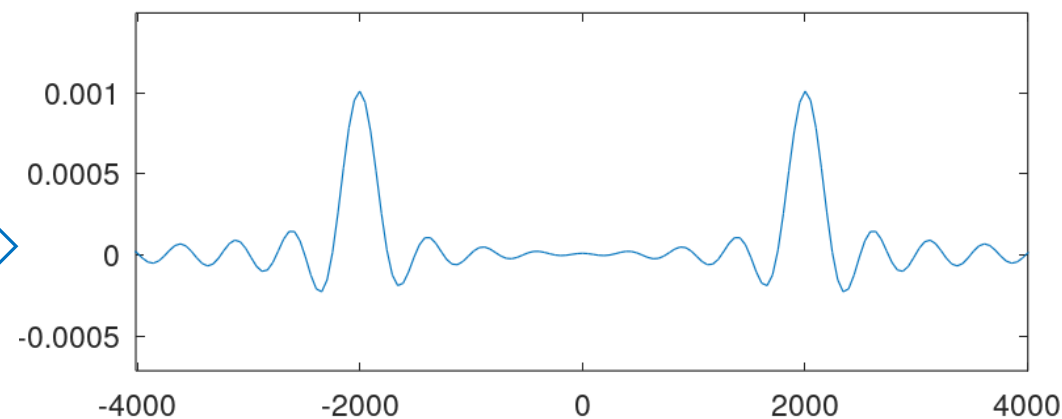


Φάσμα ημιτόνου άπειρης
διάρκειας



$$\text{rect}\left(\frac{t - 0.001}{0.002}\right)$$

Φάσμα
παραθυροποιημένου
ημιτόνου



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt = x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{dt} e^{-j2\pi ft} dt$$

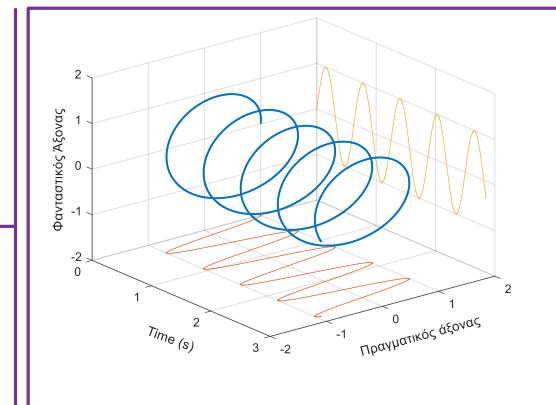
$$= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-j2\pi f) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]$$

$$= \cancel{x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty}} + j2\pi f X(f)$$

$$x(\pm\infty) = 0$$

$$= 0 + j2\pi f X(f) = j2\pi f X(f)$$



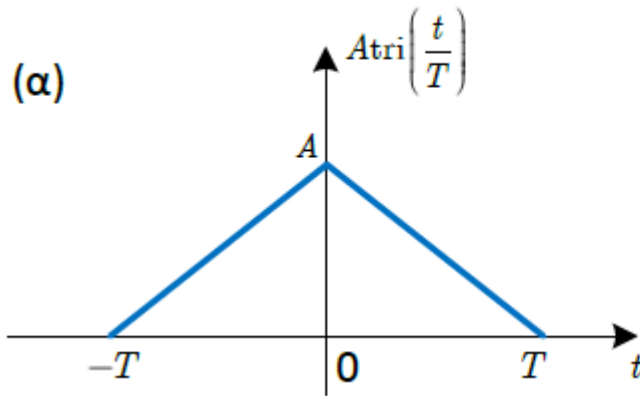
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού

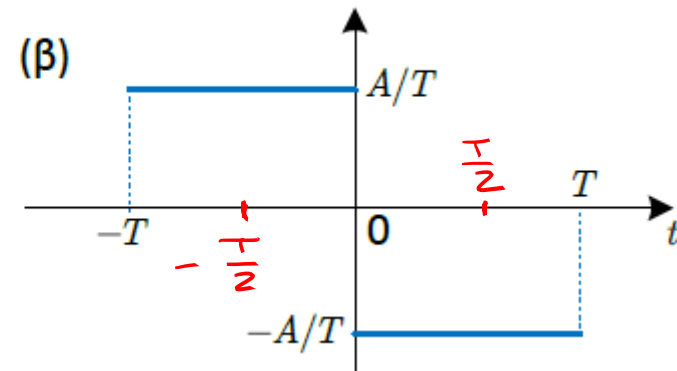
$$x(t) = A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \operatorname{sinc}(fT)$$



$\xrightarrow{d/dt}$



Είναι

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{A}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

ή πα

$$\begin{aligned} F\left\{\frac{d}{dt} x(t)\right\} &= \frac{A}{T} T \cdot \operatorname{sinc}(fT) \cdot e^{j2\pi f \frac{T}{2}} - \frac{A}{T} T \cdot \operatorname{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} \\ &= A \operatorname{sinc}(fT) (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}) \\ &= A \operatorname{sinc}(fT) (2j \sin(\pi f T)) \end{aligned}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$$\text{Αφ'α} \quad F \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} = 2j A \operatorname{sinc}(fT) \sin(nfT)$$

$$\parallel$$

$$j2nf X(f)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sinc}(x) &= \\ &= \frac{\sin(nx)}{nx} \end{aligned} \right.$$

Οότε

$$\cancel{j}2nf X(f) = \cancel{j}2A \operatorname{sinc}(fT) \sin(nfT)$$

$$X(f) = A \operatorname{sinc}(fT) \frac{\sin(nfT)}{nf}$$

$$= A \operatorname{sinc}(fT) \cdot T \cdot \frac{\sin(nfT)}{nfT}$$

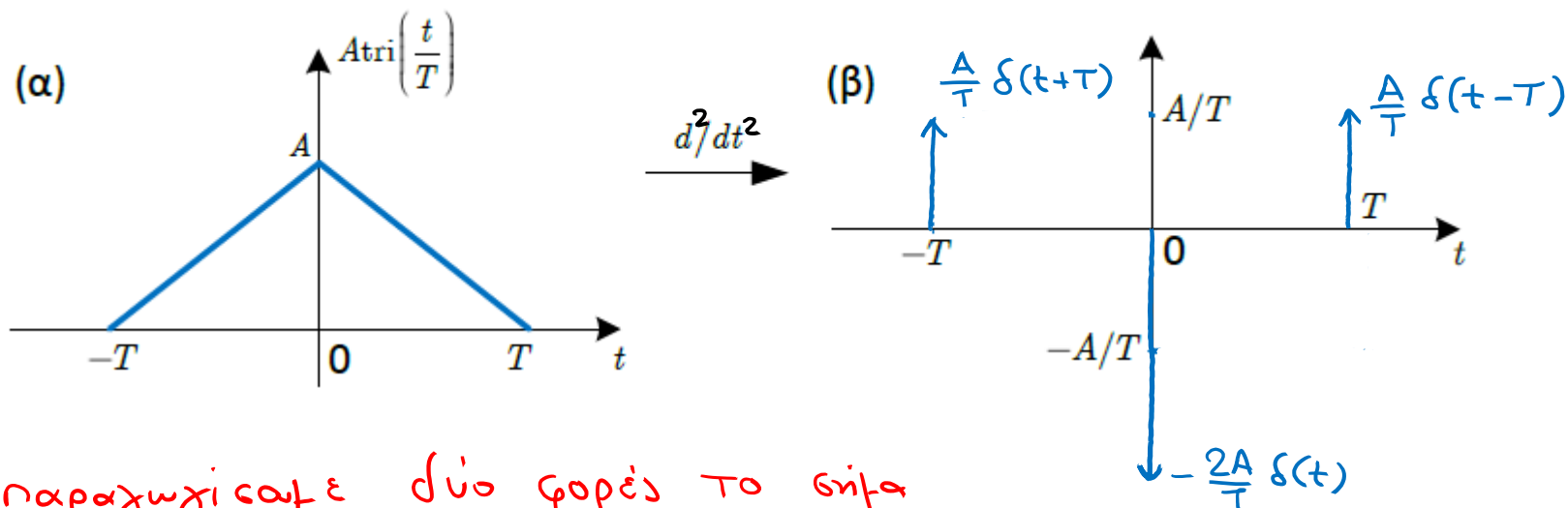
$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\operatorname{sinc}(fT)}$$

$$= AT \operatorname{sinc}(fT) \operatorname{sinc}(fT)$$

$$= AT \operatorname{sinc}^2(fT)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού $x(t) = A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$



Αν παραγωγίσουμε δύο φορές το σήμα $x(t)$, θα πάρουμε μόνο συναρτήσεις Δέλτα στα σημεία αυνέχειας της πρώτης παραγωγής (2 slides πριν). Τότε θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{A}{T} \delta(t+T) - \frac{2A}{T} \delta(t) + \frac{A}{T} \delta(t-T)$$

Από ιδιότητα παραγωγής: $F\left\{\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right\} = (j2\pi f)^2 X(f)$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση

δίν.

$$F \left\{ \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right\} = -4\pi^2 f^2 X(f)$$

$$\delta(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j2\pi f t_0}$$

Όπως

$$\begin{aligned} F \left\{ \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right\} &= F \left\{ \frac{A}{T} \delta(t+T) \right\} - F \left\{ \frac{2A}{T} \delta(t) \right\} + F \left\{ \frac{A}{T} \delta(t-T) \right\} \\ &= \frac{A}{T} e^{j2\pi f T} - \frac{2A}{T} + \frac{A}{T} e^{-j2\pi f T} \\ &= \frac{A}{T} \left(\underbrace{e^{j2\pi f T} + e^{-j2\pi f T}}_{\text{Euler}} - 2 \right) \\ &= \frac{A}{T} \left(2 \cos(2\pi f T) - 2 \right) \\ &= \frac{2A}{T} \left(\cos(2\pi f T) - 1 \right) \\ &= \frac{2A}{T} \left(-2 \sin^2(\pi f T) \right) \end{aligned}$$

→ τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$-4\pi^2 f^2 X(f) = \frac{2A}{T} \left(-2 \sin^2(\pi f T) \right)$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

- Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση

$$\cancel{-4\pi^2 f^2} X(f) = \cancel{-4A} \frac{\sin^2(nfT)}{T}$$

$$X(f) = \frac{A}{T} \frac{\sin^2(nfT)}{(nf)^2}$$

$$= \frac{AT}{T^2} \frac{\sin^2(nfT)}{(nf)^2}$$

$$= AT \frac{\sin^2(nfT)}{(nfT)^2}$$

$$= AT \operatorname{sinc}^2(fT).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x(t)x^*(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u) e^{-j2\pi u t} du \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt \right) du df \quad \delta(f-f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{j2\pi(f-f_0)t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \right) \delta(f-u) du df \quad \int x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t) * \delta(t) = x(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u) \delta(f-u) du \right) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \Big|_{u=f} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df
 \end{aligned}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f) df$$

Γνωρίζουμε ότι

$$A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT \text{sinc}(fT)$$

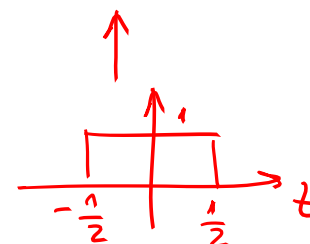
$$A=1, T=1$$

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f)$$

Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\text{sinc}(f))^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{rect}(t))^2 dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1^2 dt = t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$



} =

$$A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \text{sinc}(fT)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

