

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 9^Η

- Μετασχηματισμός Fourier



- **Προς το μετασχ. Fourier...**

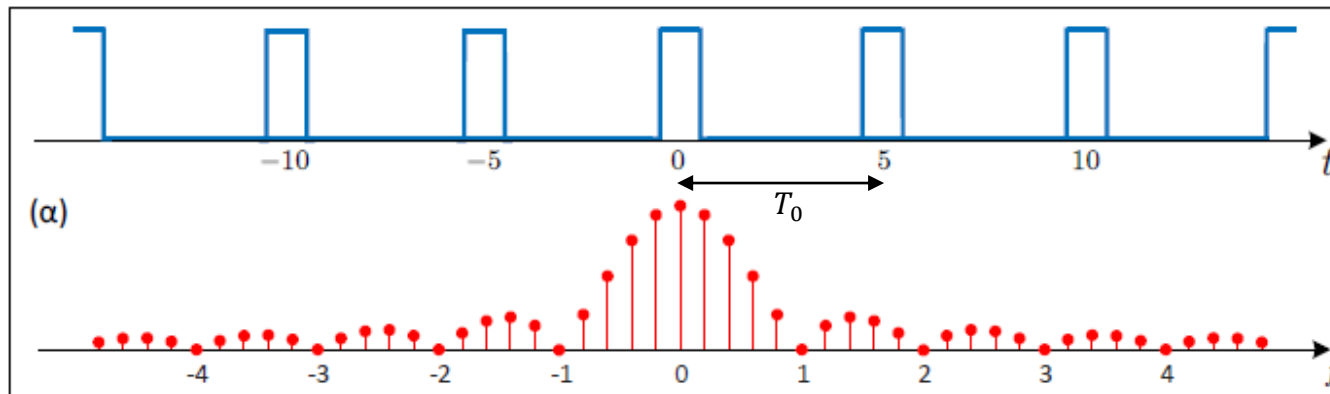
- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

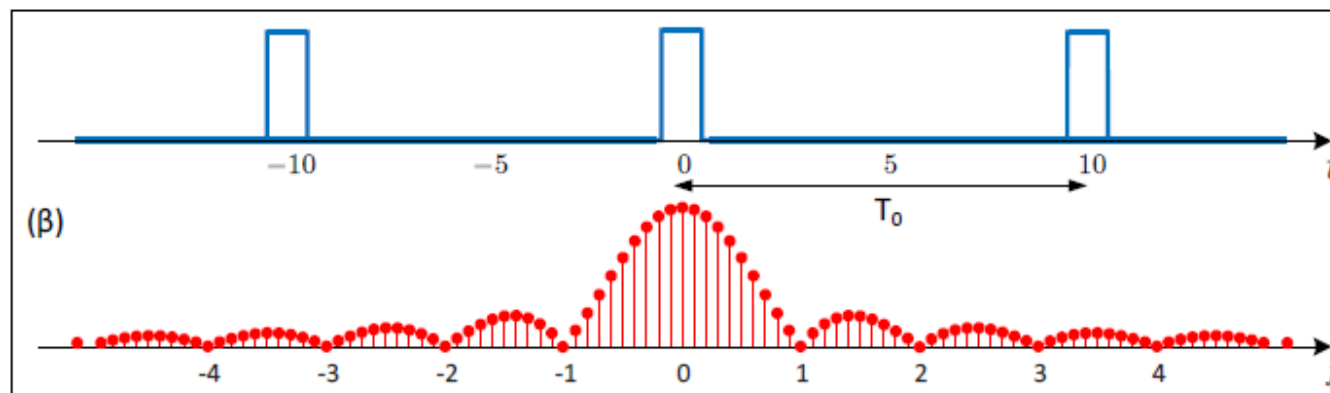
η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \rightarrow +\infty$?
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό
- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

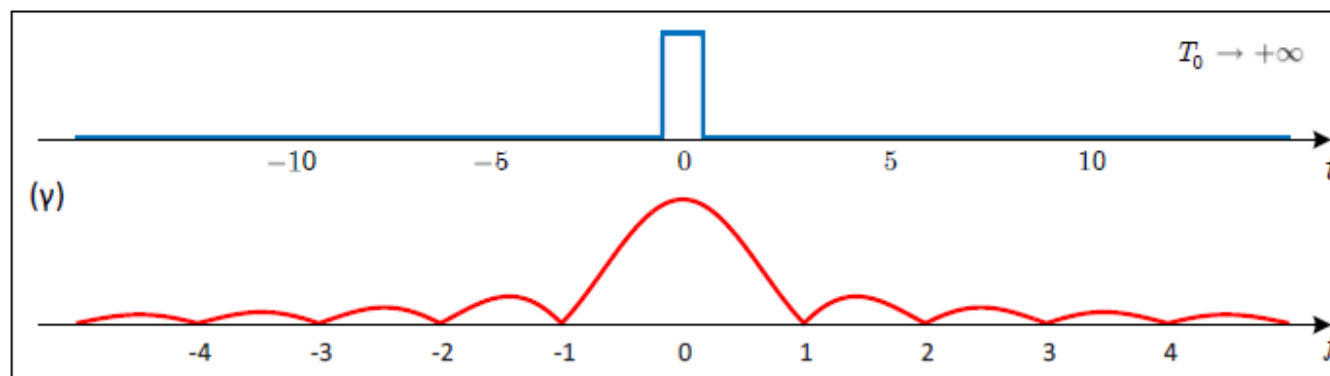
Προς το μετασχ. Fourier...



Περίοδος $T_0 = 5 \text{ s}$
 Θεμελ. συχν. $f_0 = \frac{1}{5} \text{ Hz}$
 $x(t) \rightarrow X_k$



$T_0 \rightarrow 2T_0 = 10 \text{ s}$
 Θεμελ. συχν. $f_0 = \frac{1}{10} \text{ Hz}$



Αν περίοδος $T_0 \rightarrow +\infty$
 τότε η θεμελ. συχν.
 $f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df \text{ Hz}$
 και άρα $kf_0 \rightarrow kdf \rightarrow f$

• Προς το μετασχ. Fourier...

• Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\overbrace{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}^{X_k} \right) e^{j2\pi k f_0 t}$$

• Όταν $T_0 \rightarrow +\infty$, τότε $f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$ και $k f_0 \rightarrow f$

• Οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$



Συντελεστές Fourier:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται με $X(f)$

- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$



Σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

ονομάζεται **αντίστροφος Μετασχ. Fourier** και προφανώς συμβολίζεται με $x(t)$

- Ο Μετασχ. Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση (εν γένει)
 - Έχει μέτρο και φάση
 - Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος

Μετασχηματισμός Fourier

• Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

$$= \text{Re}\{X(f)\} + j\text{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

$$e^{j\theta(t)} = \cos(\theta(t)) + j \sin(\theta(t))$$

δηλ.

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt$$

$$X_I(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

• Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι για **πραγματικά σήματα**

$$\begin{aligned} \Re\{X_k\} &= \Re\{X_{-k}\} \\ \Im\{X_k\} &= -\Im\{X_{-k}\} \end{aligned}$$

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

Άρτιο πραγματικό μέρος ως προς f

Περιττό φανταστικό μέρος ως προς f

• Μετασχηματισμός Fourier

- Μέτρο (φάσμα πλάτους):

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

- Φάση (φάσμα φάσης):

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

οπότε και ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι **για πραγματικά σήματα**

$$X^*(f) = X(-f)$$

- Η συζυγής συμμετρία δηλώνει ότι το μέτρο του μετασχηματισμού (**φάσμα πλάτους**) είναι άρτια συνάρτηση του f , ενώ η φάση (**φάσμα φάσης**) είναι περιττή συνάρτηση του f

- Αναμενόμενο, αφού ο μετασχ. Fourier ορίστηκε ως μια γενίκευση των συντελεστών Fourier

$$|X_k| = \sqrt{\Re\{X_k\}^2 + \Im\{X_k\}^2}$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \left(\frac{\Im\{X_k\}}{\Re\{X_k\}} \right)$$

$$X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$$

$$X_{-k} = X_k^*$$

Συζυγής συμμετρία

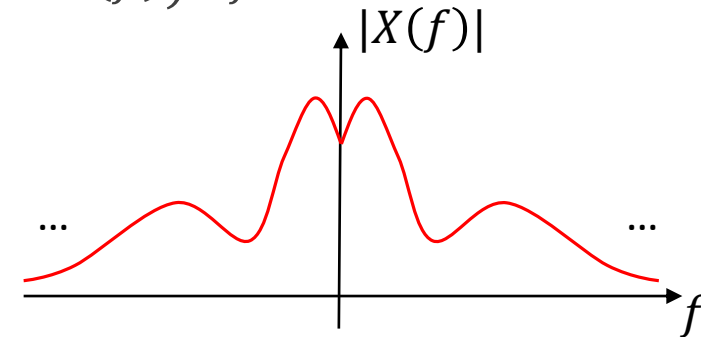
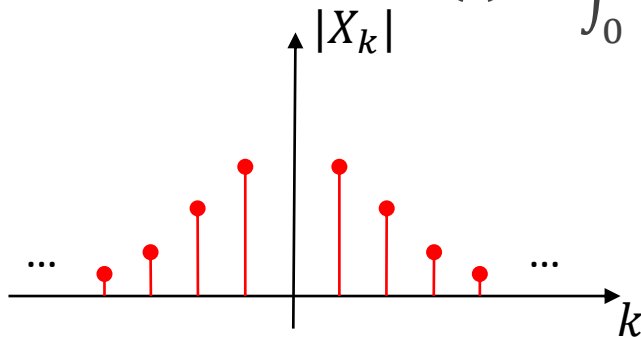
• Μετασχηματισμός Fourier

- Ο μετασχ. Fourier κάνει την ίδια δουλειά με τους συντελεστές Fourier αλλά για *απεριοδικά* σήματα
- Η σειρά Fourier αναπτύσσει ένα **περιοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) άθροισμα μετρήσιμων διακριτών συχνοτήτων kf_0 , με πλάτη $2|X_k|$ και φάσεις ϕ_k :

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Ο (αντίστρ.) μετασχ. Fourier αναπτύσσει ένα **απεριοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) *μη μετρήσιμο* «άθροισμα» (ολοκλήρωμα) **κάθε** συχνότητας f , με πλάτη $2|X(f)|df$ και φάσεις $\angle X(f)$:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} 2|X(f)| \cos(2\pi f t + \angle X(f)) df$$



• Μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη

• Αρκεί

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

- Το σήμα $x(t)$ αρκεί να είναι **απολύτως ολοκληρώσιμο**
 - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
 - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
- Δεν είναι αναγκαία συνθήκη

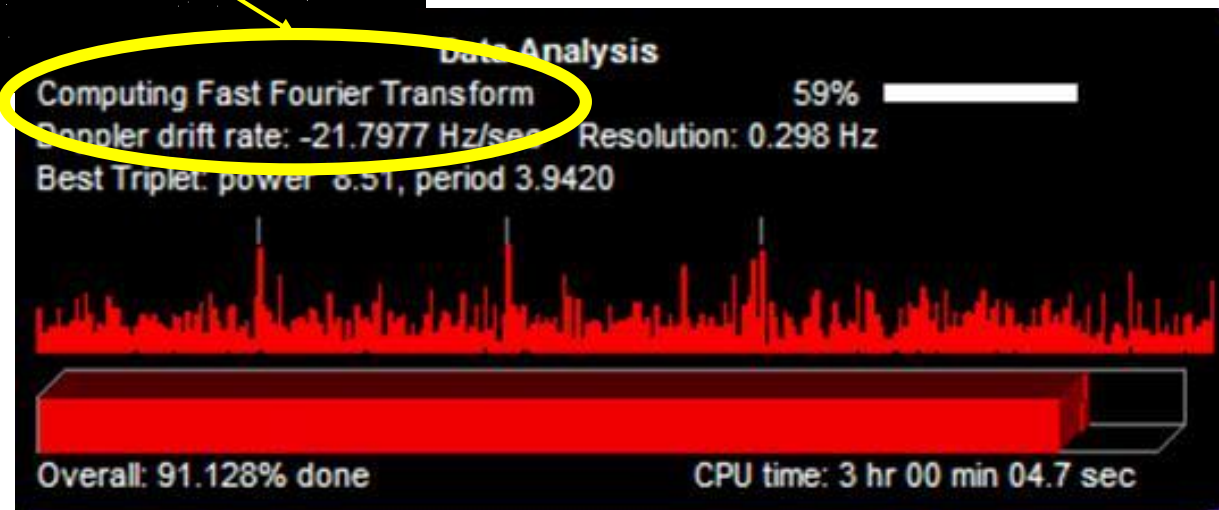
• Επίσης αν

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}^{E_x} < +\infty$$

τότε το σήμα έχει μετασχ. Fourier

- Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετ. Fourier

Μετασχηματισμός Fourier – Μια Εφαρμογή



• Μετασχηματισμός Fourier

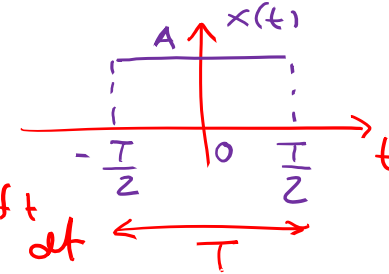
• Παράδειγμα:

①

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)$$

 $A > 0$

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του γνωστού σήματος $x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$



Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-j2\pi f t} dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{j2\pi f \frac{T}{2}} \right) = \frac{A}{j2\pi f} \left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T} \right)$$

$$= \frac{A}{\pi f} \cdot \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T) = A \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

Είναι $X(f) = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \stackrel{\textcircled{1}}{=} AT \text{sinc}(fT)$

Άρα

$$A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F} AT \text{sinc}(fT)$$

• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

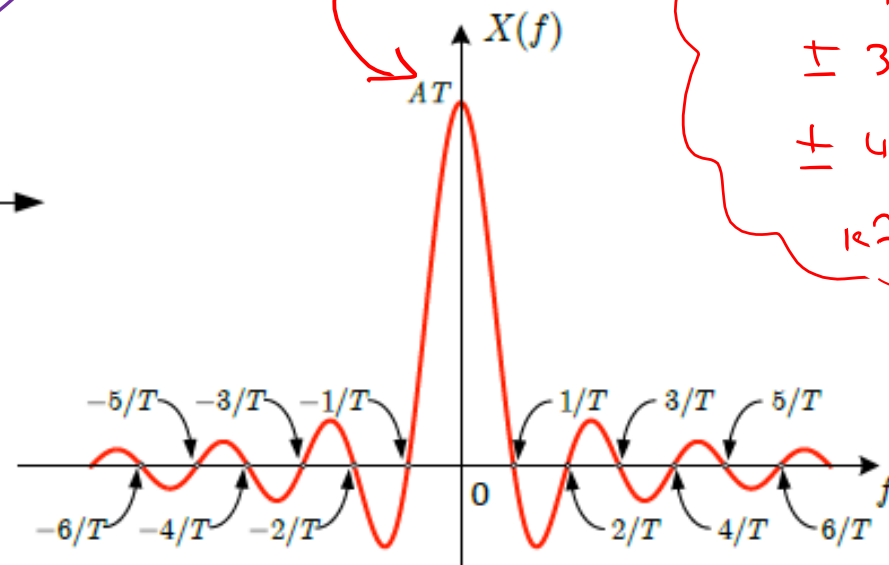
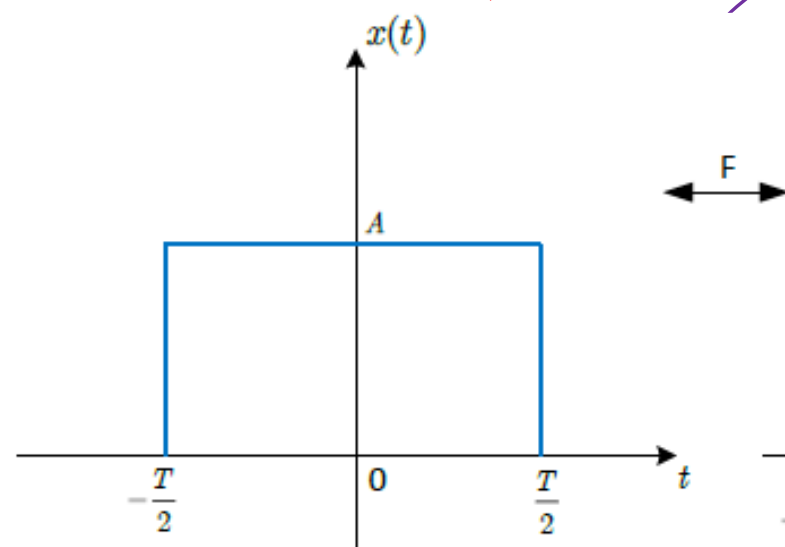
$X(f)$ που βρήκαμε είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση του f .

Σημεία μηδενισμού: $X(f) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(nfT)}{nf} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(nfT) = 0 \Leftrightarrow \cancel{nfT} = k\cancel{\pi}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f_k = \frac{k}{T}, k \in \mathbb{Z}$

Στο $f=0$, έχουμε $\frac{0}{0}$, απροσδιοριστία, και άρα

$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{A \sin(nfT)}{nf} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{ΟΛ'Η}} \lim_{f \rightarrow 0} \frac{A \cancel{\pi T} \cos(nfT)}{\cancel{\pi}} = AT$



$\downarrow$
 $\pm 1/T$
 $\pm 2/T$
 $\pm 3/T$
 $\pm 4/T$

$k\pi$

• Μετασχηματισμός Fourier

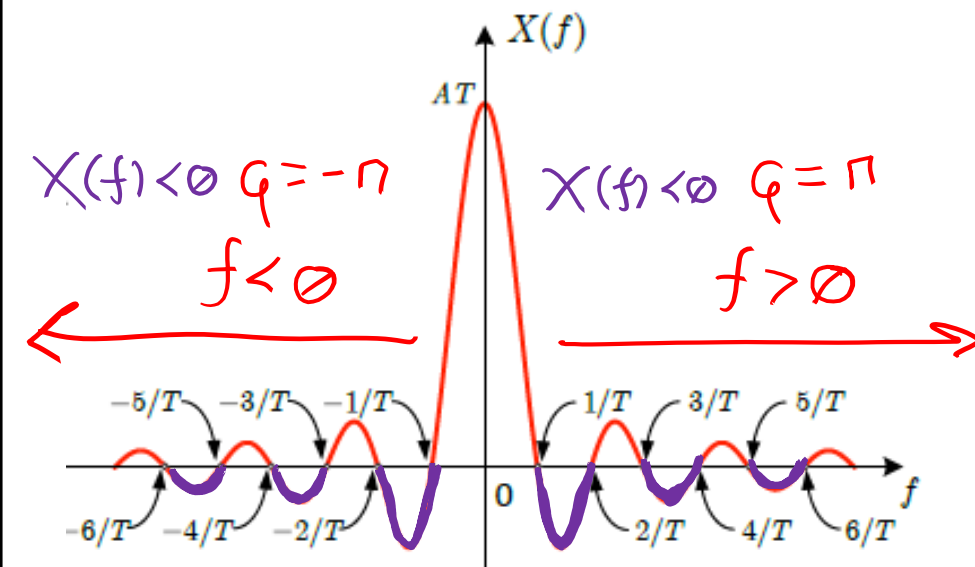
• Παράδειγμα:

Επειδή $X(f) \in \mathbb{R}$, $X_R(f) = X(f)$, $X_I(f) = 0$

$$|X(f)| = |AT \operatorname{sinc}(fT)| = AT |\operatorname{sinc}(fT)|.$$

$$\varphi_x(f) = \angle X(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1} \frac{0}{(\dots)} = \tan^{-1}(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}(0) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{k=0} 0 \\ \xrightarrow{k=1} \pi \\ \xrightarrow{k=-1} -\pi \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \xrightarrow{k=0} 0 \\ \xrightarrow{k=1} \pi \\ \xrightarrow{k=-1} -\pi \end{array}} \right\} \text{φάση}$$



Σύνοψη:

• Αν $f > 0$, $X(f) > 0$, τότε $\varphi_x = 0$

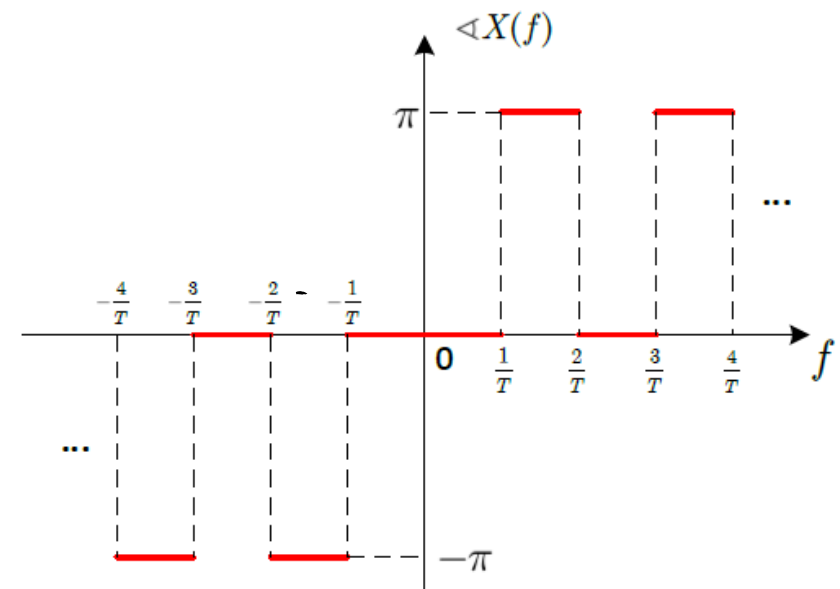
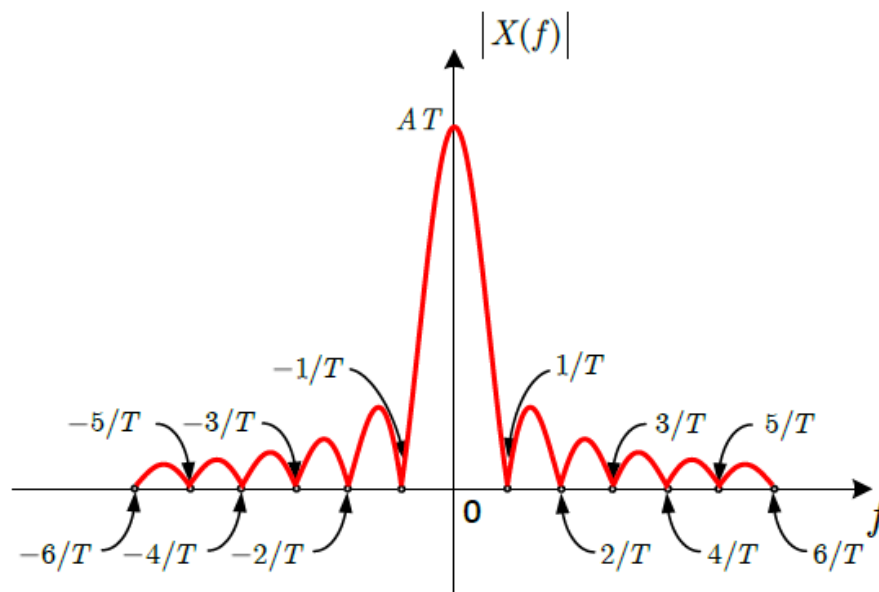
• Αν $f < 0$, $X(f) < 0$, τότε $\varphi_x = -\pi$

• Μετασχηματισμός Fourier

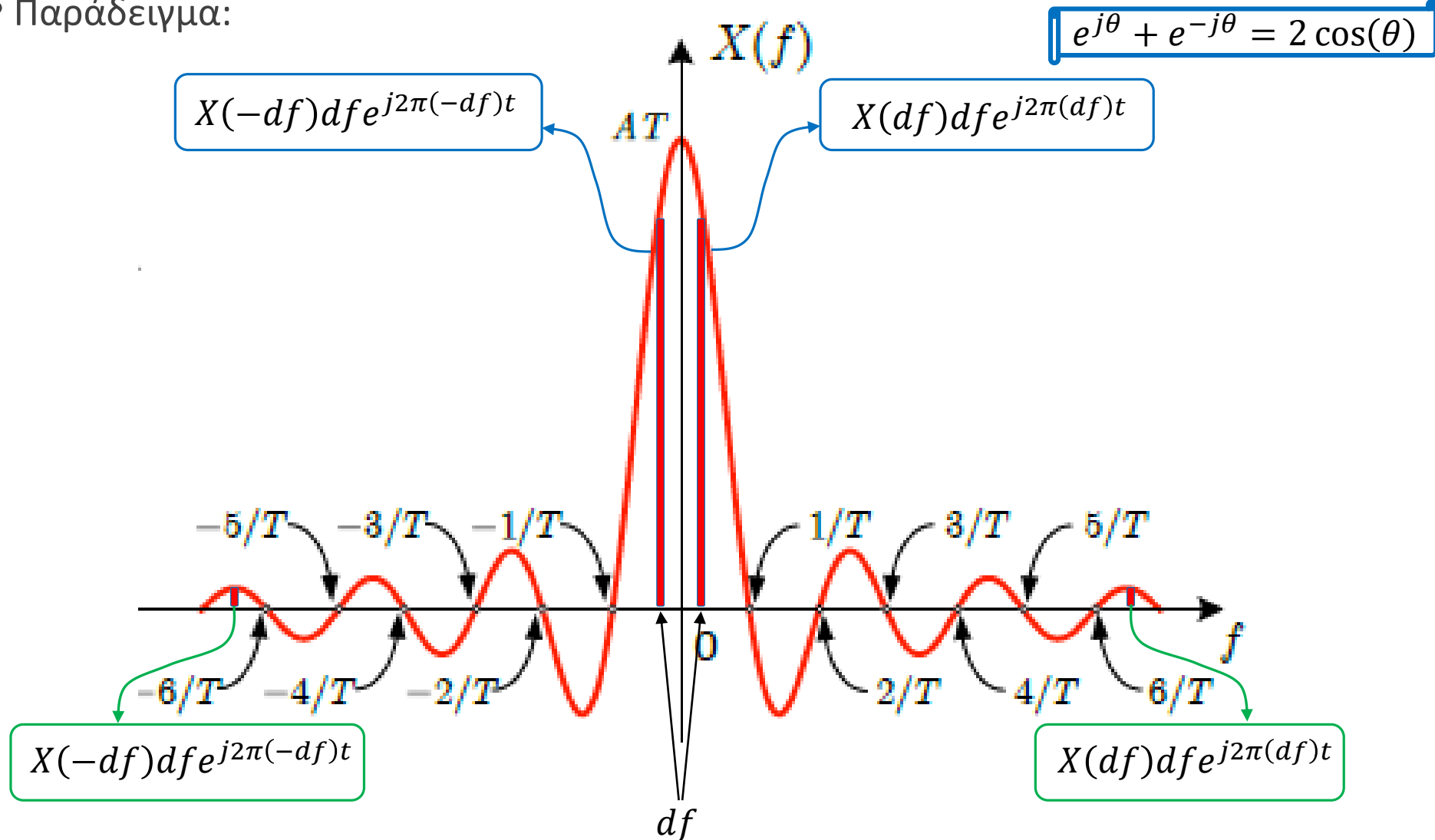
• Παράδειγμα:

$$|X(f)| = A T |\text{sinc}(fT)|$$

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} < f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} < f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} < |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases}$$



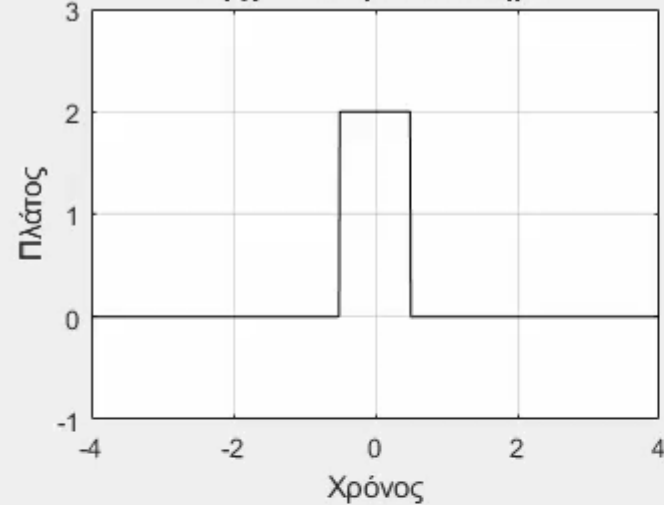
• Παράδειγμα:



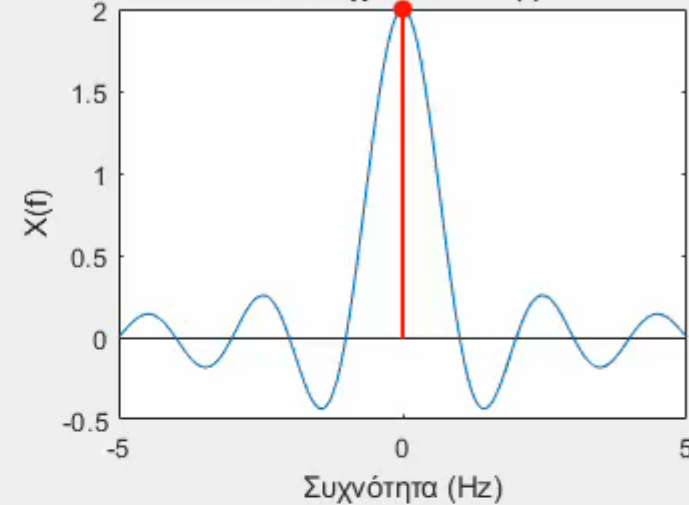
$$x(t) = 2|X(df)|df \cos(2\pi df t + \angle X(df)) + 2|X(df)|df \cos(2\pi df t + \angle X(df)) + \dots$$

• Μετασχηματισμός Fourier

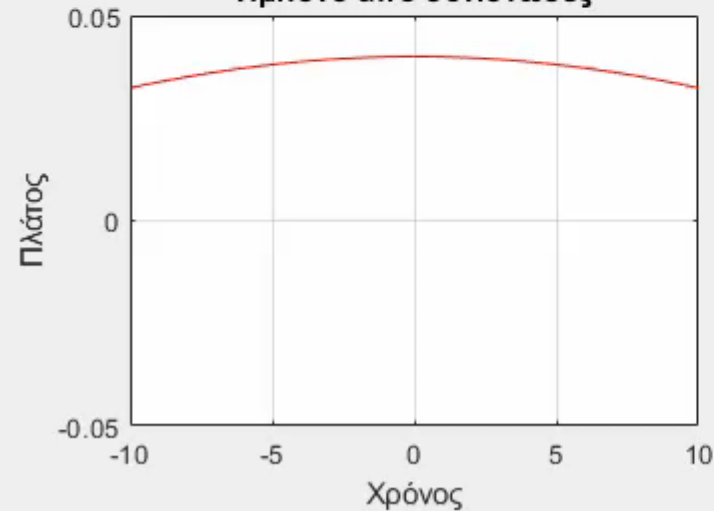
Αρχικό απεριοδικό σήμα



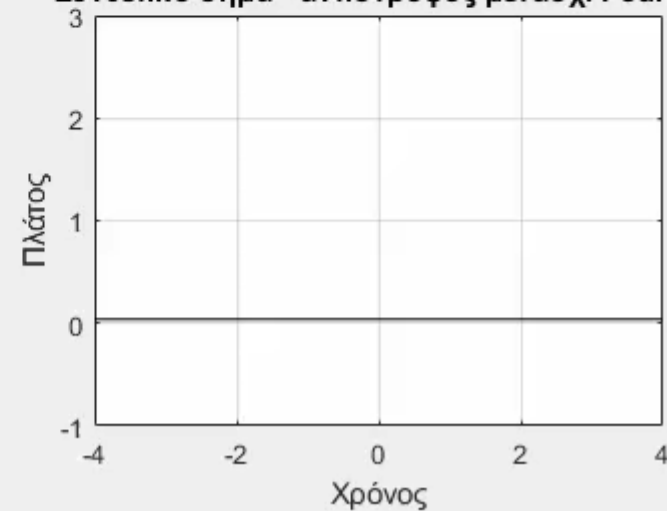
Μετασχ. Fourier $X(f)$



Ημίτονο από συνιστώσες



Συνθετικό σήμα - αντίστροφος μετασχ. Fourier



- Μετασχηματισμός Fourier
- Κώδικας Python

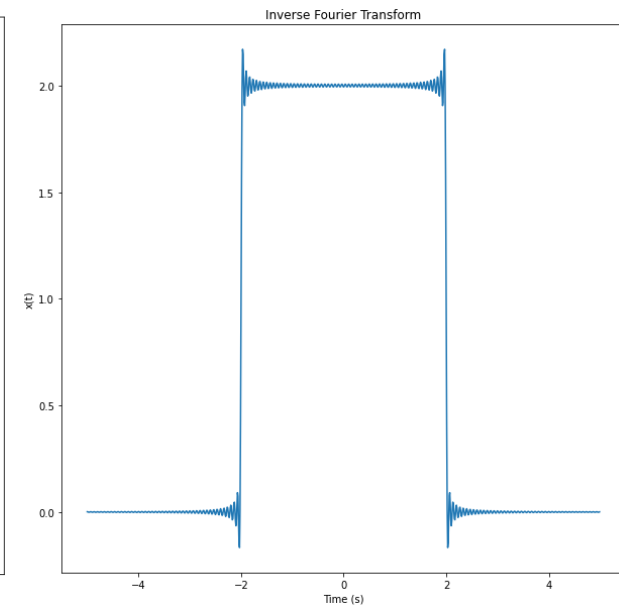
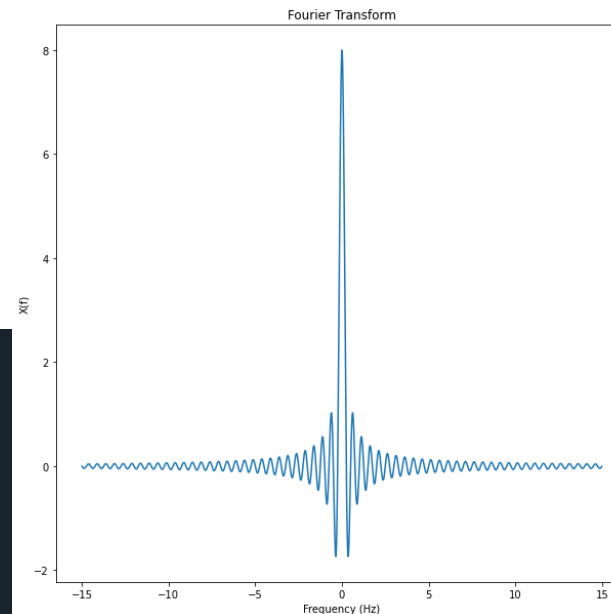
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πλάτος παλμού
A = 2
# Διάρκεια παλμού (-2 ως 2)
T = 4
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-5, 5, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-15, 15, df)
# Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*np.sinc(f*T)
# Αρχικοποίηση
x = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Fourier
for i in range(1, len(f)):
    x = x + X[i]* np.exp(1j*2*np.pi*f[i]*t)

# Κανονικοποίηση
x = df*x
```

```
# Γραφήματα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(f, X)
plt.grid
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
plt.ylabel('X(f)')
plt.title('Fourier Transform')

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x.real)
plt.grid
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('x(t)')
plt.title('Inverse Fourier Transform')
```

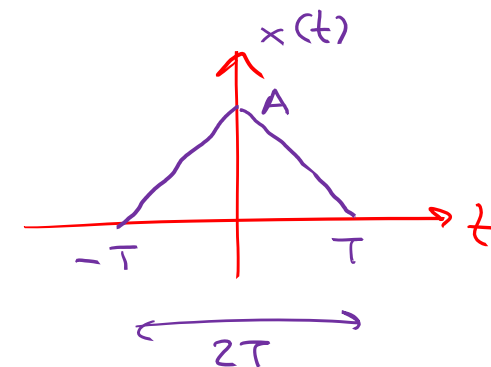


• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$

$A > 0$



Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \dots$$

$$= AT \text{sinc}^2(fT).$$

"

$$\begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & |t| < T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

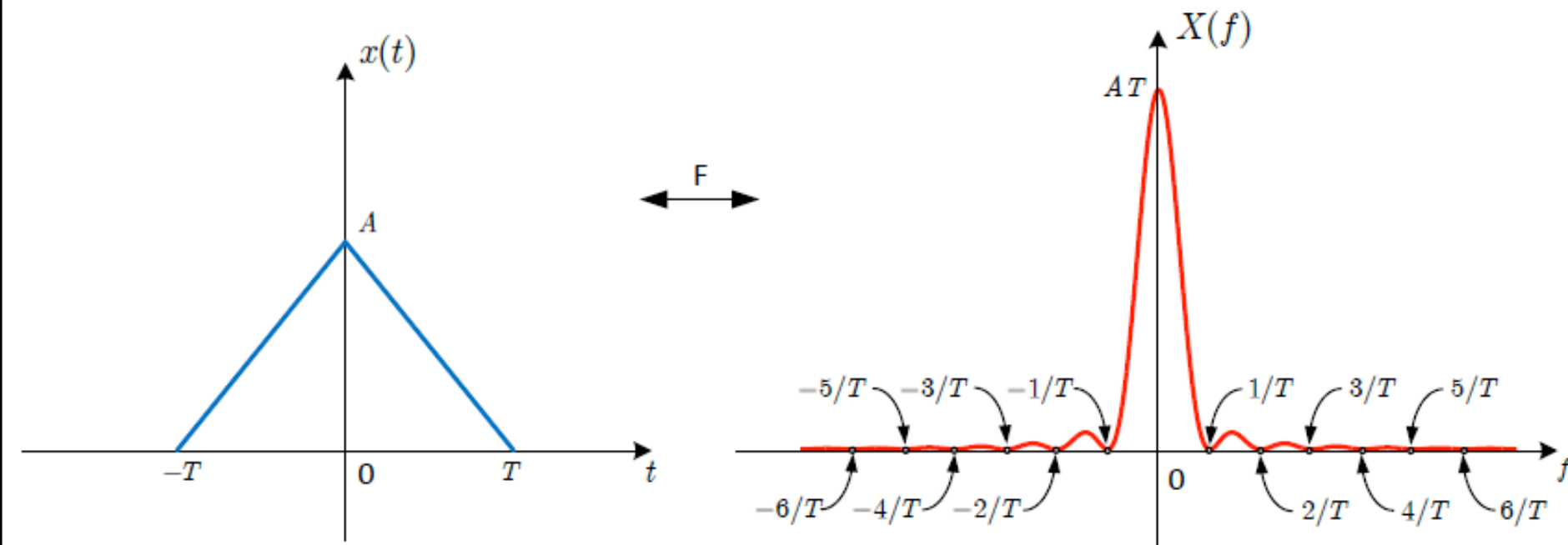
Άρα

$$A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT \text{sinc}^2(fT)$$

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα:

Ο $X(f)$ που βρήκαμε είναι δετική και άρτια συνάρτηση του f .
 Σημεία μηδενισμού: $f_k = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

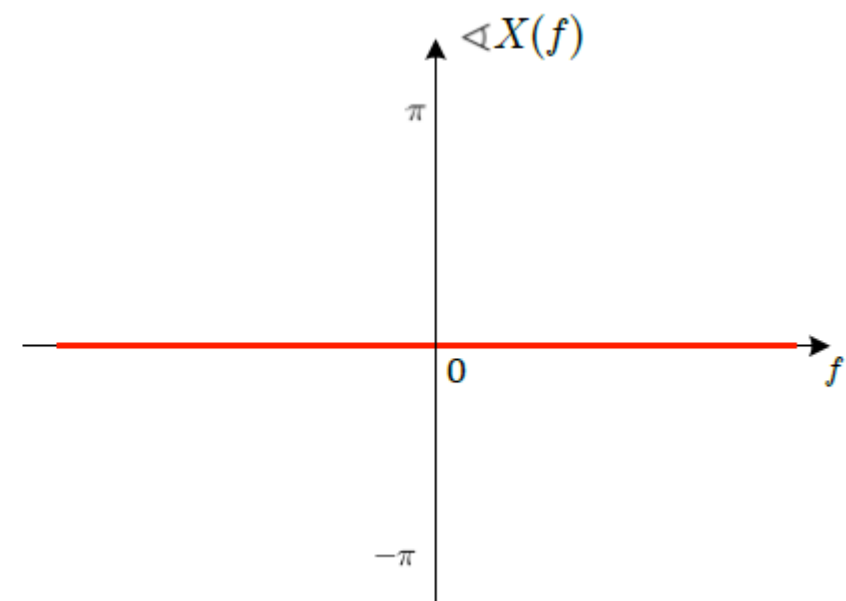
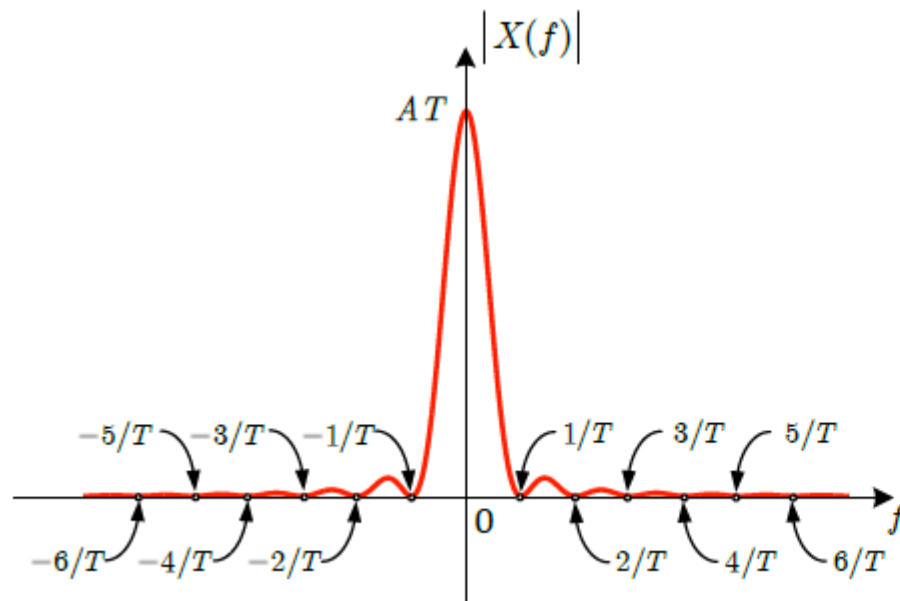


• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$|X(f)| = |AT \operatorname{sinc}^2(fT)| = X(f)$$

$$\phi_x(f) = \angle X(f) = 0, \quad \forall f$$



• Μετασχηματισμός Fourier

• Κώδικας Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Πλάτος παλμού
```

```
A = 2
```

```
# Μισή διάρκεια παλμού (-3 ως 3)
```

```
T = 3
```

```
# Βήμα στο χρόνο
```

```
dt = 0.01
```

```
# Άξονας χρόνου
```

```
t = np.arange(-5, 5, dt)
```

```
# Βήμα στη συχνότητα
```

```
df = 0.01
```

```
# Άξονας συχνοτήτων
```

```
f = np.arange(-5, 5, df)
```

```
# Μετασχηματισμός Fourier
```

```
X = A*T*np.sinc(f*T)**2
```

```
# Αρχικοποίηση
```

```
x = np.zeros(t.shape)
```

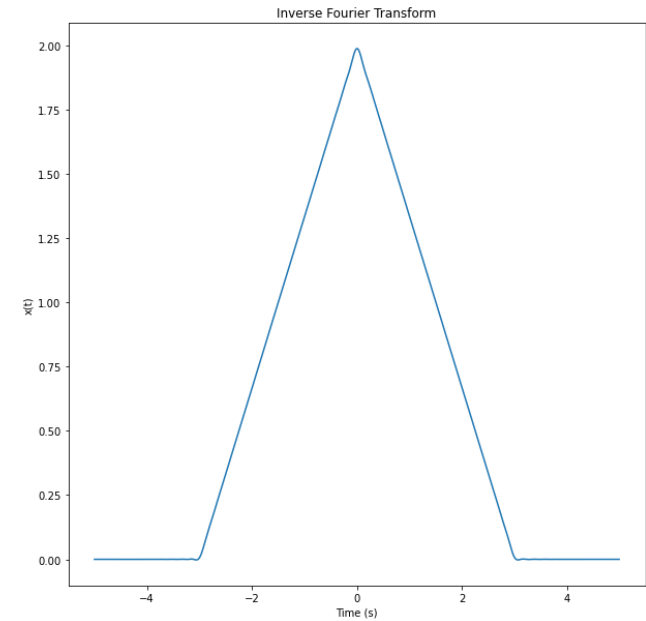
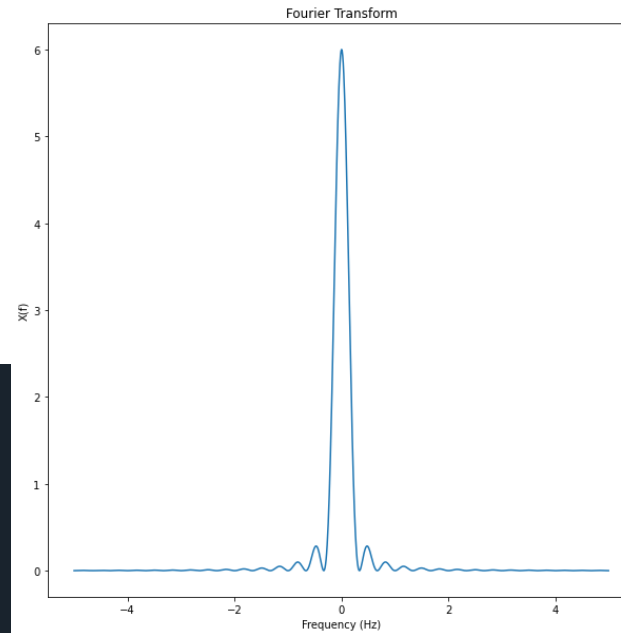
```
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Fourier
```

```
for i in range(1, len(f)):
```

```
    x = x + X[i]* np.exp(1j*2*np.pi*f[i]*t)
```

```
# Κανονικοποίηση
```

```
x = df*x
```



```
# Γραφήματα
```

```
plt.figure(figsize=(10,10))
```

```
plt.plot(f, X)
```

```
plt.grid
```

```
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
```

```
plt.ylabel('X(f)')
```

```
plt.title('Fourier Transform')
```

```
plt.figure(figsize=(10,10))
```

```
plt.plot(t, x.real)
```

```
plt.grid
```

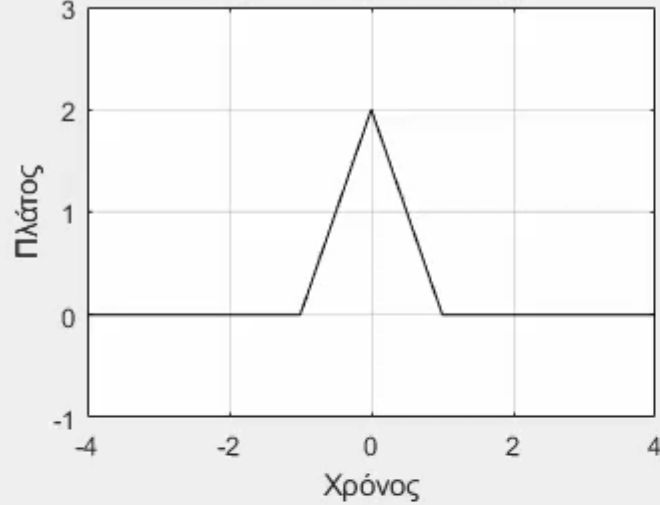
```
plt.xlabel('Time (s)')
```

```
plt.ylabel('x(t)')
```

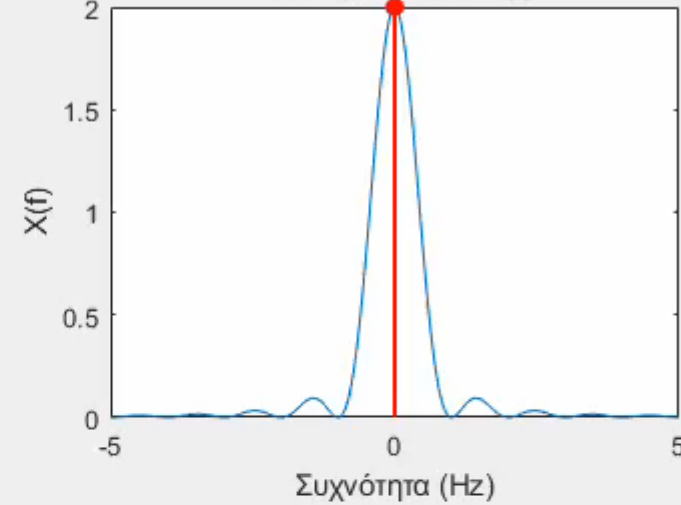
```
plt.title('Inverse Fourier Transform')
```

Μετασχηματισμός Fourier

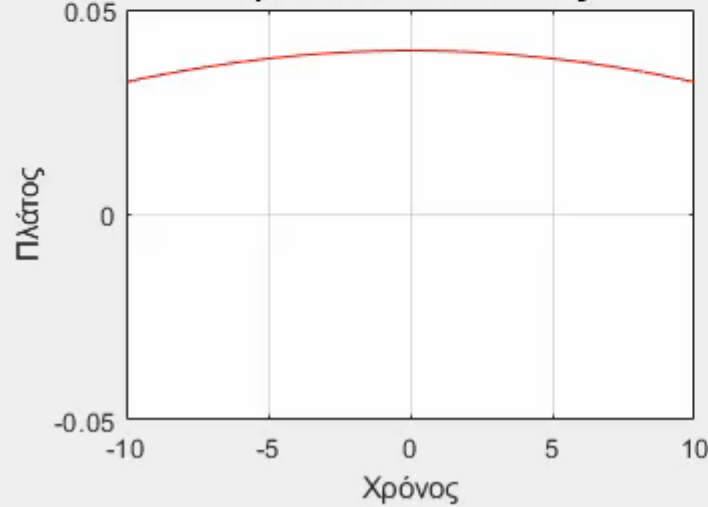
Αρχικό απεριοδικό σήμα



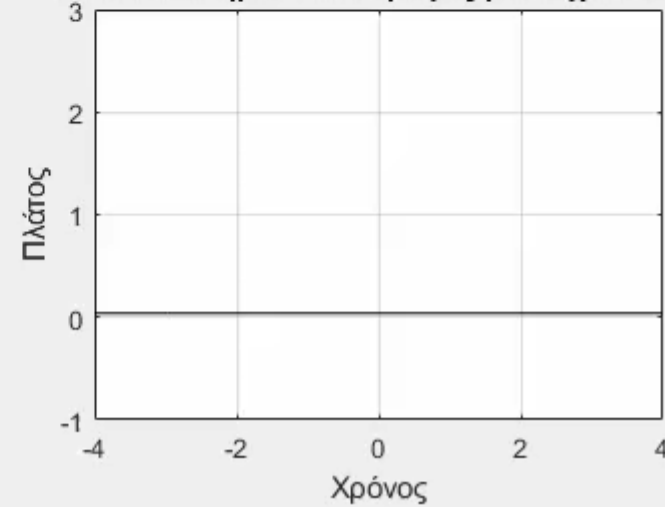
Μετασχ. Fourier $X(f)$



Ημίτονο από συνιστώσες



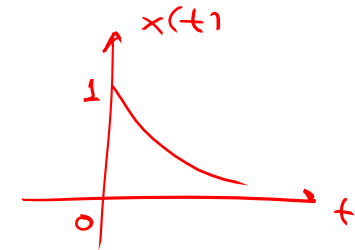
Συνθετικό σήμα - αντίστροφος μετασχ. Fourier



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$



Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot u(t) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \end{array} \right. = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot 1 \cdot dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = -\frac{1}{a+j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{a+j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) \quad \textcircled{1}$$

• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Πρέπει να υπολογίσουμε το

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j2\pi f t}$$

Λόγω των σχετικών δεξιά, καταλαβαίνω

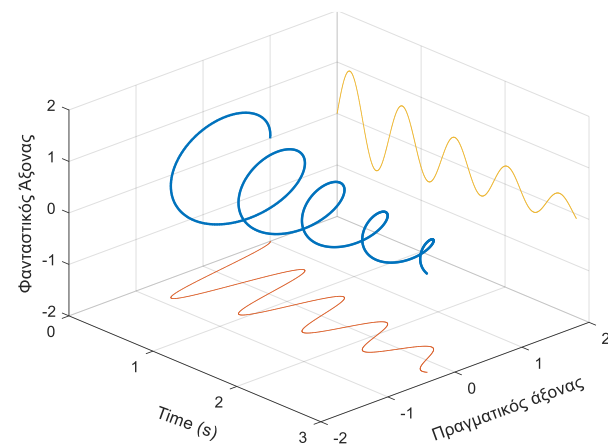
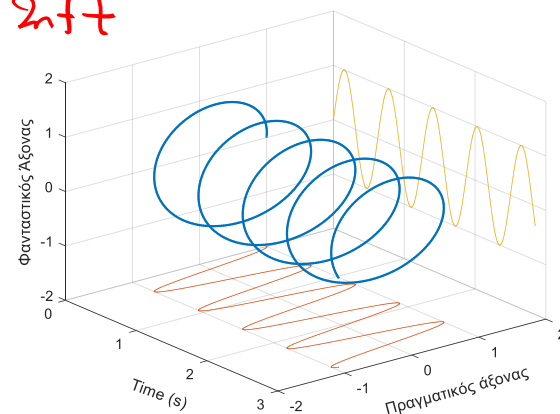
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} = 0 \quad (2)$$

Άρα

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}, \text{ λόγω } (1), (2).$$

Έτσι

$$e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0 \xrightarrow{f} \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Είναι $X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a-j2\pi f}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)}$

$$= \frac{a-j2\pi f}{|a+j2\pi f|^2} = \frac{a-j2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2}}_{X_R(f)} + j \underbrace{\frac{-2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2}}_{X_I(f)} \quad (3)$$

Επίσης,

$$|X(f)| = \left| \frac{1}{a+j2\pi f} \right| = \frac{|1|}{|a+j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}}$$

$$\angle X(f) = \varphi_x(f) = \tan^{-1} \left(\frac{X_I(f)}{X_R(f)} \right) \stackrel{(3)}{=} \tan^{-1} \frac{\cancel{a^2+4\pi^2 f^2}^{-2\pi f}}{\cancel{a^2+4\pi^2 f^2}^a}$$

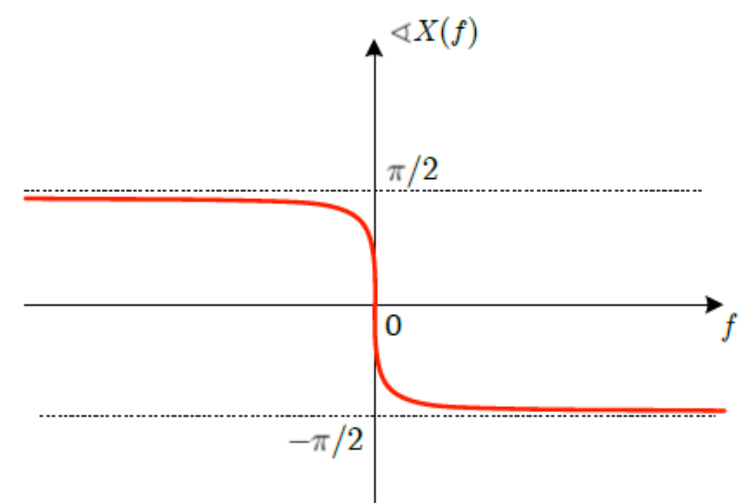
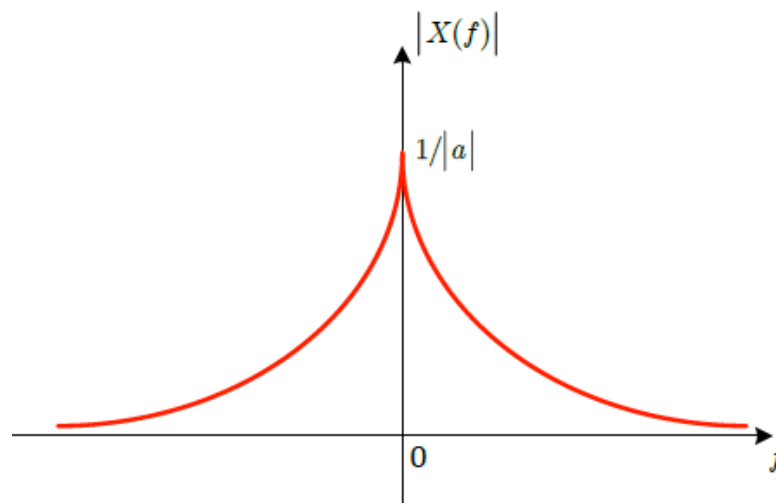
$$zz^* = |z|^2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

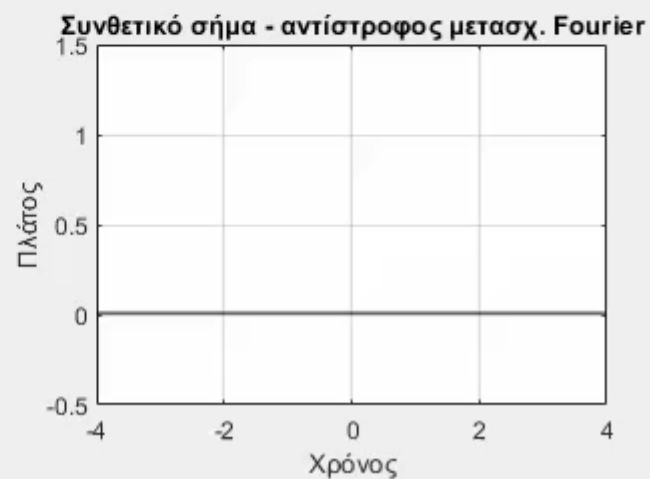
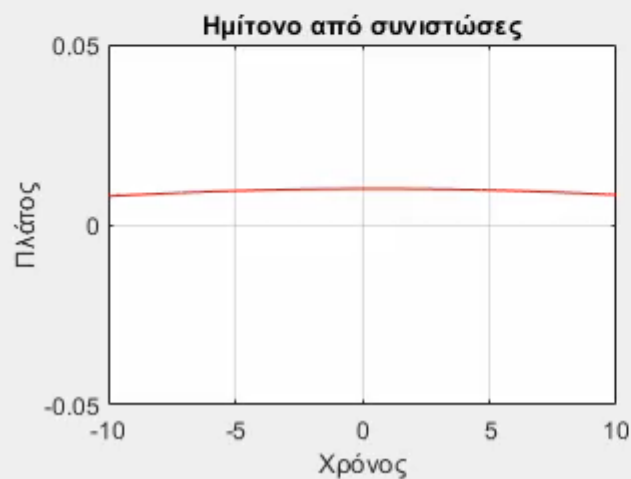
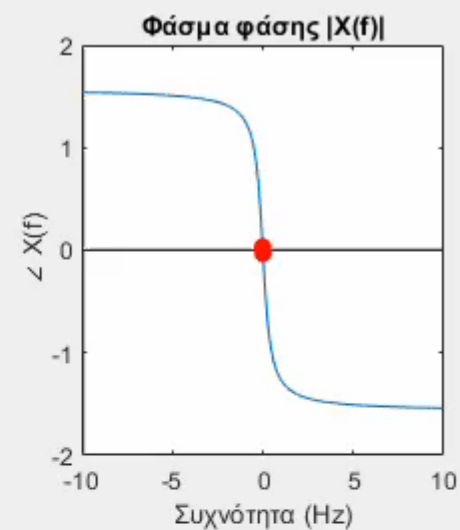
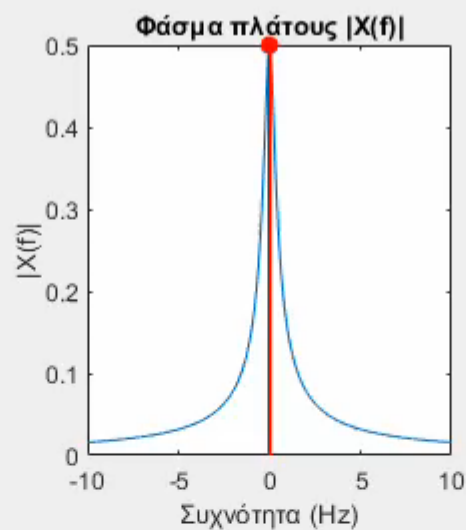
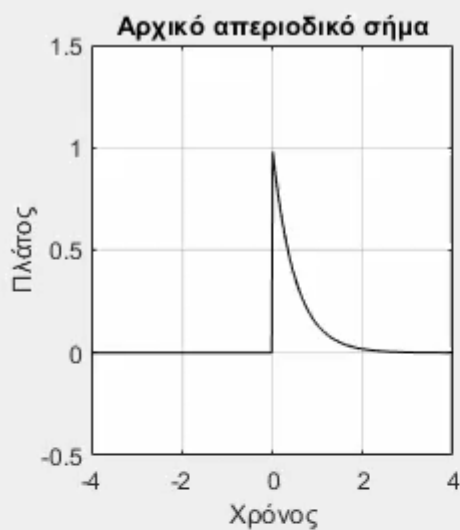
• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$= \tan^{-1} \left(\frac{-2\pi f}{a} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\pi f}{a} \right), \quad a > 0.$$



Μετασχηματισμός Fourier



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t)$

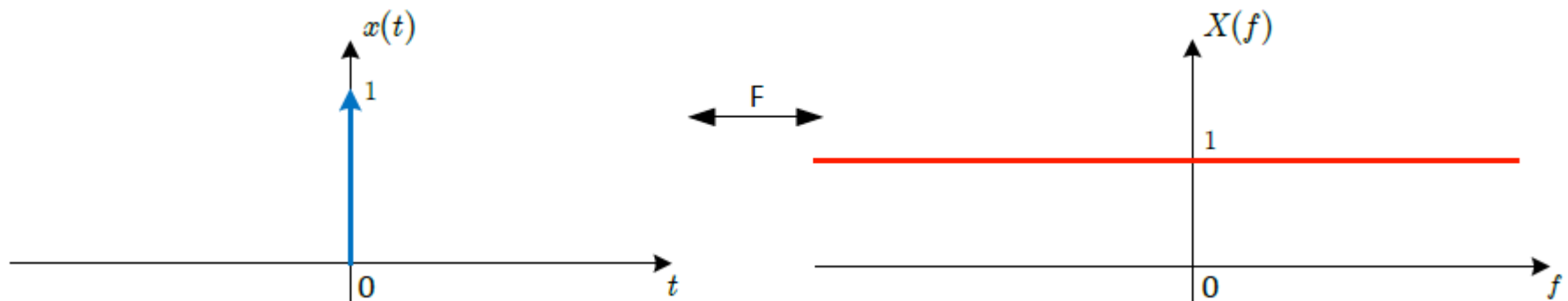
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

Είναι

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \underbrace{e^{-j2\pi f t}}_{g(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = g(t) \Big|_{t=0} = e^{-j2\pi f t} \Big|_{t=0} = 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1, \quad \forall f$$



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

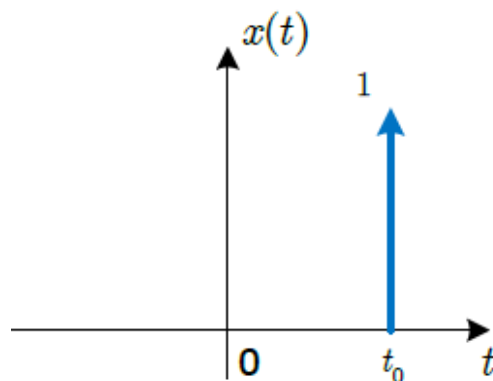
Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \underbrace{e^{-j2\pi ft}}_{g(t)} dt$$

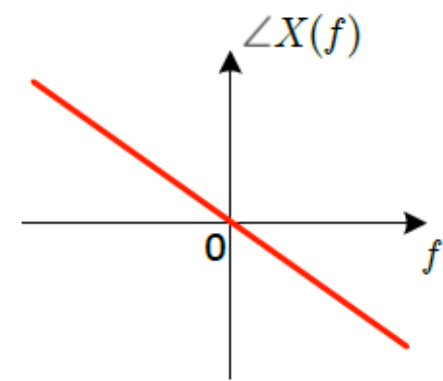
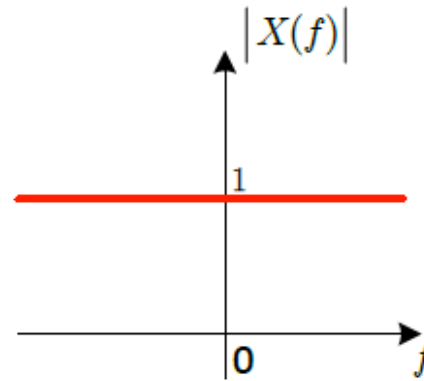
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) g(t) dt = g(t) \Big|_{t=t_0} = e^{-j2\pi ft_0}$$

Άρα

$$\delta(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi t_0 f} = 1 \cdot e^{-j2\pi t_0 f} = |X(f)| e^{j\varphi(f)}$$



$\longleftrightarrow F$



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) X(f) df = X(f_0)$$

○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $X(f) = \delta(f)$, καθώς και του σήματος $X(f) = \delta(f - f_0)$

Είναι

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \underbrace{e^{j2\pi f t}}_{g(f)} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) g(f) df = g(f) \Big|_{f=0} = e^{j2\pi f t} \Big|_{f=0} = e^0 = 1$$

Αρα

$$1, \forall t \xleftrightarrow{F} \delta(f)$$

Επίσης

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) \underbrace{e^{j2\pi f t}}_{g(f)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) g(f) df$$

$$= g(f) \Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f t} \Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t} / e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} \delta(f - f_0)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

