

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 8^Η

- Σειρές Fourier
- Ιδιότητες



• Σειρές Fourier

- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$



η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier**, αποτελούν το **εσωτερικό γινόμενο σε μια περίοδο μεταξύ του περιοδικού σήματος και των μελών της οικογένειας $\mathbb{E}$** , και δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0} \langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \in \mathbb{C}$$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει **και μιγαδικά** περιοδικά σήματα
- Οι συντελεστές Fourier προκύπτουν από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, δηλ. από την **προβολή** του σήματος $x(t)$ πάνω στις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις $e^{j2\pi k f_0 t}$
 - Το X_k μας λέει «πόσο» από το εκθετικό $e^{j2\pi k f_0 t}$ υπάρχει μέσα στο σήμα $x(t)$! ☺

- **Σειρές Fourier**
- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

$$X_{-k} = X_k^*$$

- Ας το δείξουμε

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \quad (1)$$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right]^* = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (x(t) e^{-j2\pi k f_0 t})^* dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt$$

- Όμως το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό, άρα $x(t) = x^*(t)$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right]^* = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \quad (2)$$

- Από τις σημειωμένες σχέσεις, ισχύει το ζητούμενο.

• Σειρές Fourier

- Όταν το σήμα είναι **πραγματικό**, μπορούμε να γράψουμε την **τριγωνομετρική Σειρά Fourier** ως:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

με $|X_k|$ το μέτρο και ϕ_k τη φάση του k -οστού συντελεστή

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_{-k} = X_k^* \quad X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [|X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}] \end{aligned}$$

$X_k = |X_k| e^{j\phi_k}$

$X_k^* = |X_k| e^{-j\phi_k}$

• Σειρές Fourier

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [|X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| [e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| [e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)}]$$

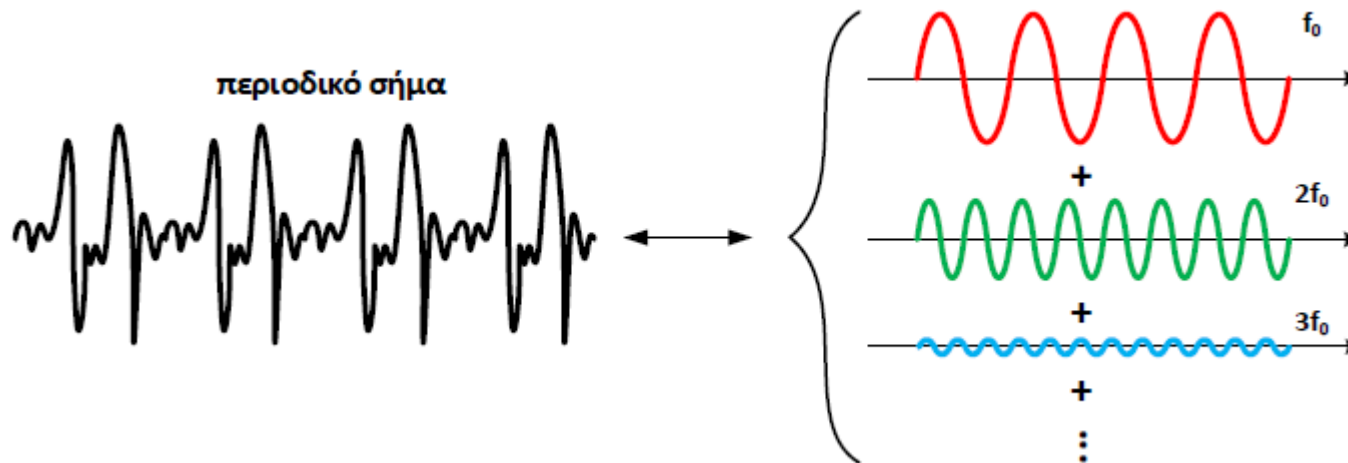
$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

• Προσοχή: η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα

- ... και πολλές φορές στην πράξη δεν είναι απλό (ή και «κομψό») να εξαχθεί από την εκθετική Σειρά Fourier
- Τώρα, το $2|X_k|$ μας λέει «πόσο» από το συνημίτονο $\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$ υπάρχει μέσα στο σήμα $x(t)$, και με πόση αρχική φάση ϕ_k ! 😊

• Σειρές Fourier

- Η τριγωνομετρική Σειρά Fourier αναλύει ένα **πραγματικό** περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε **απείρου** – εν γένει – **πλήθους** ημιτονοειδή με **συχνότητες** kf_0



- Η εκθετική Σειρά όμως, αναλύει ένα οποιοδήποτε * περιοδικό σήμα (**πραγματικό ή μη**) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε **απείρου** – εν γένει – **πλήθους** μιγαδικά εκθετικά σήματα με **συχνότητες** $kf_0, k \in \mathbb{Z}$
- Σημειώστε ότι η τιμή του συντελεστή για $k = 0$ υπολογίζεται συνήθως ξεχωριστά ως

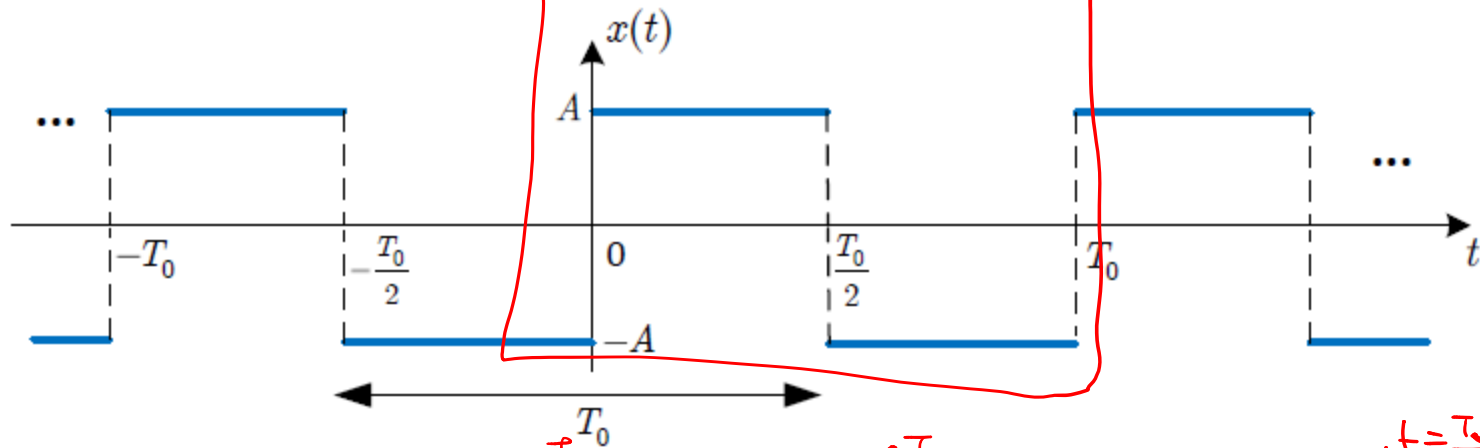
$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

• Παράδειγμα:

- Αναπτύξτε σε εκθετική και τριγωνομετρική Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης



Είναι

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A dt + \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-A) dt = \frac{1}{T_0} A t \Big|_{t=0}^{t=\frac{T_0}{2}} + \\ &+ (-A) t \cdot \frac{1}{T_0} \Big|_{t=\frac{T_0}{2}}^{t=T_0} = \frac{1}{T_0} A \left(\frac{T_0}{2} - 0 \right) - \frac{A}{T_0} \left(T_0 - \frac{T_0}{2} \right) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{X_0 = 0} \end{aligned}$$

• Παράδειγμα:

Είναι

$$\star \quad e^{\pm j2\pi k} = (e^{\pm j2\pi})^k = 1^k = 1$$

$$\star \quad f_0 T_0 = 1$$

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-A) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{A}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T_0} \cdot \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{A}{T_0} \cdot \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \\ &= -\frac{A}{j2\pi k f_0 T_0} \left(e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - 1 \right) + \frac{A}{j2\pi k f_0 T_0} \left(e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} \right) \\ &\stackrel{\star}{=} -\frac{A}{j2\pi k} \left(e^{-j\pi k} - 1 \right) + \frac{A}{j2\pi k} \left(e^{-j2\pi k} - e^{-j\pi k} \right) \\ &= \frac{A}{j2\pi k} \left(1 - e^{-j\pi k} + \cancel{e^{-j2\pi k}} - e^{-j\pi k} \right) \end{aligned}$$

1

• Παράδειγμα:

$$= \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k} + 1 - e^{-j\pi k})$$

$$= \frac{A}{j2\pi k} (2 - 2 \cdot e^{-j\pi k}) = \frac{A}{j\pi k} (1 - e^{-j\pi k})$$

$$= \frac{A}{j\pi k} (1 - (-1)^k) = \frac{A}{\pi k} (1 - (-1)^k) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{\pm j\pi k} = (e^{\pm j\pi})^k = \cos(\pi k) = (-1)^k$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Παρατηρούμε ότι

$$X_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k \text{ περιττή} \end{cases} \quad (1)$$

Σειριακή
Σ. Fourier

Άρα

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττή}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττή}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})}$$

Επίσης

$$x(t) = \cancel{X_0} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^{+\infty} 2 \left(\frac{2A}{\pi k} \right) \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) \quad (1)$$

Τριγωνομετρ.
Σ. Fourier

• Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι $X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, k περιττός, $X_0 = 0$

Η ωδική μορφή θα είναι

$$X_k = |X_k| e^{j\varphi_k} = \frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττός}, \quad X_0 = 0 = 0 e^{j0}$$

↖ $-\infty < k < +\infty$, άρα θέλουμε $|\cdot|$.

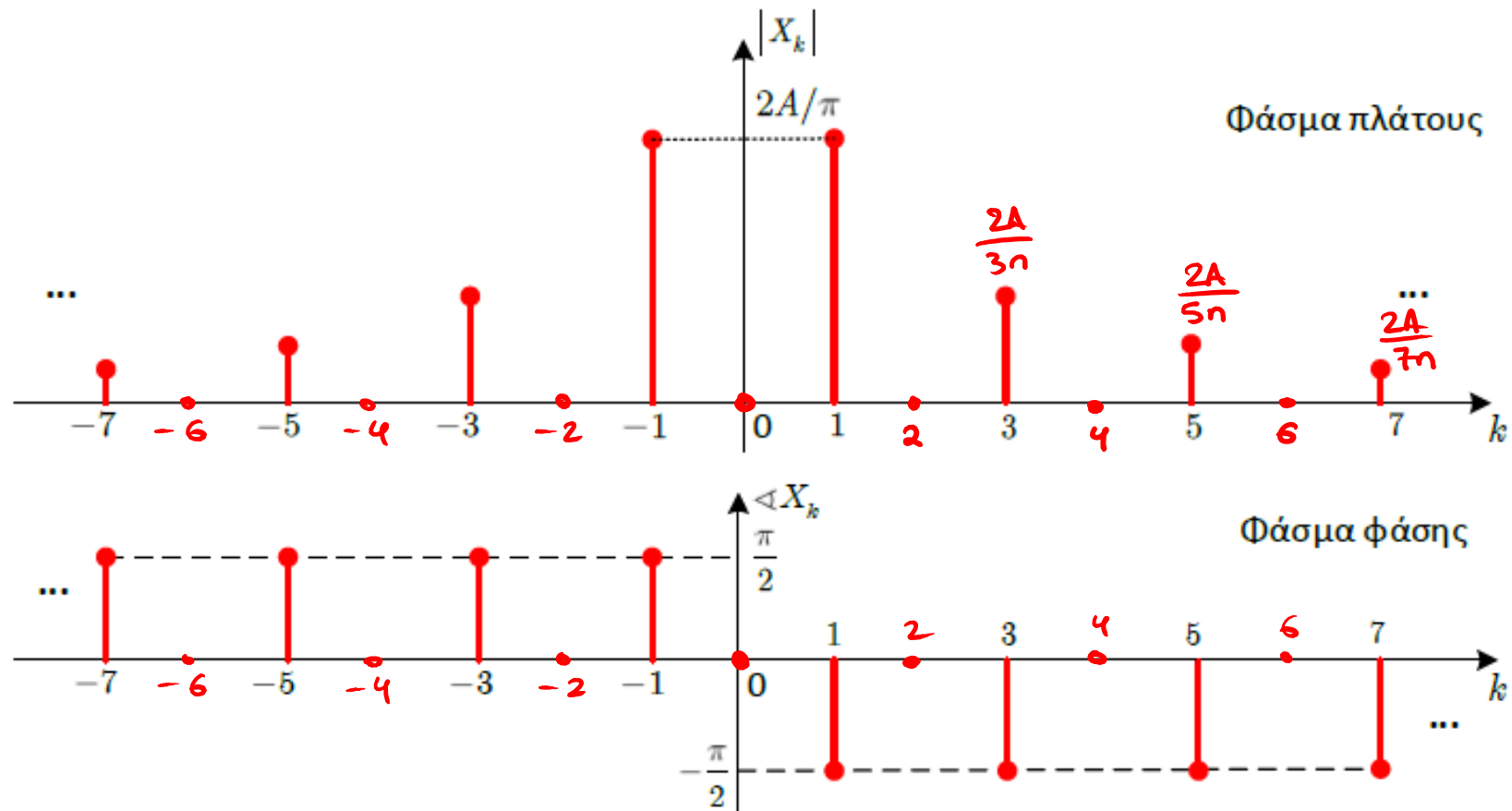
Ας σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης. Ο πιο εύκολος τρόπος είναι να σχεδιάσουμε τα φάσματα για $k \geq 0$, και μετά λόγω άρτιας* και περιττής* συμμετρίας αντιστοιχά (πλάτος και φάση), να σχεδιάσουμε τα φάσματα για $k < 0$.

Άρα για $k \geq 0$,

$$|X_k| = \begin{cases} 0, & k=0, k \text{ άρτια} \\ \frac{2A}{\pi k}, & k \text{ περιττός} \end{cases}, \quad \varphi_k = \begin{cases} 0, & k=0, k \text{ άρτια} \\ -\frac{\pi}{2}, & k \text{ περιττός} \end{cases}$$

* $x(t) \in \mathbb{R}$!

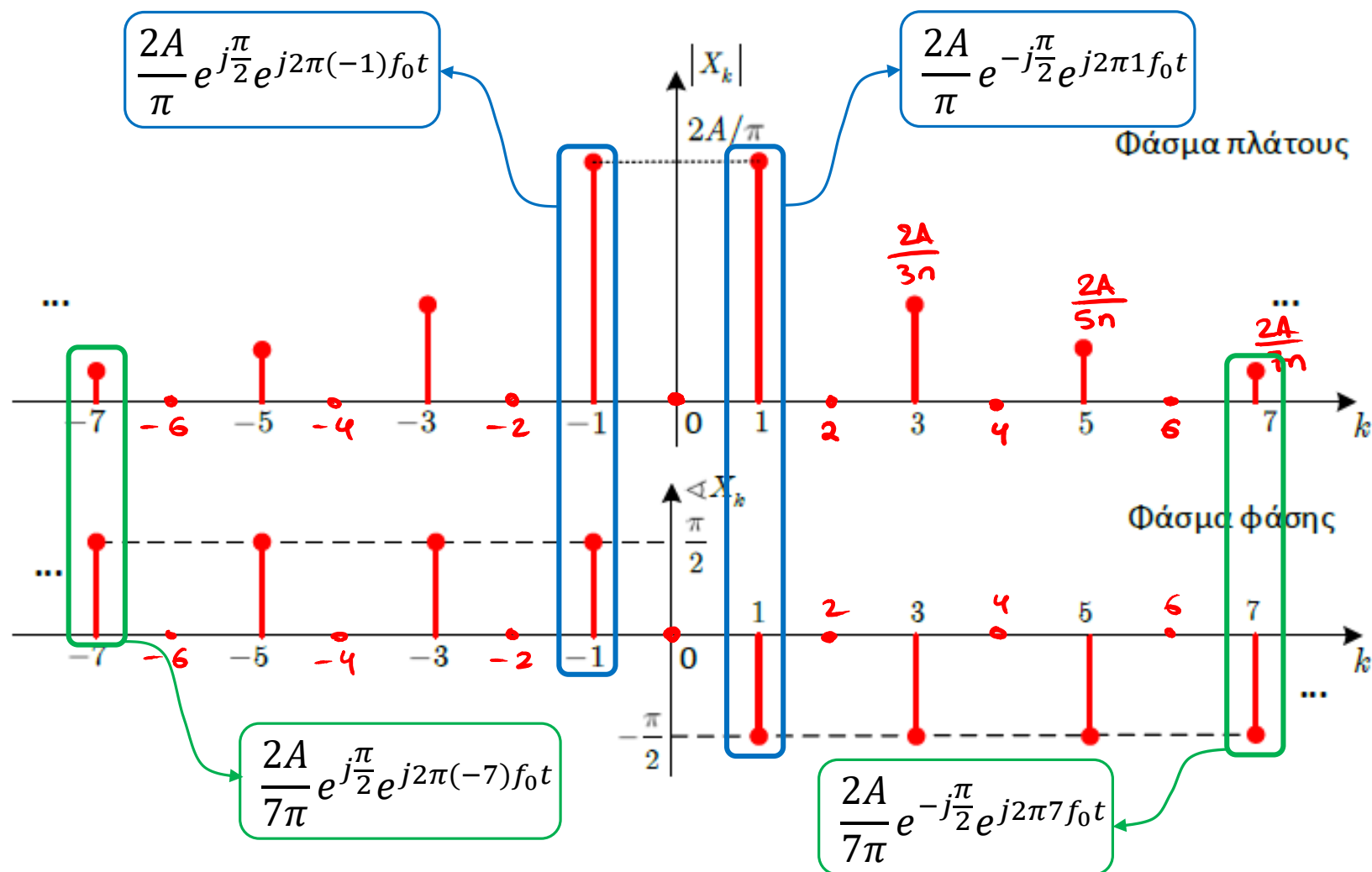
• Παράδειγμα:



- Προτιμούμε να **αναπαριστούμε τον οριζόντιο άξονα σε «διακριτές συχνότητες kf_0 »** αντί ως ένα συνεχή άξονα του f , όπως κάναμε στα αρχικά παραδείγματα
 - Χρησιμοποιούμε το **δείκτη k** της θεμελιώδους συχνότητας για **βαθμονόμηση του άξονα**
- Οι συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**

• Παράδειγμα:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta)$$



$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4A}{7\pi} \cos\left(2\pi 7f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

- Σειρές Fourier

- Python code

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameters
A = 2
T0 = 3
f0 = 1/T0
N = 41
k = np.arange(-N,N+2,2)

# Time axis
dt = 0.001
t = np.arange(0, 4*T0, dt)

# Fourier Coefficients
Xk = (2.0*A/(np.pi*k)) * np.exp(-1j*np.pi/2.0)
X0 = 0

# Synthesis
x = np.zeros(t.shape)

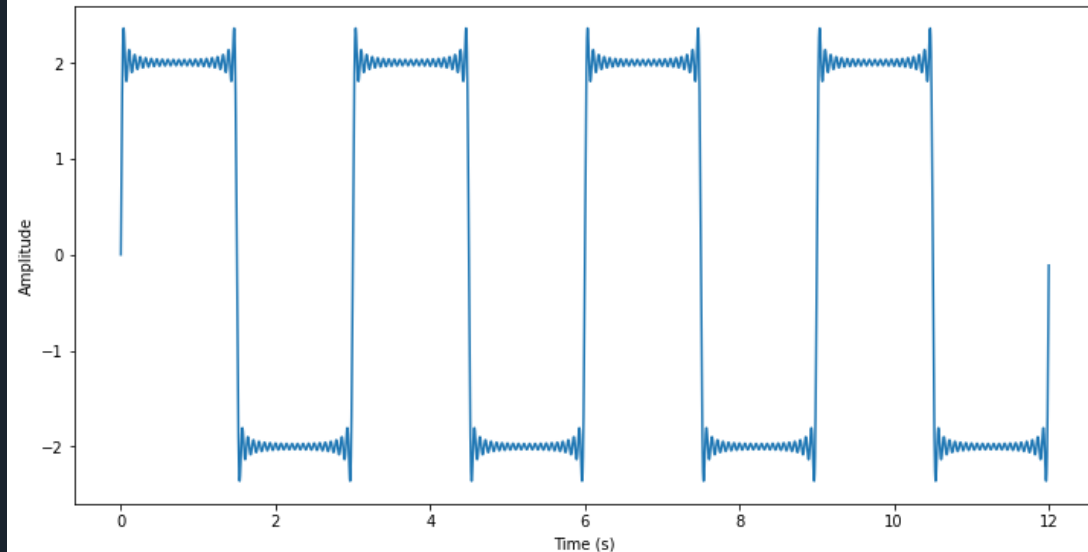
for i in range(0,len(k)):
    x = x + Xk[i]*np.exp(1j*2*np.pi*k[i]*f0*t)

x = x + X0
plt.plot(t,x)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

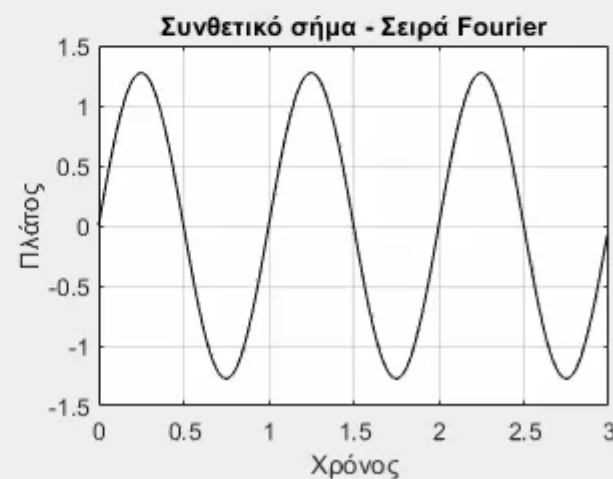
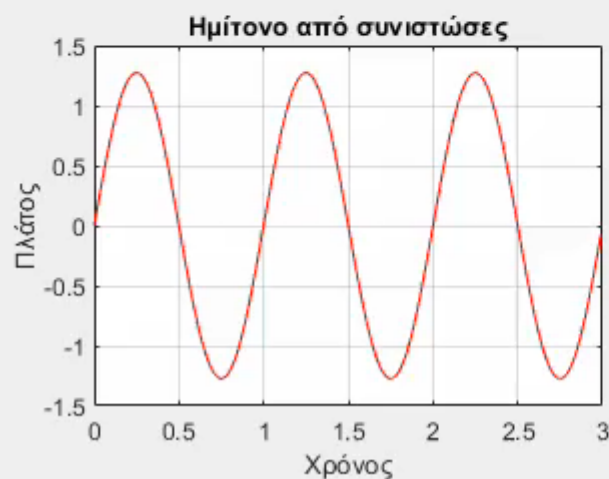
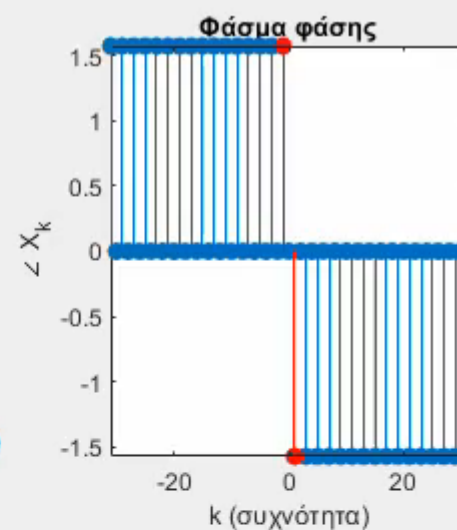
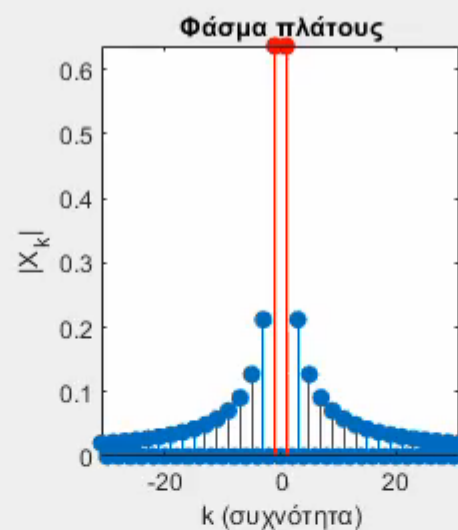
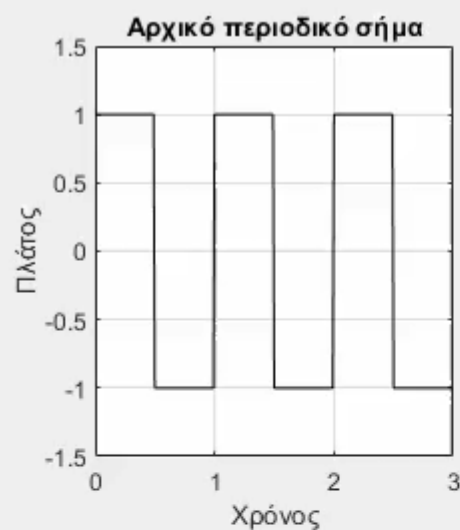
$$\sum_{k=-41}^{41} X_k e^{j\frac{2\pi k}{3}t}$$

k περιπτώ

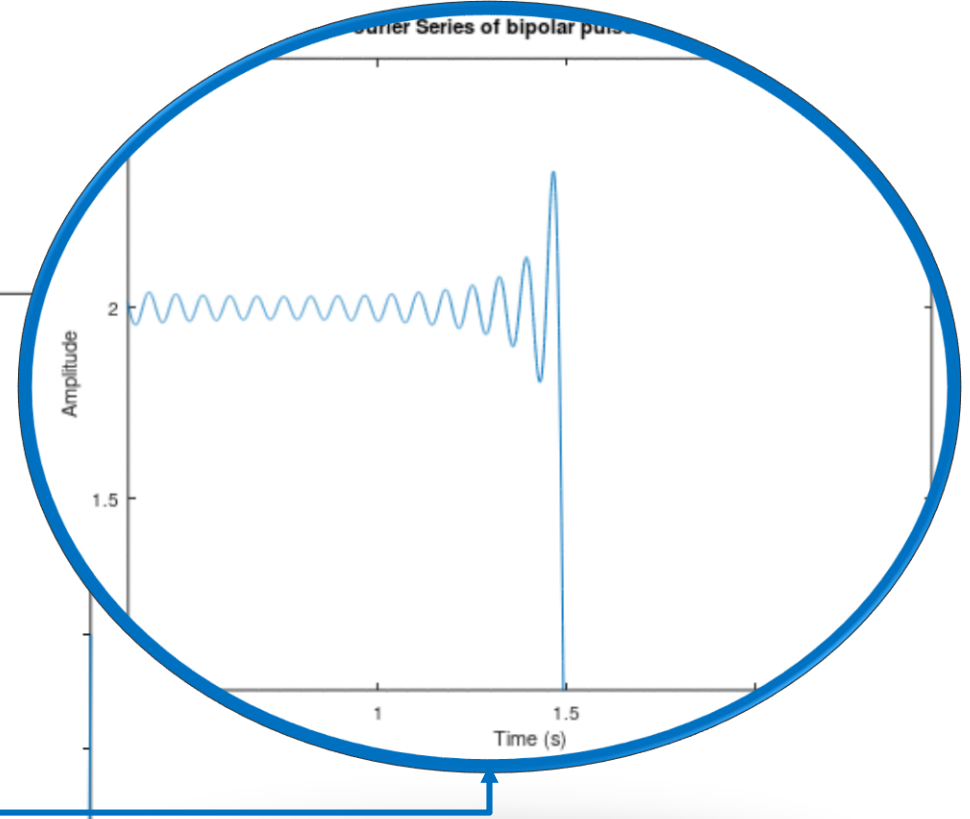
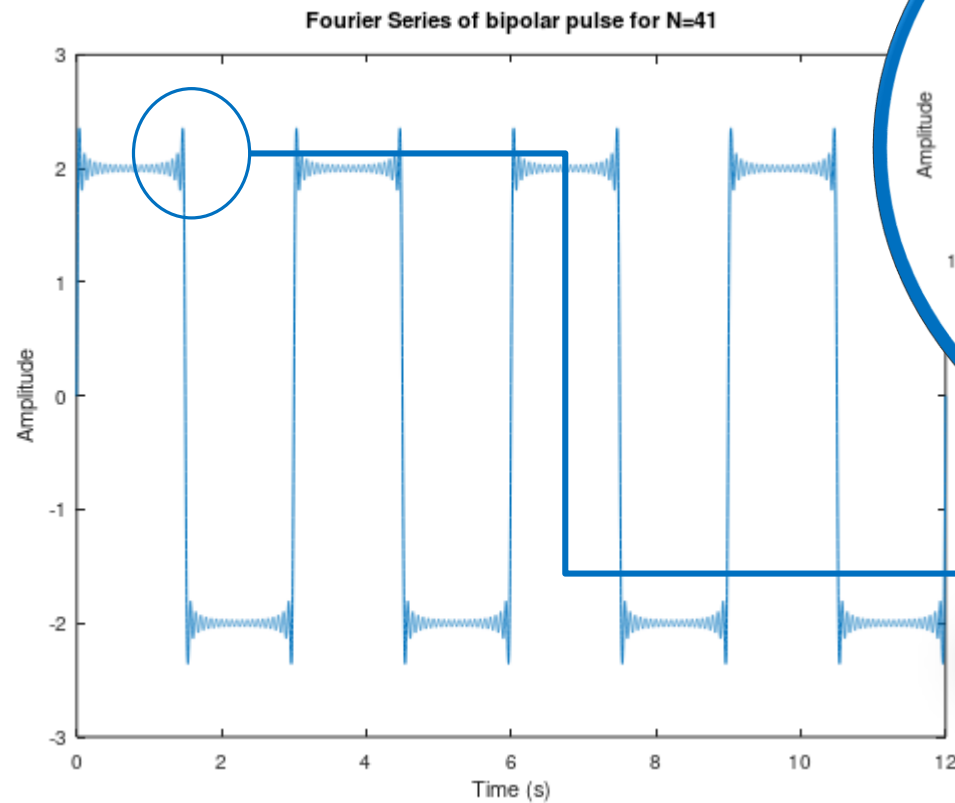
Fourier Series



• Σειρές Fourier



• Σειρές Fourier



• Φαινόμενο Gibbs

- **Σειρές Fourier**
- **Φαινόμενο Gibbs**
- Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν!
- Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο...
 - ...εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος $x(t)$ εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας t_0 :

$$\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

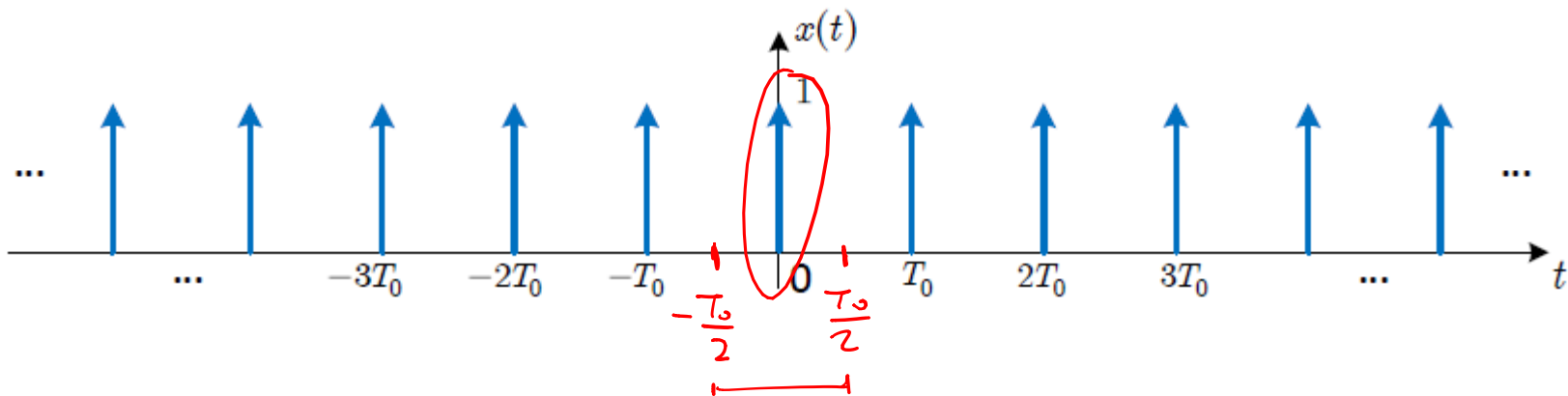
- Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων χωρίς ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει **ομοιόμορφα** σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος
- Ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να **μην** είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)

• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) f(t) dt = f(\mp t_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0} e^0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow \boxed{X_k = \frac{1}{T_0}}$$

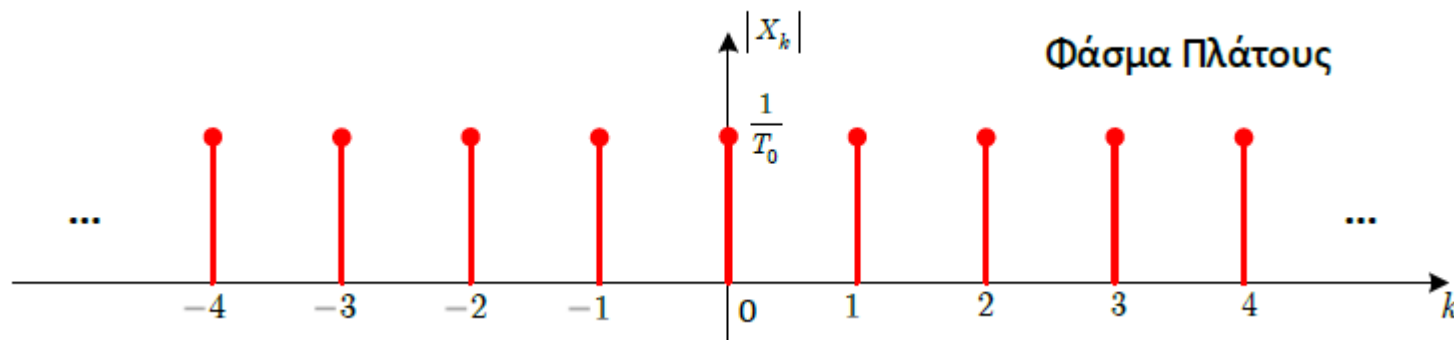
• Παράδειγμα:

Λρα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_0 t}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{T_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \cos(2\pi k f_0 t) \\ &= \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(2\pi k f_0 t) \end{aligned}$$



• Σειρές Fourier

• Python code

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameters
T0 = 2
f0 = 1/T0
N = 40
k = np.arange(-N, N+1, 1)

# Time axis
dt = 0.0001
t = np.arange(0, 3*T0, dt)

# Fourier Coefficients
X0 = 1/T0
Xk = 1/T0 * np.ones(k.shape)

# Synthesis
x = np.zeros(t.shape)

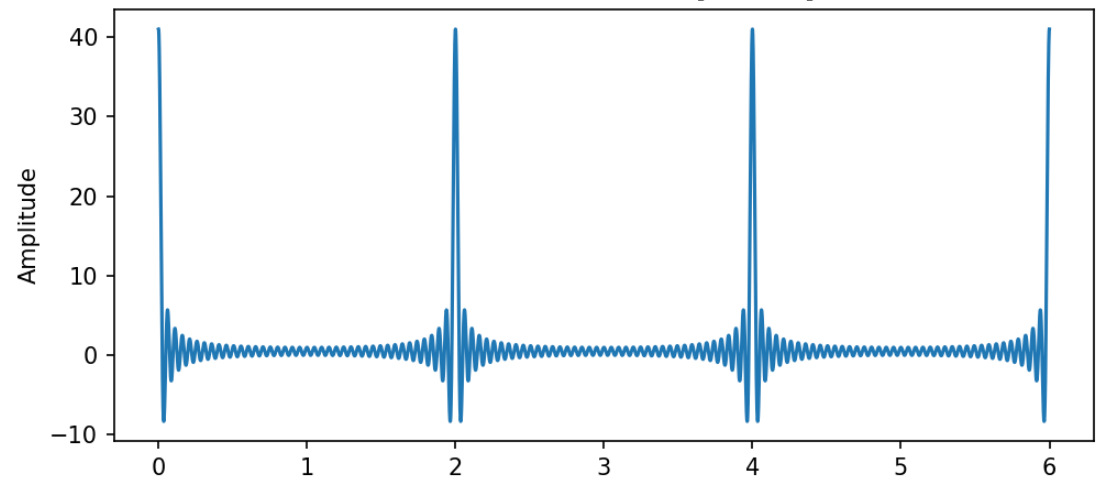
for i in range(0, len(k)):
    x = x + Xk[i] * np.exp(1j*2*np.pi*k[i]*f0*t)

# Adding the constant X0
x = x + X0

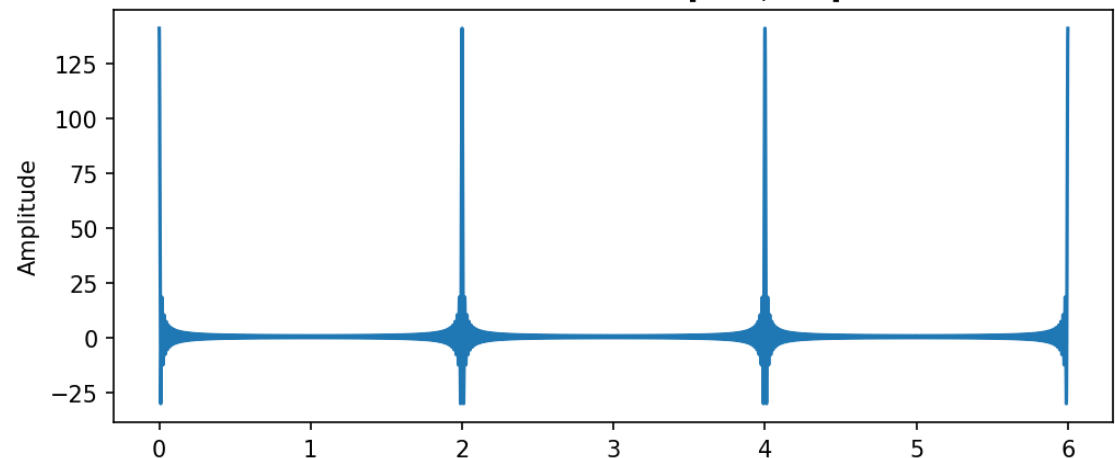
# Figures
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.title('Fourier Series for k = [-40, 40]')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{2} e^{j\pi k t}$$

Fourier Series for k = [-40, 40]



Fourier Series for k = [-140, 140]



• «Γνωστές» Σειρές Fourier

- Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

Συνήθεις Σειρές Fourier

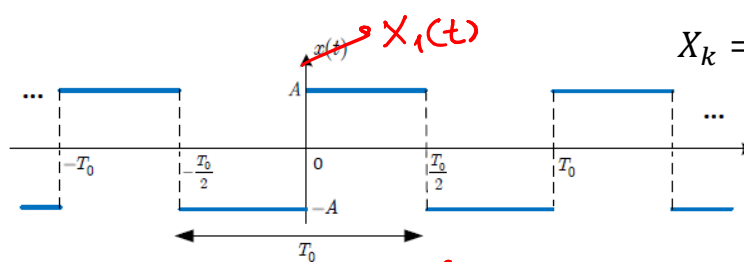
Περιοδικό σήμα

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

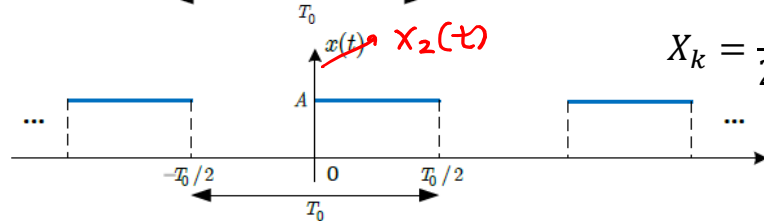
$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{2A}{T_0}t, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$$

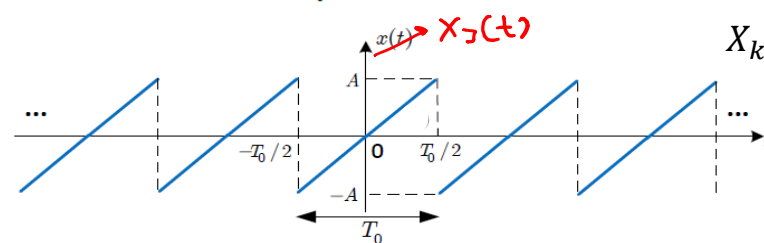
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



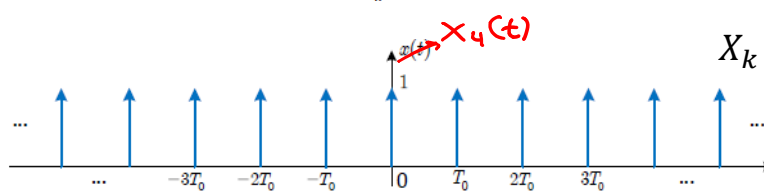
$$X_k = \frac{A}{k\pi} (1 - (-1)^k) e^{-\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{A}{2k\pi} (1 - (-1)^k) e^{-\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{1}{T_0}, \forall k$$



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k
	$y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X_{-k}^*
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	X_k , με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγωγή	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X_{-k}^*, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ X_k = X_{-k} , \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt$	$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k ^2$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k
	$y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$

Απόδειξη:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow Z_k = ?$$

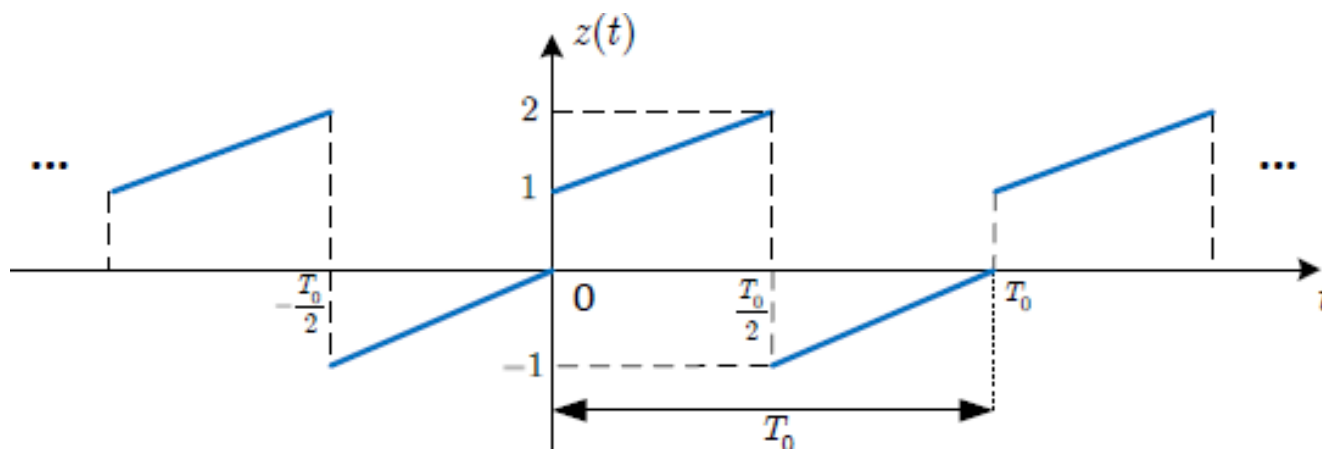
$$Z_k = \frac{1}{T_0} \int z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int Ax(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int By(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$= A \frac{1}{T_0} \int x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + B \frac{1}{T_0} \int y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

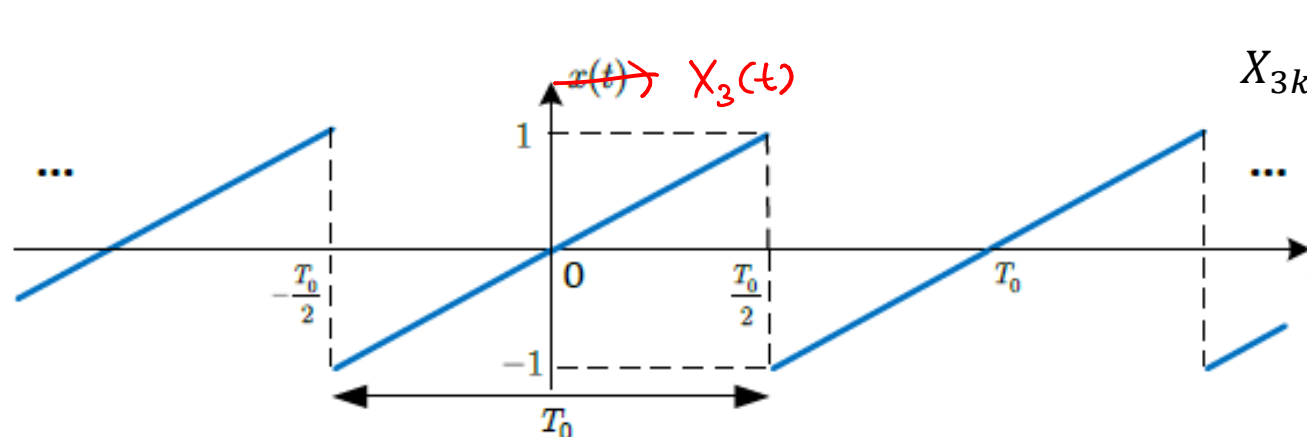
$$= AX_k + BY_k$$

• Ιδιότητες

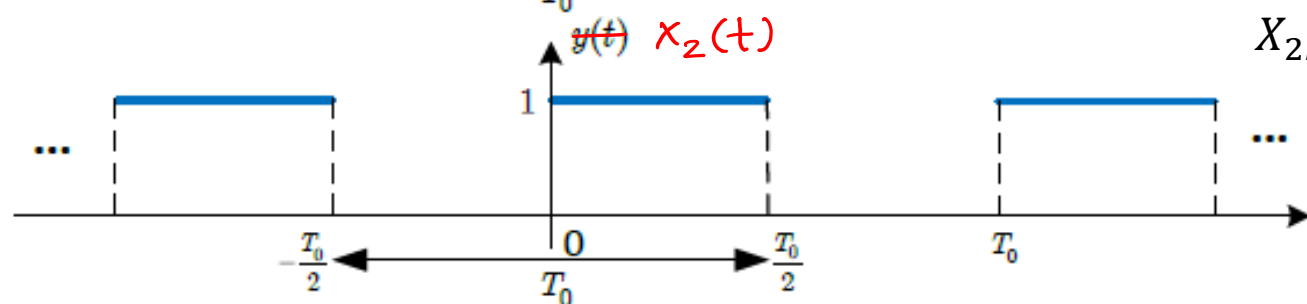


$$Z_k = ?$$

$$Z_k = X_{2k} + X_{3k}$$



$$X_{3k} = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_{2k} = \frac{1}{2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

• Python κώδικας

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Parameters
```

```
A = 2
```

```
T0 = 2
```

```
f0 = 1/T0
```

```
N = 20
```

```
k = np.arange(-N,0,1, dtype=float)
```

```
k = np.concatenate((k, np.arange(1,N+1,1, dtype=float)))
```

```
# Ground truth
```

```
dt = 0.001
```

```
t1 = np.arange(0,T0/2, dt)
```

```
t2 = np.arange(T0/2, T0, dt)
```

```
z1 = 1 + t1
```

```
z2 = -2 + t2
```

```
z = np.concatenate((z1,z2))
```

```
z = np.concatenate((z,z))
```

```
t = np.arange(0, 2*T0, dt)
```

```
t = np.expand_dims(t,1)
```

```
k = np.expand_dims(k,1)
```

```
# Fourier Coefficients
```

```
Xk = 1/(np.pi*k) * np.power(-1,k) * np.exp(1j*np.pi/2.0)
```

```
E = np.exp(1j*2*np.pi*f0*np.multiply(t, k.T))
```

```
x = Xk.T @ E.T
```

```
Yk = 1/(2*np.pi*k) * (1 - np.power(-1,k)) * np.exp(-1j*np.pi/2.0)
```

```
y = Yk.T @ E.T
```

```
# x(t) + y(t)
```

```
z_FS = x + y
```

```
Z0 = 1/2
```

```
z_FS = Z0 + z_FS
```

```
plt.figure(figsize=(12,6))
```

```
plt.plot(t,z, linewidth=4)
```

```
plt.title('Fourier Series')
```

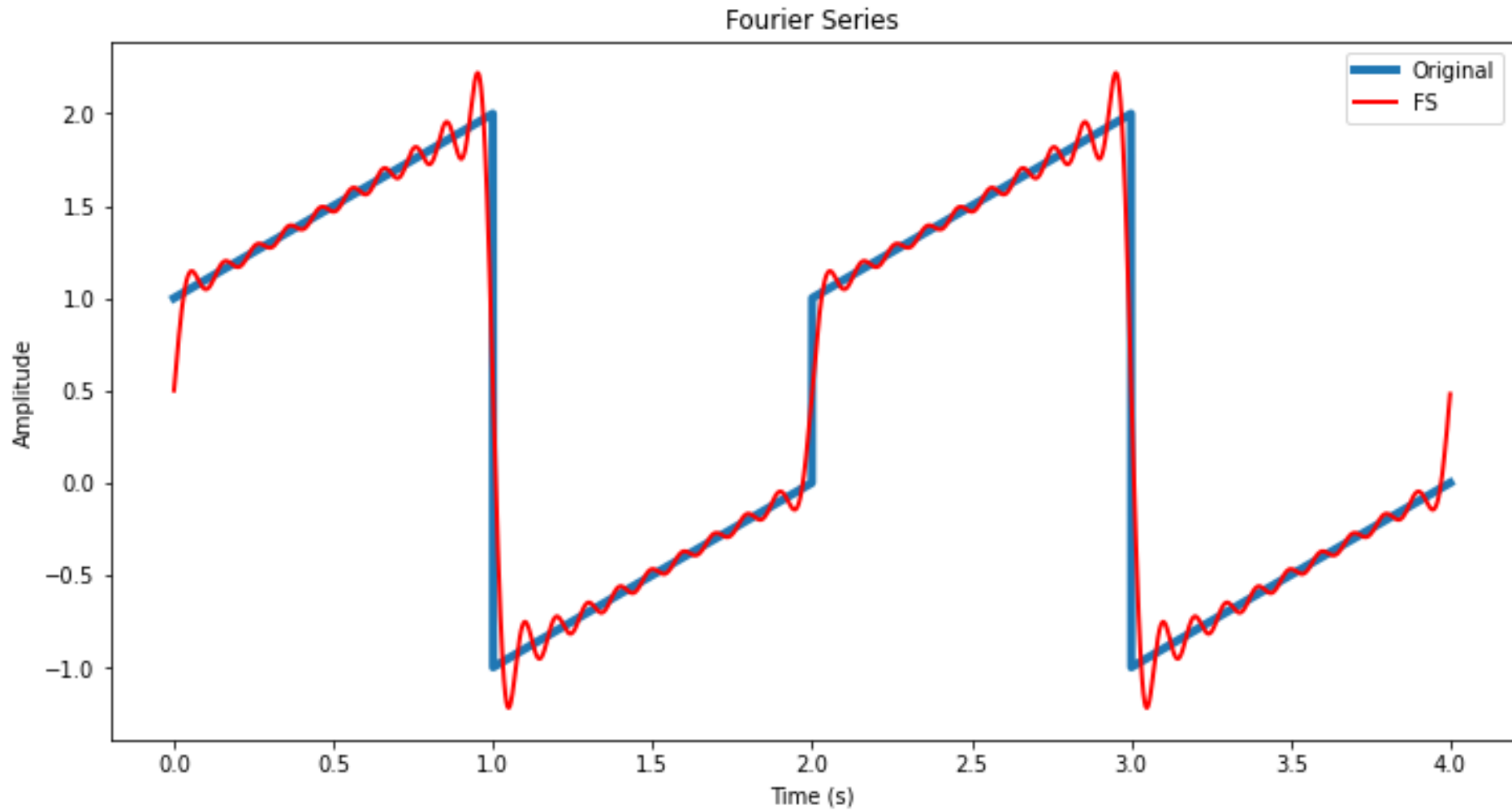
```
plt.xlabel('Time (s)')
```

```
plt.ylabel('Amplitude')
```

```
plt.plot(t, z_FS.T, 'r', linewidth=2)
```

```
plt.legend(['Original', 'FS'])
```

- Ιδιότητες
- Python κώδικας



• Ιδιότητες

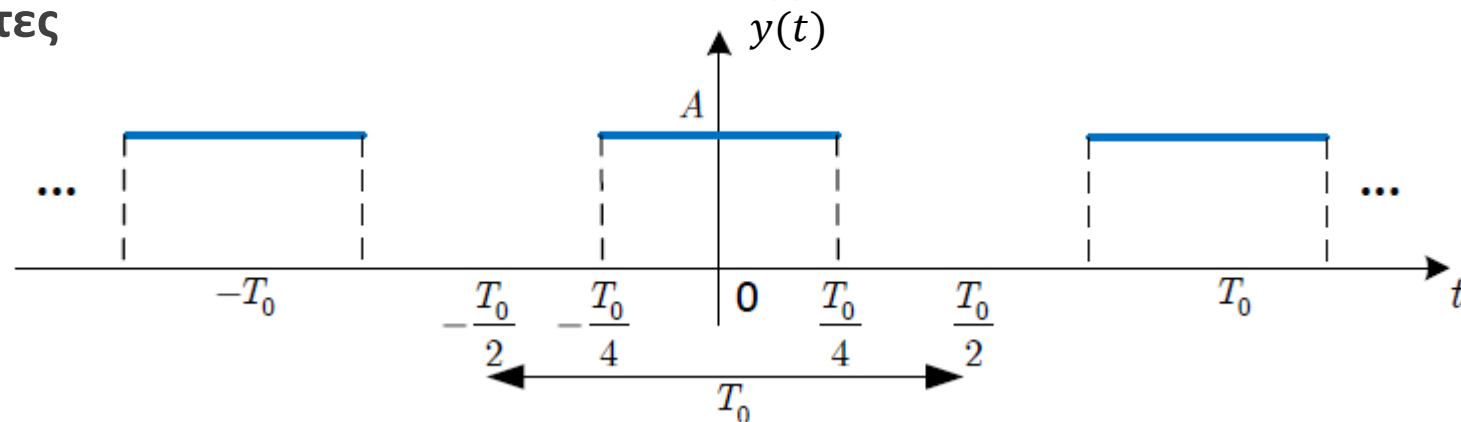
Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k
	$y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	Y_k
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t - t_0) \rightarrow Z_k = ?$$

$$\begin{aligned}
 Z_k &= \frac{1}{T_0} \int x(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = t - t_0 \Rightarrow du = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{T_0} \int x(\mathbf{u}) e^{-j2\pi k f_0 (\mathbf{u} + \mathbf{t}_0)} du \\
 &= \frac{1}{T_0} \int x(u) e^{-j2\pi k f_0 u} e^{-j2\pi k f_0 t_0} du \\
 &= e^{-j2\pi k f_0 t_0} \left[\frac{1}{T_0} \int x(u) e^{-j2\pi k f_0 u} du \right] \\
 &= e^{-j2\pi k f_0 t_0} X_k
 \end{aligned}$$

• Ιδιότητες



Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t)$ είναι το $x_2(t)$ μετατοπισμένο αριστερά κατά $\frac{T_0}{4}$, δηλ.

$$X_{2k} = \frac{1}{2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$y(t) = x_2\left(t + \frac{T_0}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} Y_k &= X_{2k} \cdot e^{-j2\pi k f_0 \left(-\frac{T_0}{4}\right)} \\ &= X_{2k} \cdot e^{j\cancel{2\pi k f_0} \frac{T_0}{4}} \\ &= X_{2k} \cdot e^{j\frac{\pi k}{2}} \end{aligned}$$

• Ιδιότητες

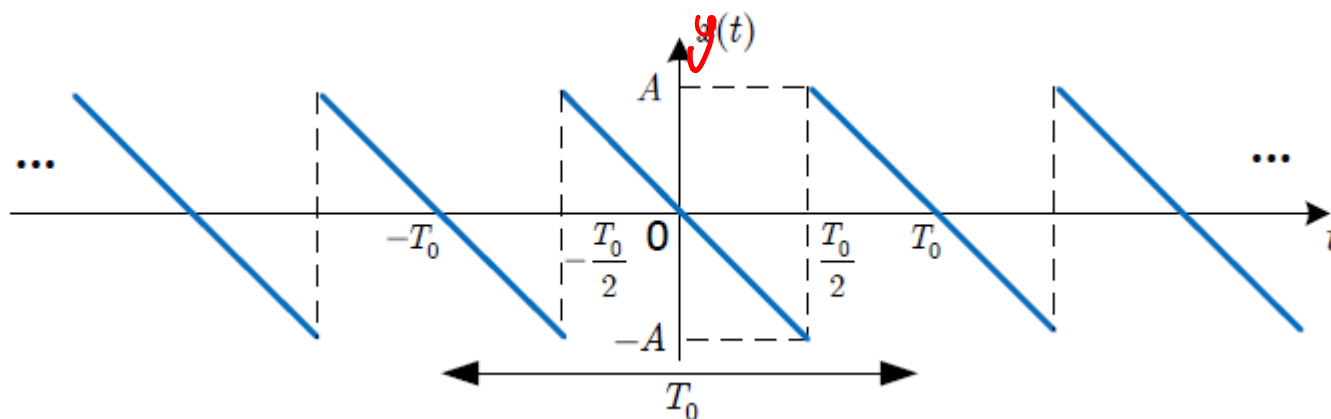
Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k
	$y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	Y_k
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}

Απόδειξη:

$$z(t) = x(-t) \rightarrow Z_k = ?$$

$$\begin{aligned}
 Z_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 \left. \begin{aligned} &\textcolor{red}{u} = -t \Rightarrow du = -dt \\ &u_1 = 0, \quad u_2 = -T_0 \end{aligned} \right\} &= -\frac{1}{T_0} \int_0^{-T_0} x(\textcolor{red}{u}) e^{j2\pi k f_0 \textcolor{red}{u}} du \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^0 x(u) e^{j2\pi k f_0 u} du \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^0 x(u) e^{-j2\pi(-k) f_0 u} du \\
 &= X_{-k}
 \end{aligned}$$

• Ιδιότητες



Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t)$ είναι το $x_3(t)$, χρονικά ανεστραφμένο, δηλ.
 $y(t) = x_3(-t)$.

$$X_{3k} = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ Y_k &= X_{3k} \Big|_{k=-k} \\ &= \frac{A}{(-k)\pi} (-1)^{-k} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{A}{\pi k} (-1)^k \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k
	$y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	Y_k
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	X_k , με περίοδο T_0/a

Απόδειξη:

$$\frac{\lambda}{T_0} \rightarrow \frac{a}{T_0}$$

$$z(t) = x(at), a > 0 \rightarrow Z_k = ?$$

$$Z_k = \frac{1}{T_0/a} \int_0^{T_0/a} x(at) e^{-j2\pi k a f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 u} du = X_k$$

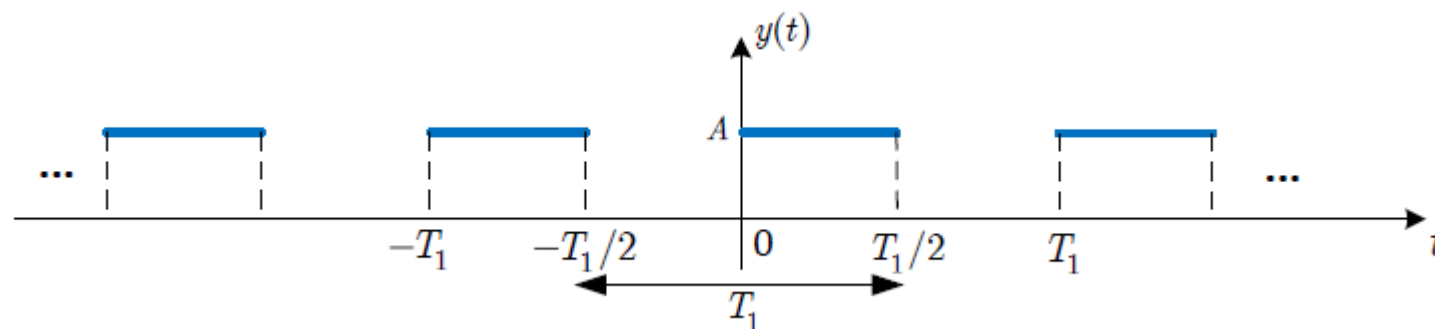
$$u = at \Rightarrow du = a dt$$

$$u_1 = 0, u_2 = T_0$$

Π.χ.

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases} \Rightarrow x_{T_0}(at) = \begin{cases} at, & 0 < at < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < at < T_0 \end{cases} = \begin{cases} at, & 0 < t < \frac{T_0}{2a} \\ 0, & \frac{T_0}{2a} < t < \frac{T_0}{a} \end{cases}$$

• Ιδιότητες



Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t)$ είναι το $x_2(t)$ αλλά με διαφορετική περίοδο, T_1 , δηλ.

$$y(t) = x_2(t) \text{ με } T_0 = T_1$$

Οι συντελεστές Fourier ΔΕΝ αλλάζουν!

$$Y_k = X_{2k}$$

Όπως αλλάζει η περίοδος του σήματος, T_1 .

• Ιδιότητες

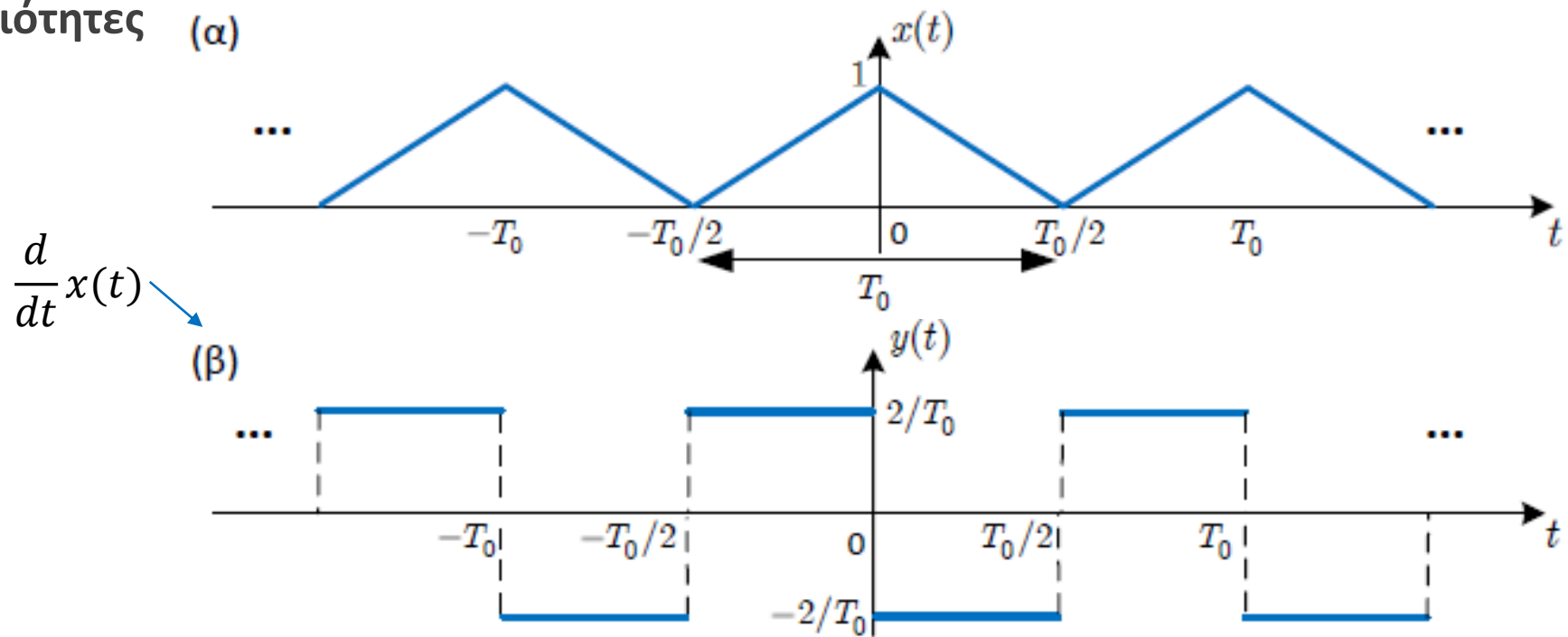
Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Παραγωγή	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$

Απόδειξη:

$$z(t) = \frac{d}{dt} x(t) \rightarrow Z_k = ?$$

$$\begin{aligned}
 Z_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \frac{d}{dt} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) (-j2\pi k f_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0} + j2\pi k f_0 \left[\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right] \\
 &= \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0} + j2\pi k f_0 X_k = \frac{1}{T_0} (x(0) - x(T_0)) + j2\pi k f_0 X_k = j2\pi k f_0 X_k
 \end{aligned}$$

• Ιδιότητες (α)



Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t) = x'(t)$ είναι το σήμα $x_1(t)$ από τα γνωστά μας αλλά με δύο αλλαγές.

- Το $y(t)$ είναι το $x_1(t)$ με "-" η προστά.
- $A \rightsquigarrow \frac{2}{T_0}$

• Ιδιότητες

Αρα

$$Y_k = \frac{-\frac{2}{T_0}}{\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi k T_0} ((-1)^k - 1) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης

$$X_k = \frac{Y_k}{j 2\pi k f_0} = \frac{\cancel{2}}{j \cancel{2\pi k f_0} \pi k \cancel{T_0}} ((-1)^k - 1) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{j \pi^2 k^2} ((-1)^k - 1) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1) \underbrace{e^{-j\pi}}_{-1}$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττό} \quad (0, \text{ για } k \text{ άρτιο})$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

- Ιδιότητες
- Python κώδικας

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameters
A = 1
T0 = 3
f0 = 1/T0
N = 21
k = np.arange(-N,0,2, dtype=float)
k = np.concatenate((k, np.arange(1,N+2,2, dtype=float)))

# Ground truth
dt = 0.001
t = np.arange(0, 4*T0, dt)

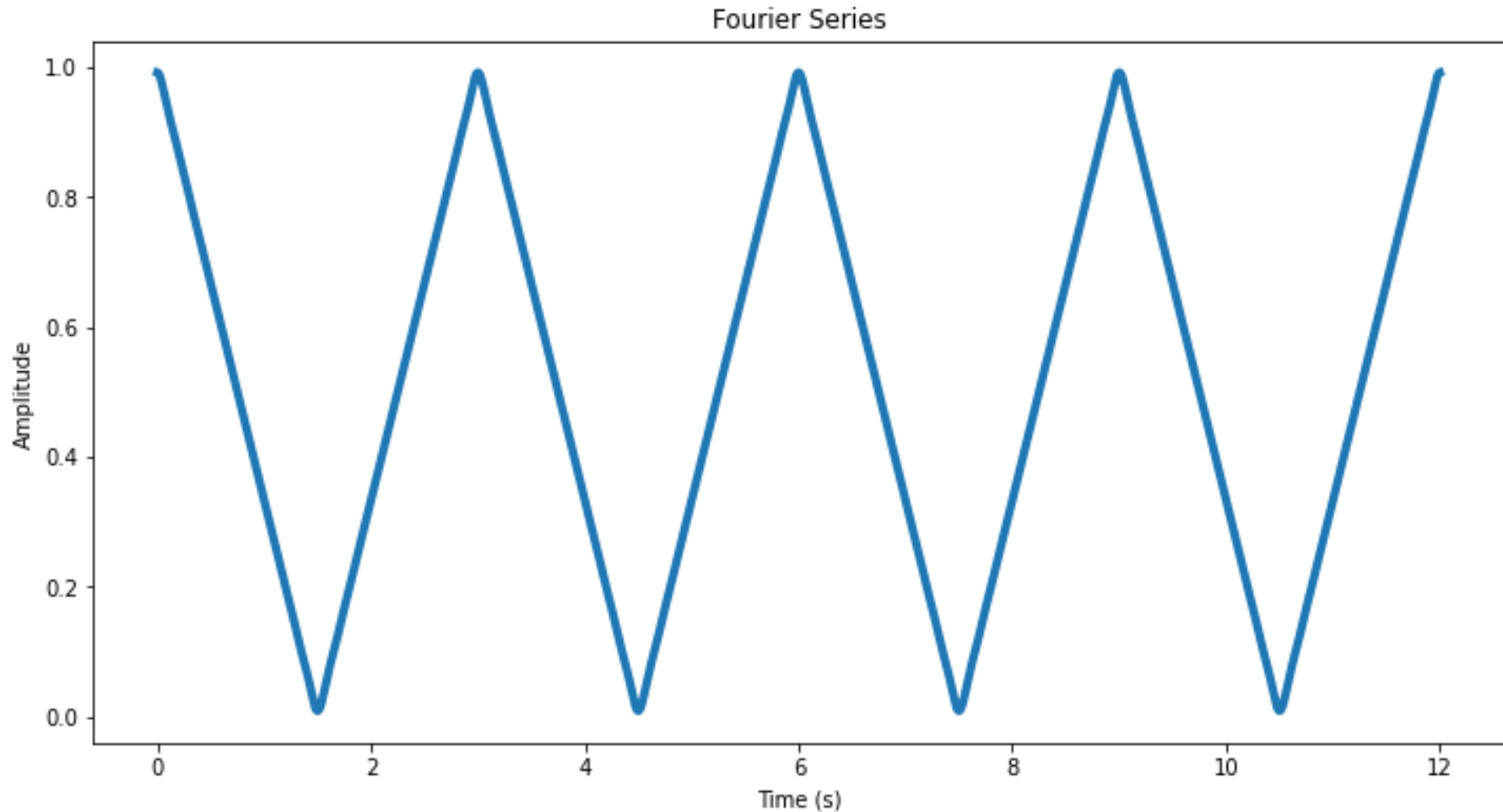
t = np.expand_dims(t,1)
k = np.expand_dims(k,1)

# Fourier Coefficients
Xk = 2/(np.pi**2 * k**2)
E = np.exp(1j*2*np.pi*f0*np.multiply(t, k.T))
x = Xk.T @ E.T

X0 = 1/2
x_FS = X0 + x

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(t,x_FS.T, linewidth=4)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

- Ιδιότητες
- Python κώδικας



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt = P$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k ^2 = P$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) x^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l^* e^{-j2\pi l f_0 t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k X_k^* + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* e^{j2\pi(k-l)f_0 t} \right] dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k X_k^* \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2
 \end{aligned}$$

0 [ορθογωνιότητα]

$$\begin{aligned}
 &(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) \\
 &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \sum \text{rest} \\
 &= \sum a_i b_i + \sum \text{rest}
 \end{aligned}$$

• Ιδιότητες

- Έστω το αναπτυγμένο σε σειρά Fourier πραγματικό σήμα

$$X_{-k} = X_k^* \Rightarrow |X_k| = |X_{-k}|$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{X_0} + \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} \underbrace{\frac{2}{j\pi k}}_{X_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$X_k = \frac{2}{j\pi k}, k \neq 0$

α) Πόση είναι η μέση ισχύς του?

β) Δείξτε ότι το ποσοστό της συνολικής μέσης ισχύος που είναι κατανεμημένο στους 4 πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (μαζί με το σταθερό όρο) είναι ~85%.

$$\begin{aligned} \alpha) P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = |X_0|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} |X_k|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \left| \frac{2}{j\pi k} \right|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad ? \quad (1) \end{aligned}$$

• Ιδιότητες

Είναι
$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Άρα η ① θα δώσει $P_x = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{3}{12} + \frac{16}{12} = \frac{19}{12}.$

β) Θέλαμε την ισχύ του $x_{k=[0,4]}(t) = x_0 + \sum_{k=1}^3 \underbrace{2|x_k|}_{A_k} \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k).$

≡ έγραψε ότι ένα σήμα

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

έχει μέση ισχύ $P_x = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k^2}{2}$, άρα αντίστοιχα θα έχουμε

$$P_x^{k=0,1,2,3} = x_0^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{(2|x_k|)^2}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^3 2|x_k|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^3 2 \left| \frac{2}{j\pi k} \right|^2$$

• Ιδιότητες

$$= \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^3 \frac{8}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^2} 1.36111 \simeq 1.3533$$

Η συνολική μέση ισχύς ισούται με $\frac{19}{12} \simeq 1.5833$. Άρα στις πρώτες τέσσερις όρες της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (τα X_0 συμπεριλαμβανομένα) αντιστοιχεί το $\frac{1.3533}{1.5833} \simeq 0.854 \leadsto 85\%$ της συνολικής μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος.

Άρα αν αποθηκεύαμε τους 7 συντελεστές Fourier X_k , για $k = -3, \dots, 3$, που αντιστοιχούν στις 4 πρώτες όρες της τριγωνομετρικής σειράς Fourier, αποθηκεύαμε το $\sim 85\%$ της συνολικής μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

