

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 7^Η

- Ο χώρος της συχνότητας



- Έχουμε μια πολύ καλή εικόνα για το πώς λειτουργούν τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Παρ' όλα αυτά, θέλουμε περισσότερα! 😊
- Δεν ξέρουμε **γιατί** τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
 - Δηλ. δεν ξέρουμε πώς μια δεδομένη είσοδος επηρεάζεται από το σύστημα
 - Δεν μπορούμε να **σχεδιάσουμε** συστήματα που να συμπεριφέρονται όπως θέλουμε εμείς
- Βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση μπορούν να γίνουν αν στρέψουμε την προσοχή μας στο **χώρο της συχνότητας**
- Στην προσπάθειά μας αυτή, θα ξεφύγουμε από την αναπαραστάσεις πλάτους-χρόνου που έχουμε δει ως τώρα...
- Θα περάσουμε σε αναπαραστάσεις **πλάτους-συχνότητας**!
- Ποιες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις? Θα το δούμε άμεσα...

- Όπως η συνάρτηση Δέλτα έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των συστημάτων στο χώρο του χρόνου...
- ...έτσι και το **μιγαδικό εκθετικό** σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$, $A > 0$ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στο χώρο της συχνότητας
- Αν βάλουμε ένα τέτοιο σήμα ως είσοδο σε ένα **ΓΧΑ** σύστημα τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) Ae^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\phi)} d\tau \\&= Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \\&= H(f_0) (Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}) \\&= H(f_0) x(t)\end{aligned}$$

με

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

ένα **σταθερό μιγαδικό αριθμό** που εξαρτάται από το f_0 , δηλ. από τη συχνότητα εισόδου

- Το αποτέλεσμα

$$y(t) = H(f_0)x(t)$$

με $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$ και

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{2} e^{j\theta} + \frac{1}{2} e^{-j\theta} \\ \sin \theta &= \frac{1}{2j} e^{j\theta} - \frac{1}{2j} e^{-j\theta}\end{aligned}$$

είναι πολύ σημαντικό!

- Μας λέει ότι ένα μιγαδικό σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$ περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά $H(f_0)$!

- Η οποία βέβαια μπορεί να αλλάζει το πλάτος και τη φάση της εισόδου! ☺

- Για παράδειγμα, αν $H(f_0) = 1 + j$, τότε

$$y(t) = (1 + j)Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} = \sqrt{2}Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi + \frac{\pi}{4})}$$

- Ξέρουμε ότι τέτοια σήματα σχετίζονται στενά με ημιτονοειδή σήματα
- Μέσω της σχέσης του Euler

**Νέο πλάτος, νέα φάση
στην έξοδο !!**

- Για παράδειγμα, αν

$$x_1(t) = 2e^{j(2\pi 100t + \frac{\pi}{3})}$$

$$\{z + z^* = 2\operatorname{Re}\{z\}\}$$

και

$$H(100) = 1 + j$$

τότε

$$y(t) = (1 + j)2e^{j(2\pi 100t + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}2e^{j(2\pi 100t + \frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{j(2\pi 100t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})}$$

- Αν

$$x_2(t) = x_1^*(t) = 2e^{-j(2\pi 100t + \frac{\pi}{3})}$$

και

$$H(-100) = 1 - j$$

ποιά η έξοδος?

$$\begin{aligned} y_2(t) &= H(-100)x_2(t) = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{-j(2\pi 100t + \frac{\pi}{3})} \\ &= 2\sqrt{2}e^{-j(2\pi 100t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

συμψηφί!

- Αν

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 4\cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{3})$$

ποιά η έξοδος?

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 4\sqrt{2}\cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) \quad !$$

- Και για μη ημιτονοειδή σήματα?

- Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε **κάθε** σήμα ως **άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων** συγκεκριμένων συχνοτήτων?
 - Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!!



- Ας ξεκινήσουμε μελετώντας αρχικά μόνο περιοδικά σήματα
- Υπενθυμίζεται ότι

- ☐ Ένα σήμα ονομάζεται **περιοδικό** αν ικανοποιεί τη σχέση

$$x(t) = x(t \pm T_0)$$

- ☐ Η μικρότερη χρονική διάρκεια T_0 που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται **περίοδος** του περιοδικού σήματος

- Μην μπερδεύετε τη **διάρκεια** T ενός **απεριοδικού** σήματος με την **περίοδο** T_0 ενός **περιοδικού** σήματος!

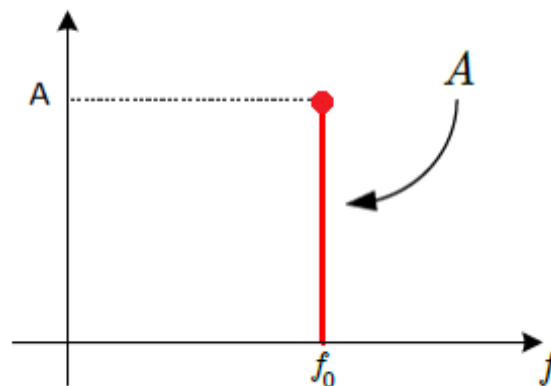
- ☐ Η περίοδος σχετίζεται με τη **θεμελιώδη συχνότητα** του, f_0 , με τη σχέση

$$f_0 = 1/T_0$$

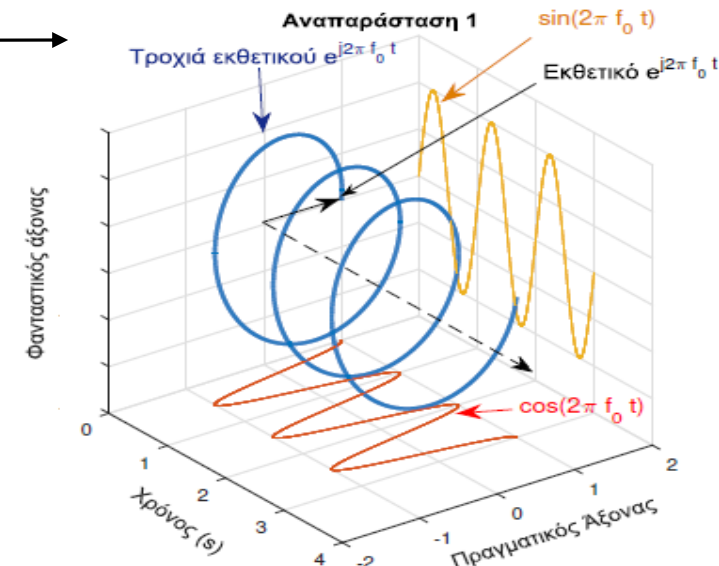
- ☐ Για ένα απλό ημίτονο, η θεμελιώδης συχνότητα μας πληροφορεί για το πλήθος των ταλαντώσεων που το σήμα εκτελεί στη μονάδα του χρόνου

- Έστω το γνωστό μας σήμα $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, $A \in \mathbb{R}_+$
- Το μιγαδικό αυτό σήμα αποτελείται από μια μόνο συχνότητα f_0 και περίοδο T_0

• Θυμηθείτε:



• Οπότε:



- Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

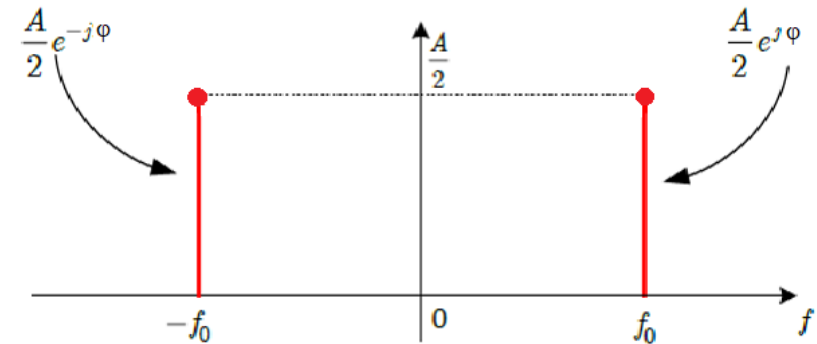
το οποίο γράφεται (Euler) ως:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}$$

- Οπότε η αναπαράστασή του

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}$$

θα είναι



- Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$x(t) = X_1 e^{j2\pi(1f_0)t} + X_{-1} e^{j2\pi(-1f_0)t}$$

με τους συντελεστές $X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$, $X_{-1} = X_1^* = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$, $A > 0$ να ονομάζονται **phasors** (φάσορες), όπως έχουμε ξαναπεί

- ... οι οποίοι είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί για πραγματικά σήματα (όπως το $\cos(\cdot)$)
- Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται **φάσμα (spectrum)**
- Είναι προτιμότερο το μέτρο του φάσρα να σχεδιάζεται σε μια γραφική παράσταση ενώ η φάση του σε μια άλλη
 - Στο **φάσμα πλάτους** σχεδιάζουμε το μέτρο του φάσρα
 - ...και στο **φάσμα φάσης** τη φάση του φάσρα

• Παράδειγμα

○ Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

*

$$\pm \frac{1}{j} = \mp j = e^{\mp j\frac{\pi}{2}}$$

$$x(t) = 3 - 2 \cos\left(2\pi \underline{10}t + \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(2\pi \underline{15}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

αφού ελέγξετε αν είναι περιοδικό $\rightarrow$ οι συχνότητες 10, 15 Hz σχηματίζουν λόγο ακέραιων, $\frac{10}{15}$, άρα το $x(t)$ είναι περιοδικό.

Είναι Euler

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 - 2 \left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} \right) + \left(\frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j2\pi 15t} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j2\pi 15t} \right) \\ &= 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j2\pi 15t} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j2\pi 15t} \\ &= 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j2\pi 15t} \\ &= 3 - \underbrace{e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t}}_{\text{οχι}} - \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t}}_{\text{οχι}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j2\pi 15t}}_{\text{ποσική μορφή } \checkmark} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j2\pi 15t}}_{\text{ποσική μορφή } \checkmark} \end{aligned}$$

Έστω $z(t)$, θα να μην το γράφω με πολλές φορές...

Παράδειγμα

Άρα

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 3 - e^{j\frac{n}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{n}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + z(t) \\
 &= 3 + e^{-jn} \cdot e^{j\frac{n}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + e^{jn} \cdot e^{-j\frac{n}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + z(t) \\
 &= 3 + \underbrace{e^{-j\frac{8n}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t}}_{\sqrt{}} + \underbrace{e^{j\frac{8n}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t}}_{\sqrt{}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\frac{2n}{3}} \cdot e^{j2\pi 15t}}_{\sqrt{}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\frac{2n}{3}} \cdot e^{-j2\pi 15t}}_{\sqrt{}} \\
 &\quad \downarrow \\
 &3 e^{j2\pi 0 \cdot t}
 \end{aligned}$$

$$-1 = e^{\pm j\pi}$$

$$\phi \in (-\pi, \pi]$$

Όλα οι συντελεστές των $e^{j2\pi f_k t}$ είναι γραμμένοι σε πράσινη τερφή!

Μποράμε τώρα να σχεδιάσαμε τα γράφημα πλάτους και φάσης!

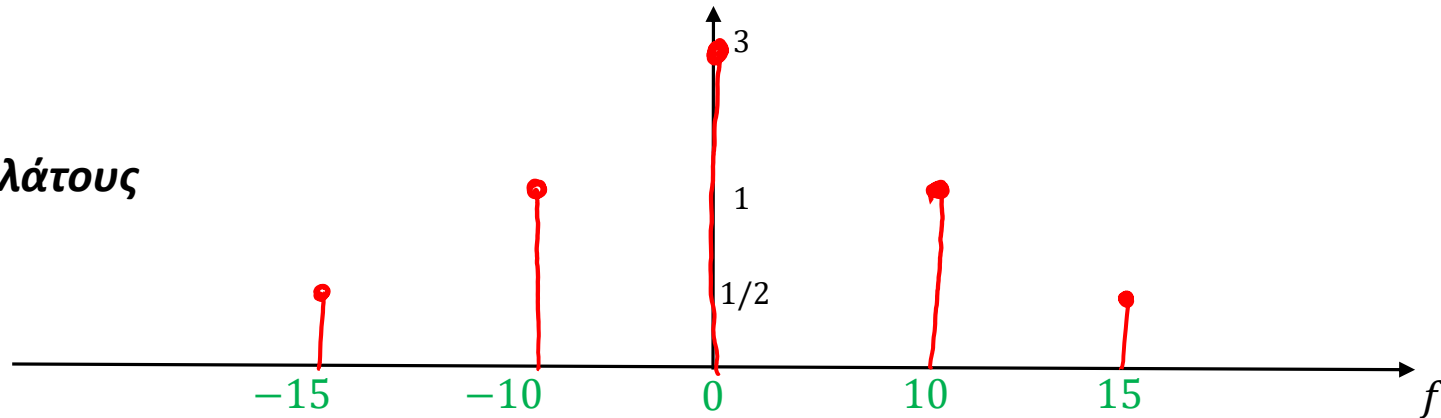
• Οπότε τελικά

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}}e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}}e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi}{3}}e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi}{3}}e^{-j2\pi 15t}$$

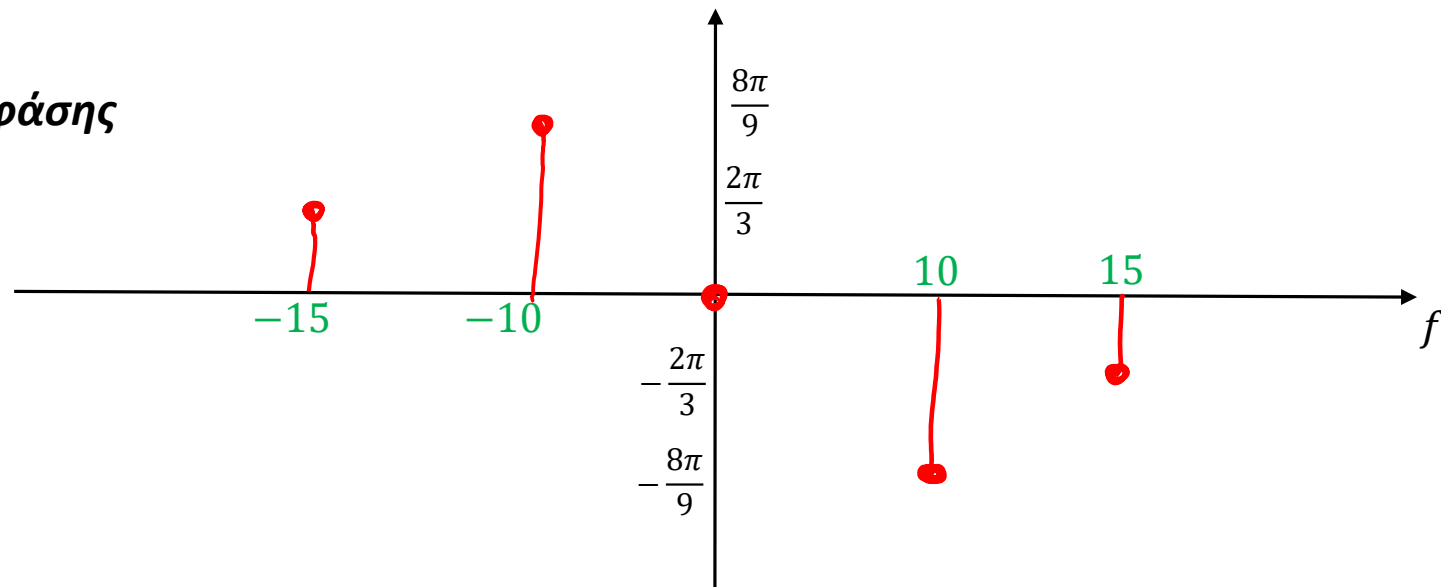
• Παράδειγμα

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}}e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}}e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi}{3}}e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi}{3}}e^{-j2\pi 15t}$$

φάσμα πλάτους

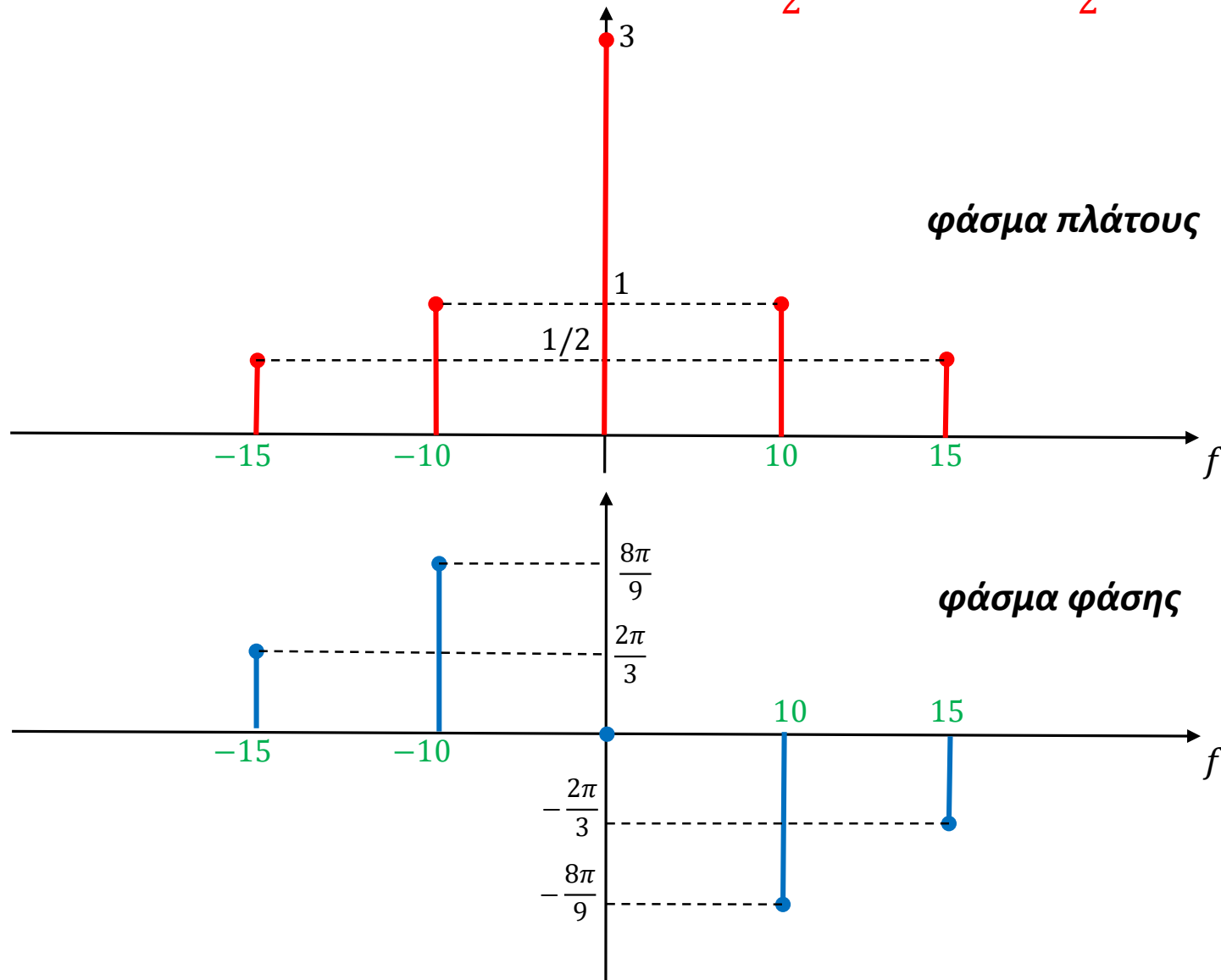


φάσμα φάσης



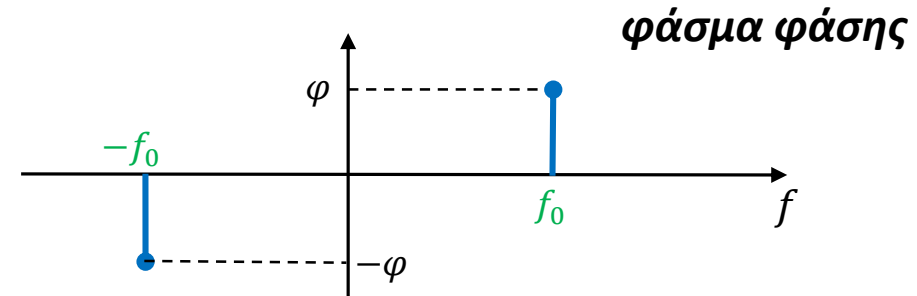
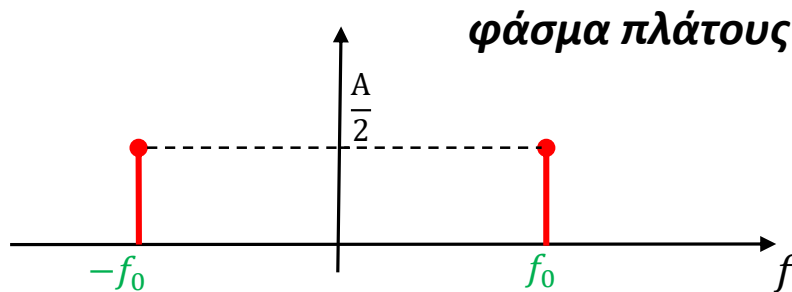
• Παράδειγμα

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}}e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}}e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi}{3}}e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi}{3}}e^{-j2\pi 15t}$$



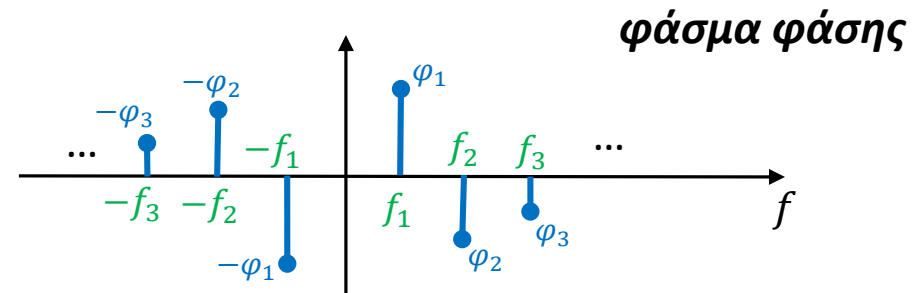
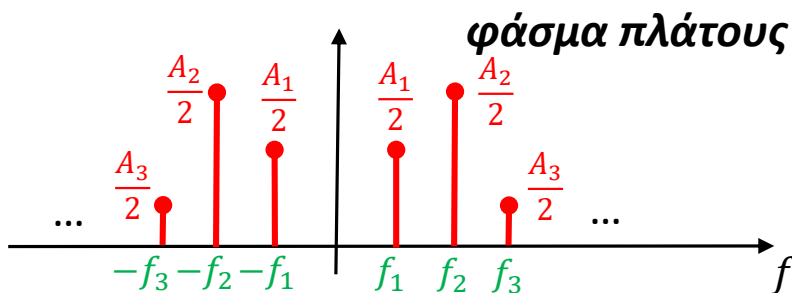
- Ο χώρος της συχνότητας
- Συνοπτικά

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}, \quad A > 0$$



- Γενικότερα

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t} \right]$$



- Το να εντοπίσει κανείς τις συχνότητες των επιμέρους ημιτονοειδών είναι εύκολο
- Ποια όμως είναι η **θεμελιώδης συχνότητα** f_0 όλου του περιοδικού σήματος?
 - ...(υποθέτοντας ότι είναι περιοδικό)

- Μπορούμε να δείξουμε ότι αν

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^N A_k \cos\left(2\pi \frac{1}{T_k} t + \varphi_k\right)$$

τότε αυτό είναι **περιοδικό** με περίοδο T_0 , δηλ. ικανοποιεί την $x(t) = x(t + T_0)$, αν

$$f_k T_0 = \frac{T_0}{T_k} \in \mathbb{Z}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος θα πρέπει να είναι ένα **κοινό πολλαπλάσιο των επιμέρους περιόδων**
- Το **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των επιμέρους περιόδων αποτελεί την περίοδο του συνολικού σήματος

$$T_0 = \text{ΕΚΠ}(T_1, T_2, \dots, T_k)$$

κι επειδή $f_0 = \frac{1}{T_0}$, τότε

$$f_0 = \text{ΜΚΔ}(f_1, f_2, \dots, f_k)$$

με ΜΚΔ το **μέγιστο κοινό διαιρέτη των επιμέρους συχνοτήτων!**

- Κάθε πραγματικό σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

a) Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του

b) Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του

- Η συμμετρία προκύπτει από τη **συζυγία** των φασόρων

$$2 \cos \left(2\pi \mathbf{10}t + \frac{\pi}{9} \right) + \sin \left(2\pi \mathbf{15}t - \frac{\pi}{6} \right)$$

- Επίσης παρατηρήστε ότι οι **συχνότητες** των ημιτόνων του παραδείγματος ήταν **ακέραιες πολλαπλάσιες** της θεμελιώδους συχνότητας, $f_0 = \text{ΜΚΔ}(10,15) = 5 \text{ Hz}$
 - Έτσι οι φάσορες μπορούν να γραφούν ως X_k , με k το αντίστοιχο **ακέραιο πολλαπλάσιο** της θεμελιώδους συχνότητας
 - Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι φάσορες μπορούσαν να γραφούν ως

$$X_2, X_{-2} = X_2^*, X_3, X_{-3} = X_3^*$$

- Οι $X_1, X_{-1} = X_1^*$ ήταν μηδενικοί
 - Δεν υπήρχε φασματικό περιεχόμενο στη συχνότητα $f = 5 \text{ Hz}$, παρ' όλο που αυτή είναι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος!

$$x(t) = X_0 e^{j2\pi \mathbf{0}t} + \mathbf{X_2} e^{j2\pi \mathbf{10}t} + \mathbf{X_{-2}} e^{-j2\pi \mathbf{10}t} + \mathbf{X_3} e^{j2\pi \mathbf{15}t} + \mathbf{X_{-3}} e^{-j2\pi \mathbf{15}t}$$

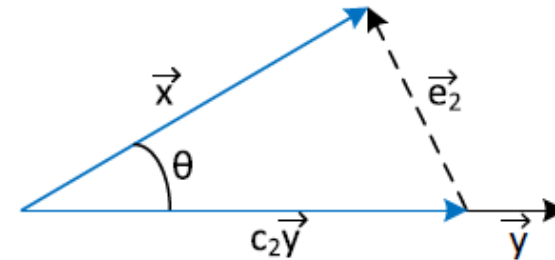
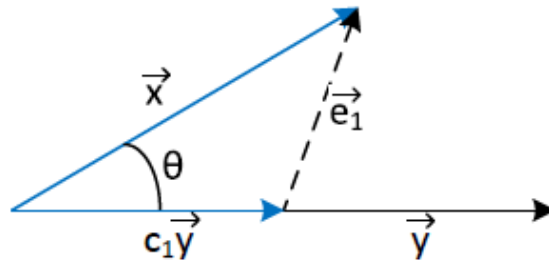
- Η ανάλυση περιοδικών σημάτων που γράφονται ως **άθροισμα ημιτόνων** είναι σχετικά απλή καθώς ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία, όσα ημιτονοειδή και αν υπάρχουν, ό,τι πρόσημα κι αν έχουν

- **Ερώτημα:** μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?
 - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
 - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!
- **Εναλλακτική διατύπωση:** μπορούμε να προσεγγίσουμε όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?

Το «σχεδόν» στις παραπάνω προτάσεις αφορά εξαιρέσεις που δε θα συναντήσουμε στην πράξη

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

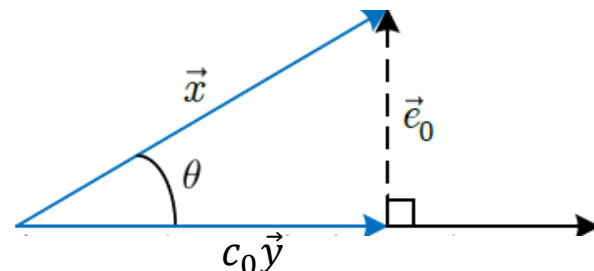
- Για να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα θα ήταν ωραίο να εμπνευστούμε από μερικές ιδιότητες των **διανυσμάτων**
- Έστω διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ όπως στο σχήμα
- Τα διανύσματα $c_i \vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος $\vec{x}$ από το διάνυσμα $\vec{y}$



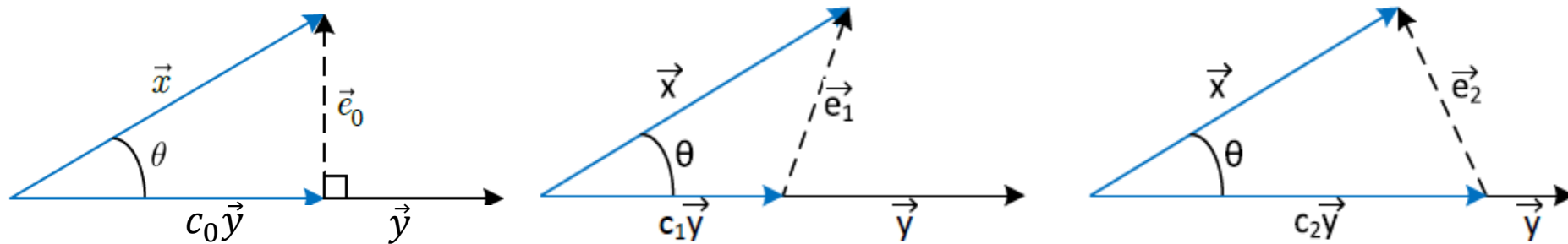
και $\vec{e}_i$ τα **διανύσματα σφάλματος**, με την έννοια ότι το $\vec{e}_i = \vec{x} - c_i \vec{y}$ είναι το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο $c_i \vec{y}$ για να πάρουμε το διάνυσμα $\vec{x}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i \vec{y} + \vec{e}_i$$

- Γνωρίζετε ότι το **μικρότερο** διάνυσμα σφάλματος είναι αυτό που είναι **κάθετο** στο διάνυσμα $\vec{y}$



• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα



• **Reminder:** τα διανύσματα $c_i \vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος $\vec{x}$ από το διάνυσμα $\vec{y}$

• Αν λοιπόν θέλαμε να γράψουμε $\vec{x} = c_i \vec{y} + \vec{e}_i \approx c_i \vec{y}$, ποια σταθερά c_i θα ήταν καλύτερη για αυτήν την προσέγγιση?

• Η διαίσθηση μας – και τα μαθηματικά ☺ – λέει τη σταθερά c_0 , αφού το διάνυσμα σφάλματος της, $\vec{e}_0$, είναι αυτό με το **μικρότερο μήκος (μικρότερο μέτρο)**

• Ποια είναι η σταθερά c_0 όμως?

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$\cos \theta = \frac{c_0 |\vec{y}|}{|\vec{x}|} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y}$$

με $\vec{x} \cdot \vec{y}$ το **εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων**

- Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Γιατί να μην εφαρμόσουμε την ίδια τακτική σε σήματα (αντί για διανύσματα)? 😊
- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που θέλουμε να το προσεγγίσουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$
- Με όμοιο σκεπτικό με πριν, ποιο είναι το **βέλτιστο** c – με κάποια έννοια – για το οποίο $x(t) \approx cy(t)$ στο διάστημα αυτό?
- Ας κάνουμε το ίδιο με πριν: $x(t) = cy(t) + e(t)$
- Ορίζουμε τη **συνάρτηση σφάλματος** (παρόμοια με το διάνυσμα σφάλματος) ως

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- Θα θέλαμε η συνάρτηση σφάλματος να είναι όσο γίνεται «μικρότερη»...
 - Αλλά με ποια έννοια «μικρότερη»?
- Ένας βολικός τρόπος είναι να ζητήσουμε η συνάρτηση σφάλματος να έχει την **ελάχιστη ενέργεια**

$$E_e(c) = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt$$

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης - optimization!

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

• Ενέργεια σφάλματος

Η **συνάρτηση ενέργειας** είναι τετραγωνική (quadratic) ως προς c και άρα κυρτή (convex), κι επειδή η 2^η παράγωγός της ως προς c είναι θετική, εγγυάται ότι έχει ένα μοναδικό ελάχιστο.

$$E_e(c) = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt$$

- Για να βρούμε το βέλτιστο c θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dc} E_e(c) = 0$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το βέλτιστο c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt$$

με

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt$$

και

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt = \langle x, y \rangle$$

να ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των σημάτων $x(t), y(t)$

- Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα
- Συγκρίνετε:

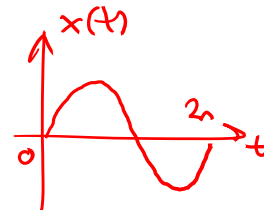
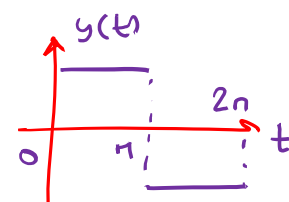
$$c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle$$

• Παράδειγμα

○ Έστω $y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ -1, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$ και $x(t) = \sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$



Θέλουμε το βέλτιστο c : $y(t) \approx cx(t)$

Άρα $c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} x(t)y(t) dt$ (1)

$E_x = \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \dots = \pi \Leftrightarrow \boxed{E_x = \pi}$ (2)

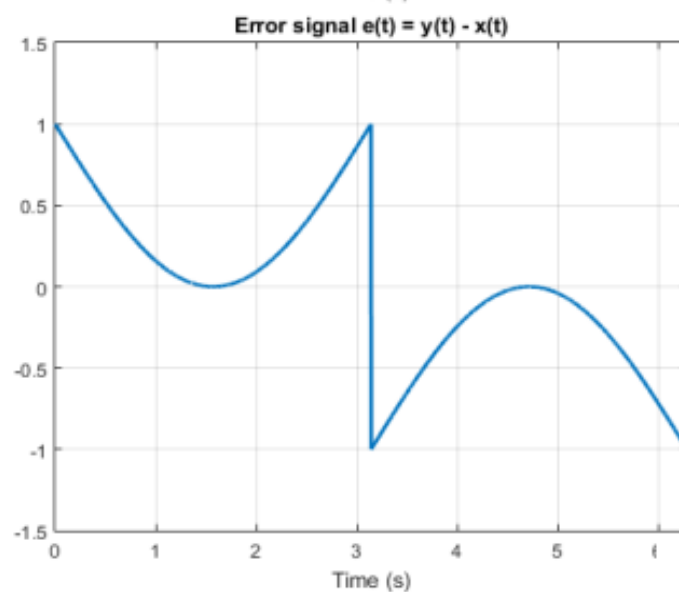
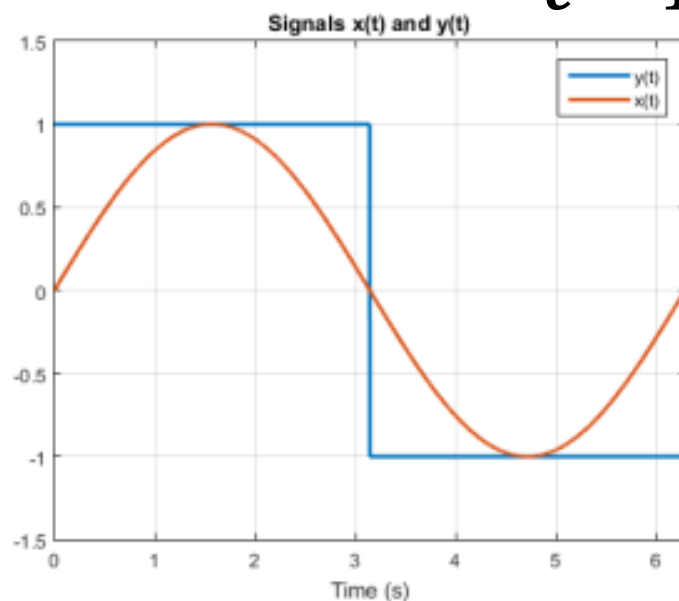
(1) $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t)y(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin(t) dt$

$= \dots = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \boxed{c = \frac{4}{\pi}}$

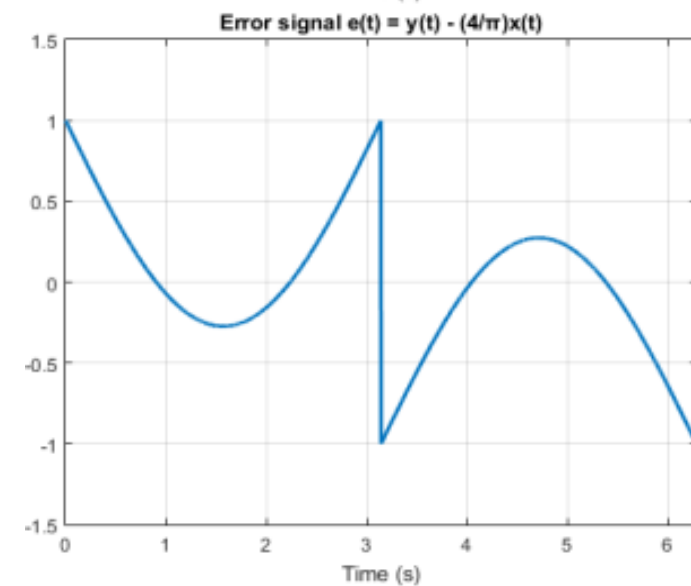
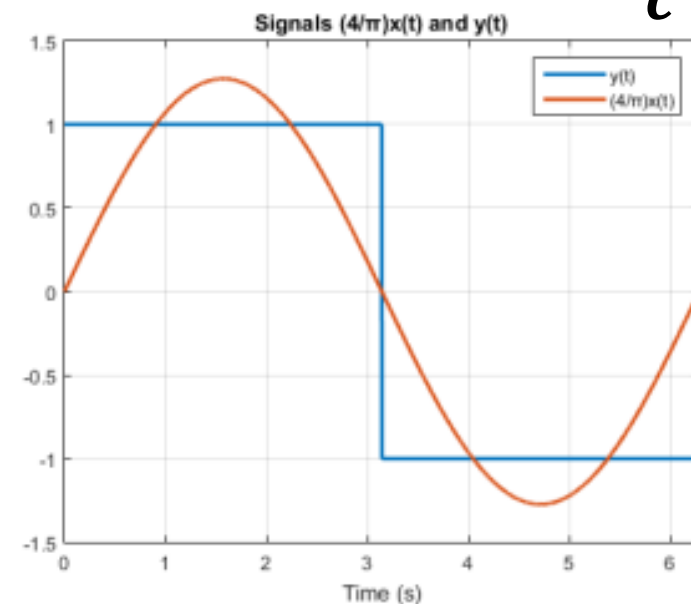
Άρα $y(t) \approx \frac{4}{\pi} x(t)$

• Παράδειγμα

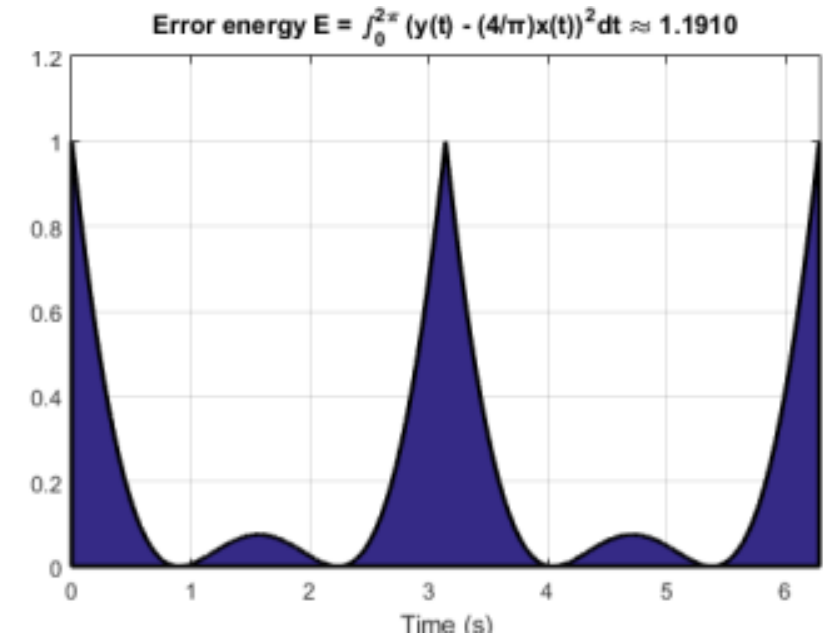
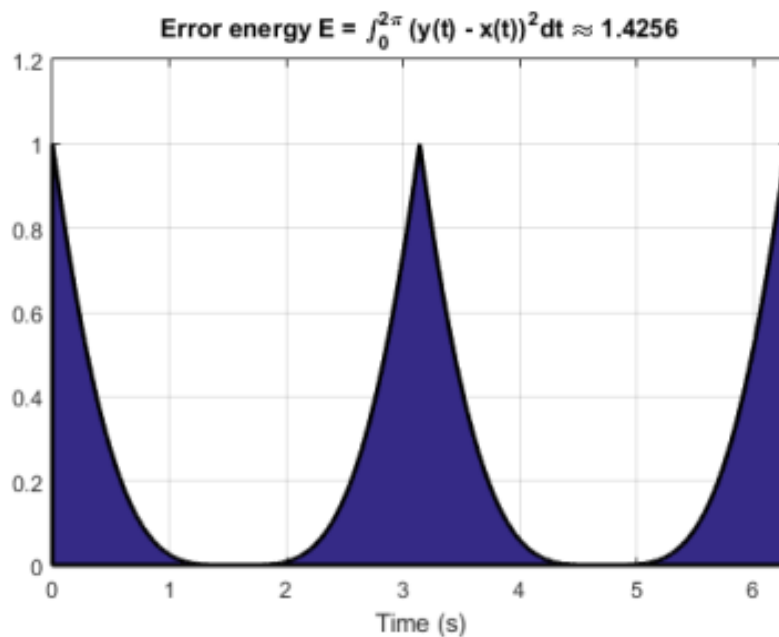
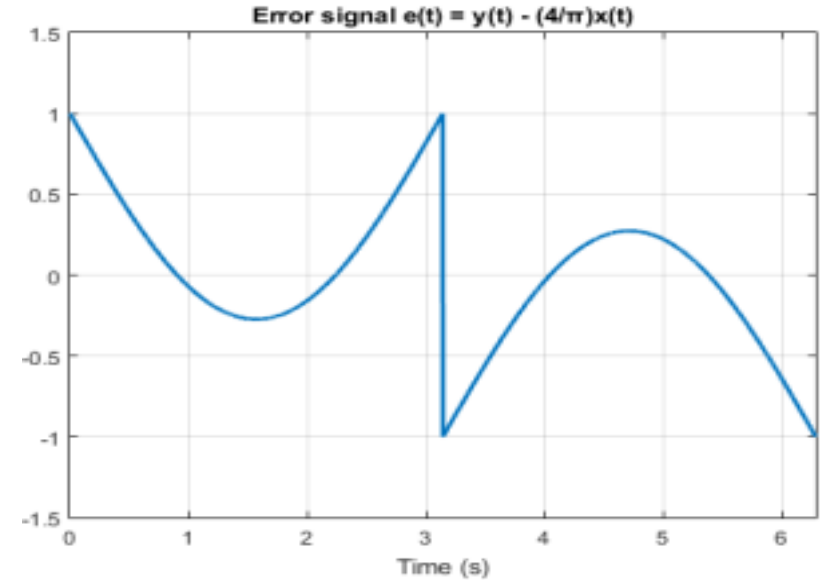
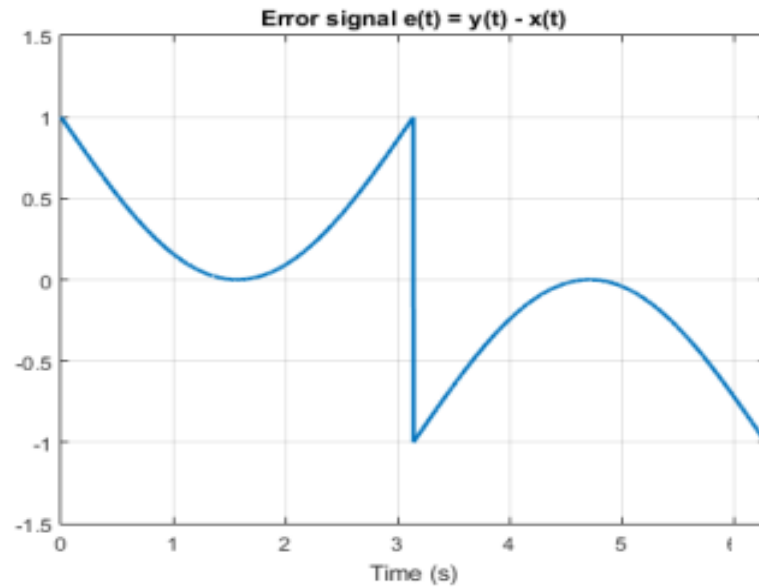
$$c = 1$$



$$c = \frac{4}{\pi}$$



• Παράδειγμα



• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

• **Back to theory:** γιατί να μείνουμε μόνο σε ένα σήμα προσέγγισης?

• Αν χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση του τύπου

$$y(t) \approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_N x_N(t) = \sum_{k=1}^N c_k x_k(t)$$

• Αναμένουμε ότι η ενέργεια σφάλματος θα γίνεται όλο και μικρότερη όσο προσθέτουμε όρους $x_i(t)$

• Αρκεί οι όροι να είναι «κατάλληλοι»

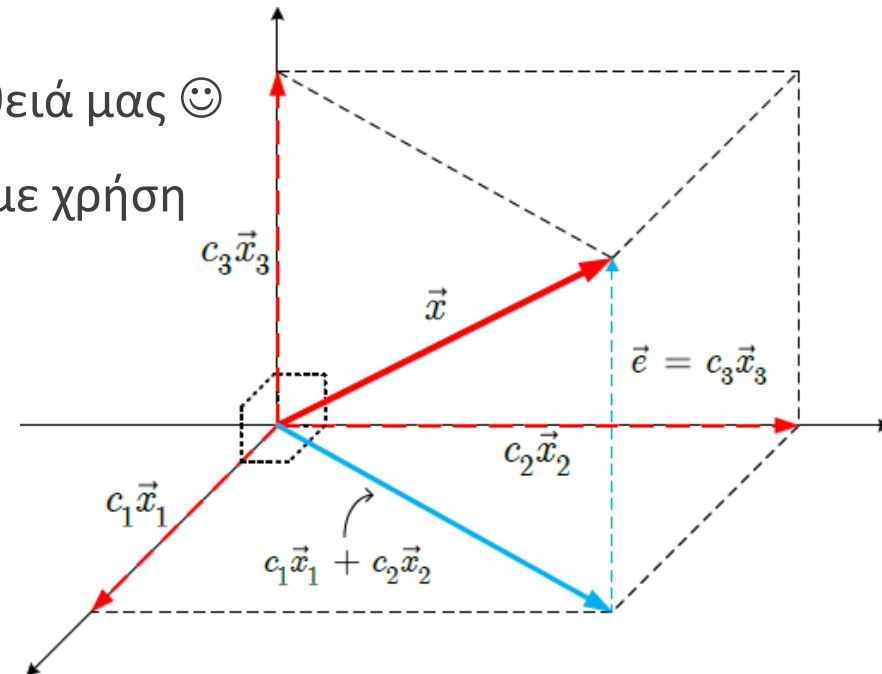
• Ξανά, τα διανύσματα θα τρέξουν προς βοήθειά μας ☺

• Ένα διάνυσμα στον 3D-χώρο περιγράφεται με χρήση τριων διανυσμάτων

- Ένα για το μήκος
- Ένα για το πλάτος
- Ένα για το ύψος

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3 \vec{x}_3$$

• Πλήρης και ακριβής αναπαράσταση!



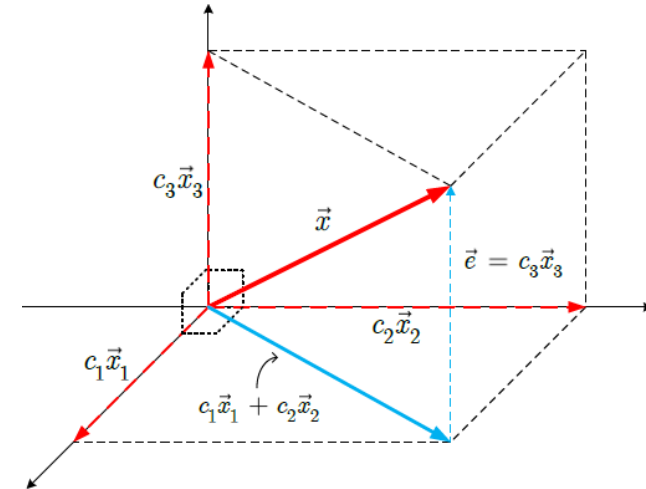
• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Αν χρησιμοποιήσουμε **δυο** αντί για **τρια** διανύσματα για την περιγραφή του διανύσματος $\vec{x}$ τότε θα έχουμε **σφάλμα**

- Έστω ότι δεν περιλαμβάνουμε το $c_3\vec{x}_3$
- Αυτό θα είναι το **διάνυσμα σφάλματος**

- Διάνυσμα σφάλματος:

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3$$



- **Ερώτηση**: ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράψουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ πλήρως και ακριβώς?

- Η διαίσθησή μας λέει ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$x_1 = [1, 0, 0], \quad x_2 = [0, 1, 0], \quad x_3 = [0, 0, 1]$$

- Τι **χαρακτηριστικά** έχουν τα παραπάνω διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν **χωρίς σφάλμα**?

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Τι **χαρακτηριστικά** έχουν τα τρία προηγούμενα διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα?

☐ Είναι **ορθογώνια** $\rightarrow$ το **εσωτερικό τους γινόμενο (ανά δυο) είναι μηδέν**

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

- Από τη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ορθογωνιότητα συνεπάγεται **γραμμική ανεξαρτησία**
- Γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δυο

☐ Αποτελούν ένα **πλήρες** σύνολο του 3D-χώρου

- Κανένα άλλο διάνυσμα δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα τρία παραπάνω

- Οι δυο αυτές ιδιότητες (γραμμ. ανεξαρτησία & πληρότητα) μας ονοματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα ως **βάση** του 3D-χώρου

- Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός όλων των διανυσμάτων που αποτελούν τη βάση του χώρου **με μηδενικό σφάλμα**

- Πάμε στο χώρο των σημάτων τώρα... 😊



- **Ερώτημα:** μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?
 - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
 - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!
- **Εναλλακτική διατύπωση:** μπορούμε να **προσεγγίσουμε** όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Έστω T_0 η **περίοδος** και $f_0 = 1/T_0$ η **θεμελιώδης συχνότητα** του περιοδικού σήματος που θέλουμε να προσεγγίσουμε σε μια περίοδό του
- Ας επιλέξουμε ένα σύνολο από ζεύγη συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, που έχουν **συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες** της θεμελιώδους συχνότητας $f_0 = 1/T_0$
- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο από $2N$ συζυγή μιγαδικά εκθετικά σήματα, **συν τη μονάδα**

$$\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-N}^N, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Ας προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ σε μια περίοδό του $[0, T_0)$ ως ένα **άθροισμα** $2N + 1$ τέτοιων σημάτων με συντελεστές X_k (δε χρησιμοποιούμε τώρα τη γραφή c_k):

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- **Συνάρτηση σφάλματος**

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ζητούνται τα X_k που δίνουν την **ελάχιστη ενέργεια σφάλματος**
- **Βελτιστοποίηση!! (ξανά 😊)**

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως αυτές που είδαμε, (με τα μαθηματικά να είναι κάπως πιο απαιτητικά) μπορεί κανείς να δείξει ότι:

Ορθογωνιότητα στο $\mathbb{C}$:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt = 0$$

- Το σύνολο $\mathbb{E}$ έχει **στοιχεία ορθογώνια** μεταξύ τους:

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

- Το σύνολο $\mathbb{E}$ είναι **πλήρες όταν** $N \rightarrow +\infty$, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος

- Άρα το σύνολο

$$\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

αποτελεί **βάση** του χώρου

- Οπότε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Ισότητα υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος!

- Ποιά είναι όμως **επιτέλους** αυτά τα X_k ???

- **Σειρές Fourier**

- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier**, αποτελούν το **εσωτερικό γινόμενο σε μια περίοδο μεταξύ του περιοδικού σήματος και των μελών της οικογένειας $\mathbb{E}$** , και δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0} \langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \in \mathbb{C}$$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει **και μιγαδικά** περιοδικά σήματα
- Οι συντελεστές Fourier προκύπτουν από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, δηλ. από την **προβολή** του σήματος $x(t)$ πάνω στις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις $e^{j2\pi k f_0 t}$
 - Το X_k μας λέει «πόσο» από το εκθετικό $e^{j2\pi k f_0 t}$ υπάρχει μέσα στο σήμα $x(t)$! ☺

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

