

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 6^Η

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης
- Συνέλιξη



- Συστήματα ως γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$



με αρχικές συνθήκες $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(N-1)}(0^-)$

- Έξοδος ως άθροισμα δυο ανεξάρτητων συνιστωσών

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

με

- ☐ $y_{zi}(t)$: την **απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response)**
- ☐ $y_{zs}(t)$: την **απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)**
- ☐ Χρειαζόμαστε επιπλέον την **κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$**

- $y_{zi}(t)$: **απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response)**
- Λύση ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = 0$$

με χρήση αρχικών συνθηκών $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(N-1)}(0^-)$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k$$

- Χαρακτηριστικές ρίζες και μορφή απόκρισης μηδενικής εισόδου (**απλές** και **r —πολλαπλή** ρίζες)

$$y_{zi}(t) = \left(\sum_{i=1}^r c_i t^{i-1} e^{\lambda_j t} + \sum_{\substack{k=r+1, \\ k \neq j}}^N c_k e^{\lambda_k t} \right) u(t)$$

- Οι σταθερές c_i βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες



- $h(t)$: **κρουστική απόκριση**
- Θεωρούμε το **απλό** σύστημα

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \mathbf{x}(t)$$



- Λύση ομογενούς εξίσωσης με χρήση «**αρχικών**» συνθηκών

$$h_0(0^+) = 0, h'_0(0^+) = 0, \dots, h_0^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N}$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k$$

με λ_i τις χαρακτηριστικές ρίζες

- Μορφή κρουστικής απόκρισης **απλού** συστήματος (**απλές** και **r –πολλαπλή** ρίζες)

$$h_o(t) = \left(\sum_{i=1}^r c_i t^{i-1} e^{\lambda_j t} + \sum_{\substack{k=r+1, \\ k \neq j}}^N c_k e^{\lambda_k t} \right) u(t)$$

- Οι σταθερές c_i βρίσκονται από τις «**αρχικές**» συνθήκες

- $h(t)$: **κρουστική απόκριση**
- Αρχικό σύστημα



$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- Μορφή κρουστικής απόκρισης αρχικού συστήματος (με **απλές** και με μια **r —πολλαπλή** ρίζες)

$$h(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} h_o(t)$$

$$= \sum_{l=0}^M b_l \left(\frac{d^l}{dt^l} \left(\sum_{i=1}^r c_i t^{i-1} e^{\lambda_j t} + \sum_{\substack{k=r+1, \\ k \neq j}}^N c_k e^{\lambda_k t} \right) u(t) \right)$$

- $y_{zs}(t)$: **απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)**
- Μηδενικές αρχικές συνθήκες, εξάρτηση μόνο από είσοδο $x(t)$
- **Συνέλιξη** μεταξύ εισόδου $x(t)$ και **κρουστικής απόκρισης** $h(t)$



$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- «Ανάγνωση» του ολοκληρώματος:
- Το ολοκλήρωμα του γινομένου (η «επιφάνεια κάτω από το γινόμενο») μεταξύ δυο σημάτων, του $x(\tau)$ και μιας χρονικά ανεστραμμένης και μετατοπισμένης έκδοσης του $h(\tau)$, δηλ. της $h(t - \tau)$
- Μεταβλητή μας στο ολοκλήρωμα είναι το τ !

- Ας εξετάσουμε την πράξη της συνέλιξης
- Ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)), \quad a \in \mathbb{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

- Όλες αποδεικνύονται με τον ορισμό
- Η συνέλιξη φημίζεται για τη **δυσκολία** της ως πράξη
- Ας δούμε πόσο **απλή** είναι τελικά

- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ με την **αλγεβρική** μέθοδο

Είναι

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) \cdot \underline{e^{-(t-\tau-2)}} u(t-\tau-2) d\tau$$

$$= e^{-(t-2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\tau} \cdot e^{\tau}}_1 u(\tau) u(t-\tau-2) d\tau$$

$$= e^{-(t-2)} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) u(t-\tau-2) d\tau \quad (1)$$

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}, \quad u(t-\tau-2) = \begin{cases} 1, & t-\tau-2 > 0 \Rightarrow \tau < t-2 \\ 0, & t-\tau-2 < 0 \Rightarrow \tau > t-2 \end{cases}$$

- Συνέλιξη

- Παράδειγμα

Άρα $u(\tau) \cdot u(t-\tau-2) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t-2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2)$

Η (1) $\xRightarrow{(2)}$ $e^{-(t-2)} \int_0^{t-2} 1 \cdot 1 \, d\tau = e^{-(t-2)} \int_0^{t-2} (\tau)' \, d\tau$
 $= e^{-(t-2)} \tau \Big|_0^{t-2} = (t-2) e^{-(t-2)}, \quad t-2 > 0 \Rightarrow t > 2.$

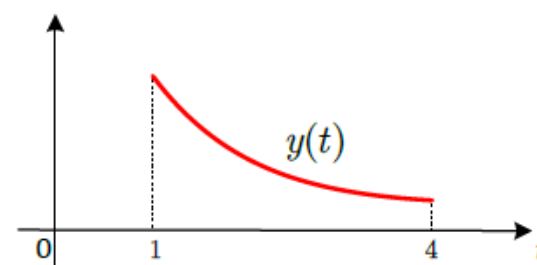
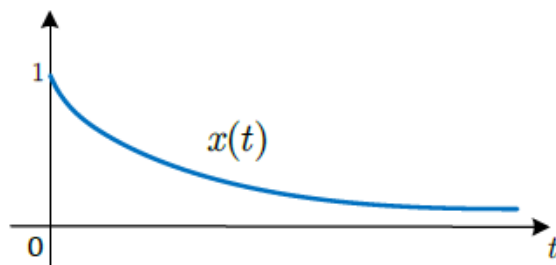
Άρα

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} (t-2) e^{-(t-2)}, & t > 2 \\ 0, & t < 2 \end{cases}$$

$$= (t-2) e^{-(t-2)} u(t-2).$$

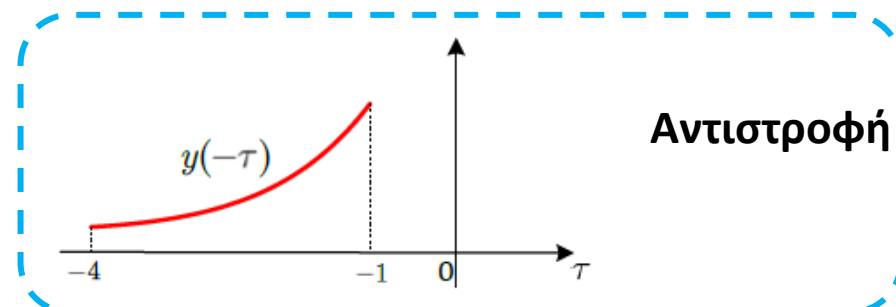
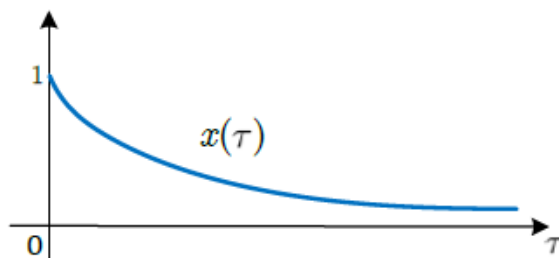
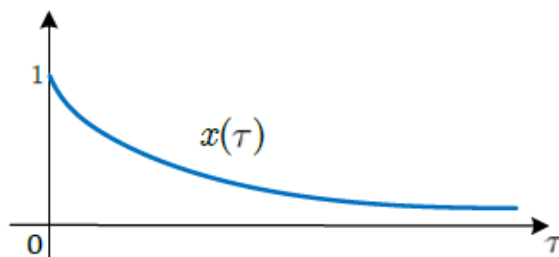
• Συνέλιξη

- Έστω δυο σήματα $x(t)$, $y(t)$ των οποίων ζητούμε τη συνέλιξη $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$

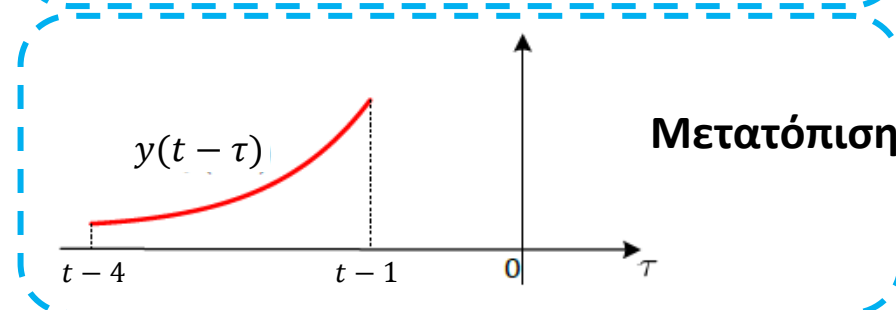


- Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί **χρονική αντιστροφή** και στη συνέχεια **χρονική μετατόπιση**

- Έστω ότι το $y(t)$ θα είναι αυτό το σήμα



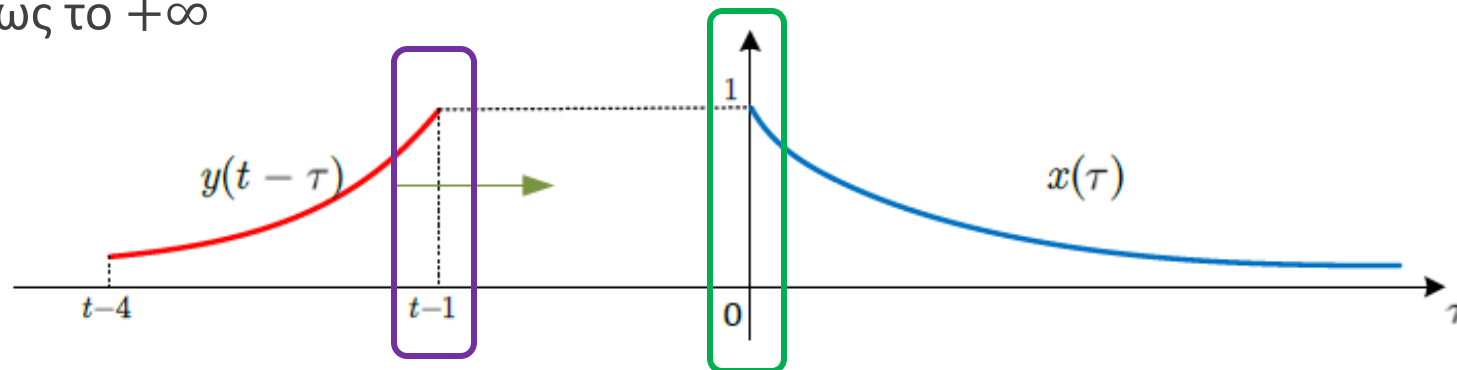
Αντιστροφή



Μετατόπιση

• Συνέλιξη

- Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα τ και ολισθαίνουμε το $y(t - \tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 1 < 0 \Rightarrow t < 1$$

και

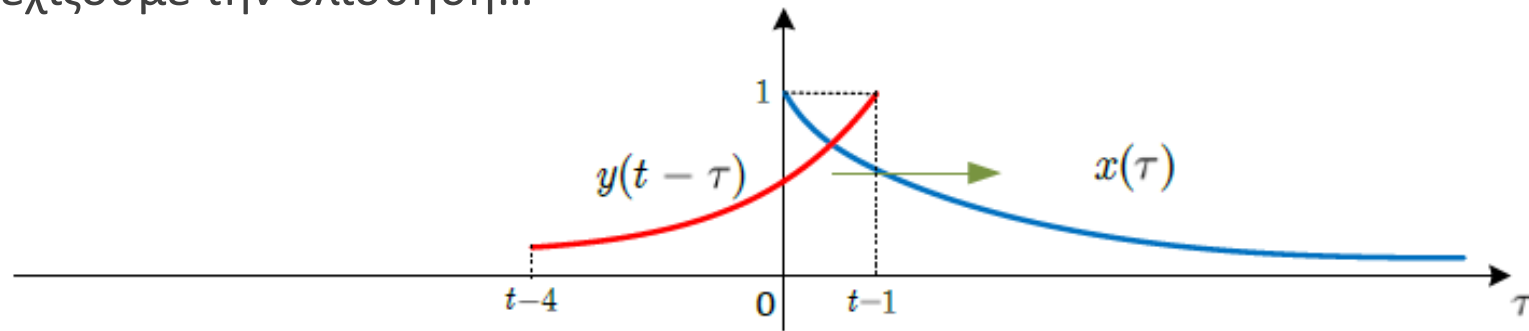
$$c(t) = 0$$

αφού τα δυο σήματα δε «ζουν» σε κοινό διάστημα

- Αυτό θα πάψει να συμβαίνει όταν το $y(t - \tau)$ πλησιάσει το $x(\tau)$ έτσι ώστε το **δεξί «άκρο»** του περάσει το $t = 0$...
 - ...που είναι το **αριστερό «άκρο»** του $x(\tau)$

- Συνέλιξη

- Συνεχίζουμε την ολίσθηση...



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 < 0 \text{ και } t - 1 > 0 \Rightarrow 1 < t < 4$$

και

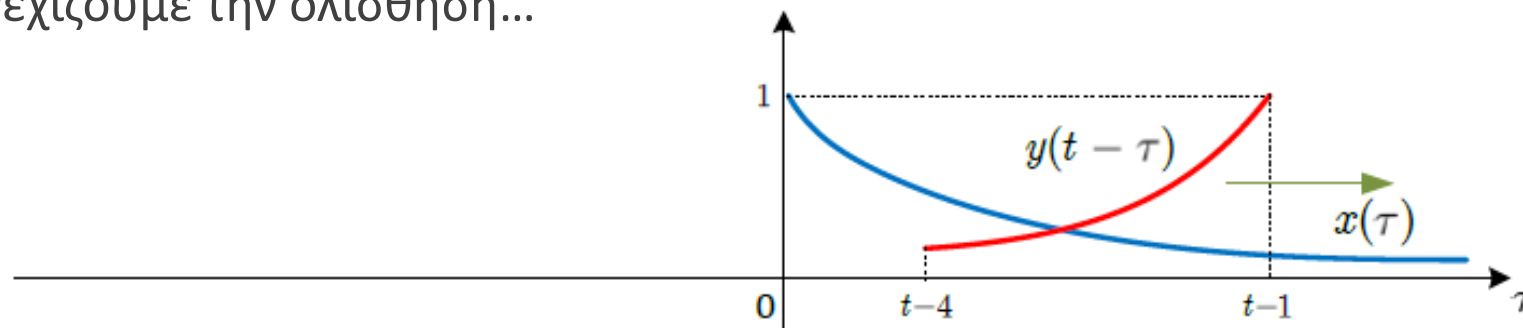
$$c(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(1, 4)$

- Υπάρχει μια ακόμα περίπτωση...

- **Συνέλιξη**

- Συνεχίζουμε την ολίσθηση...



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4$$

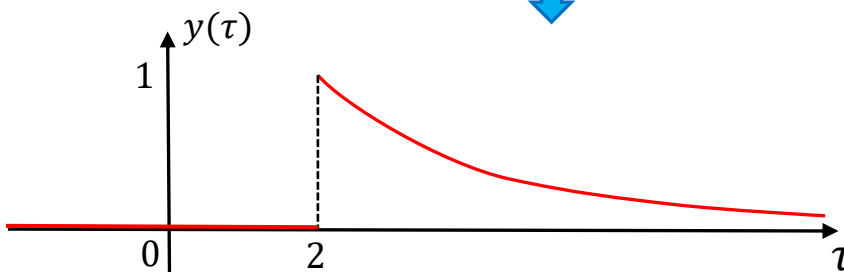
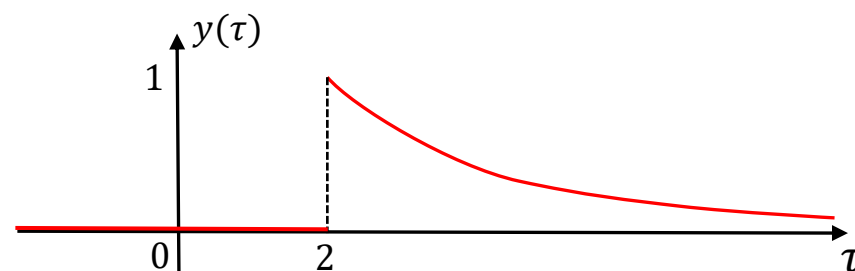
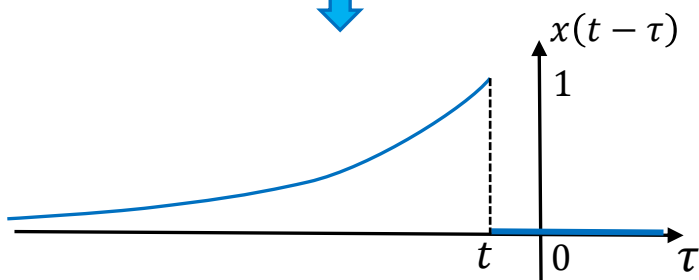
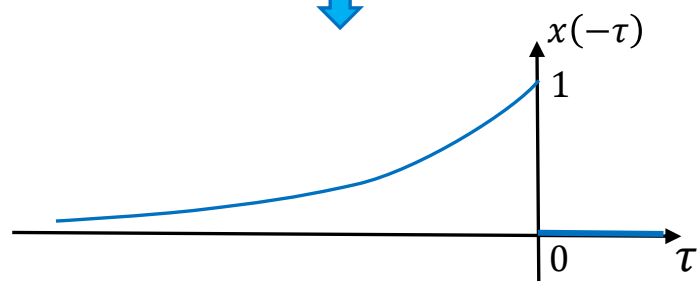
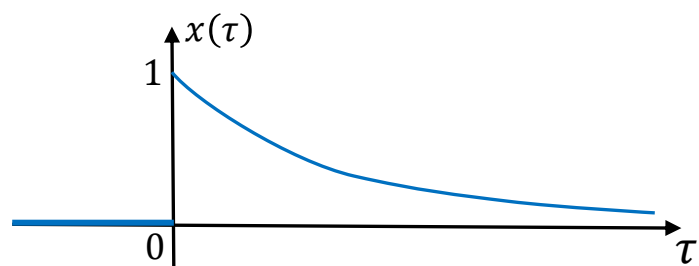
και

$$c(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

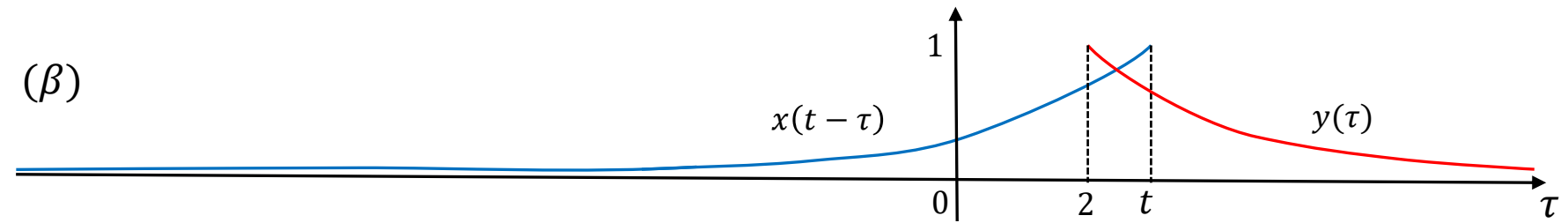
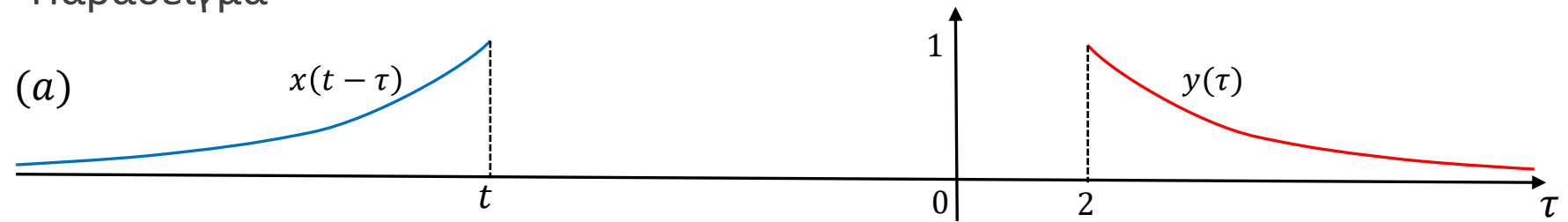
- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(4, +\infty)$
- Άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν
- Η λύση που περιγράφηκε ονομάζεται **γραφική λύση συνέλιξης**

- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

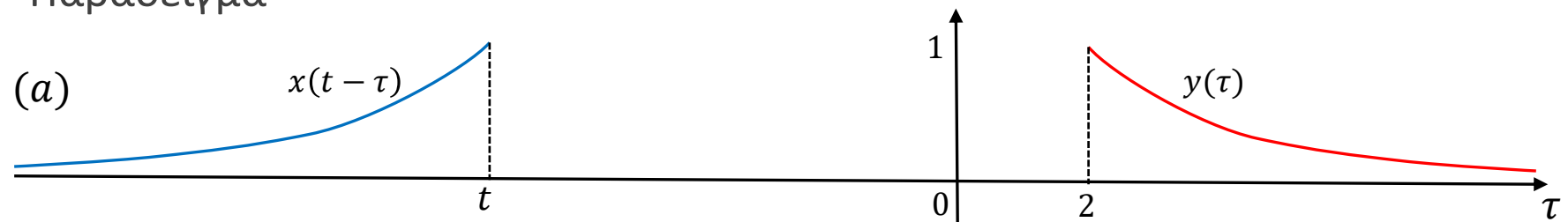
○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$



- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

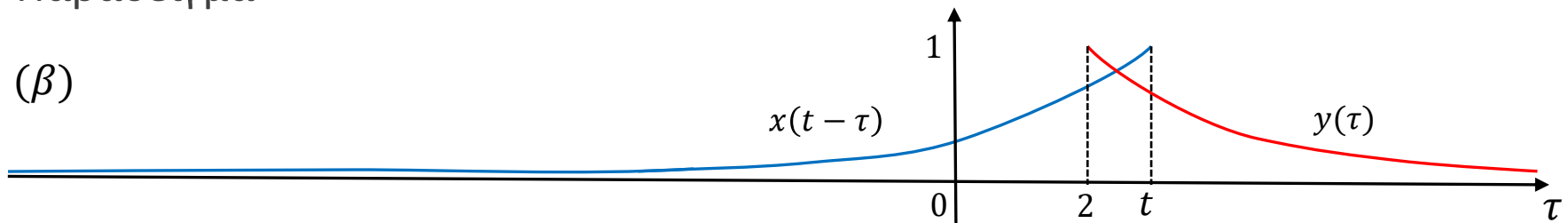


- Συνέλιξη
- Παράδειγμα



Εδώ, όσο $t < 2$, $c_{xy}(t) = 0$.

- Συνέλιξη
- Παράδειγμα



Εδώ, όσο $\boxed{t > 2}$, τότε

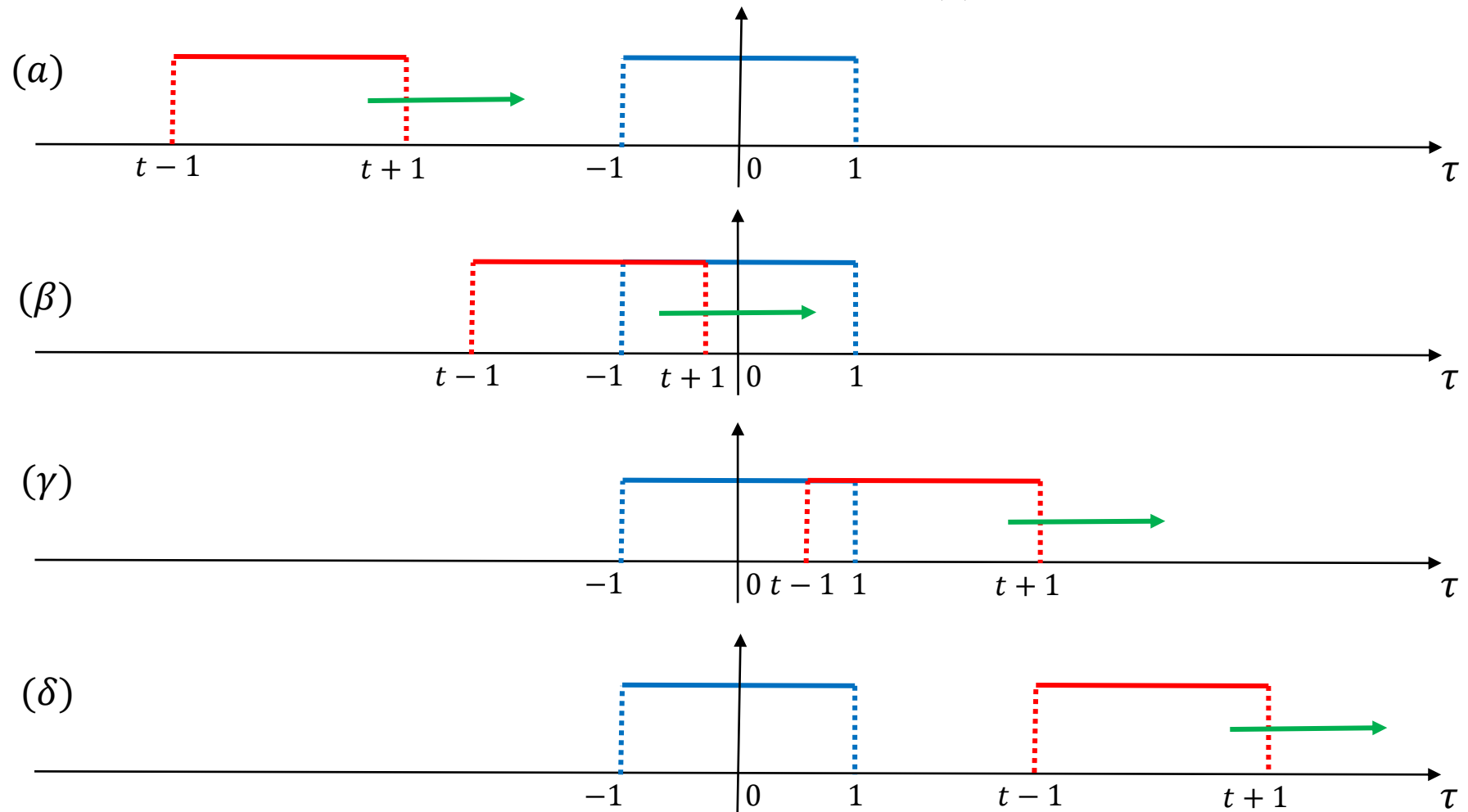
$$\begin{aligned}
 C_{xy}(t) &= \int_2^t e^{-\tau} e^{-(t-\tau-2)} d\tau = \int_2^t \underbrace{e^{-\tau} \cdot e^{\tau}}_1 \cdot e^{-(t-2)} d\tau \\
 &= \int_2^t e^{-(t-2)} d\tau = e^{-(t-2)} \int_2^t d\tau = e^{-(t-2)} \tau \Big|_2^t = \\
 &= (t-2) e^{-(t-2)}, \quad \boxed{t > 2}
 \end{aligned}$$

Αρ

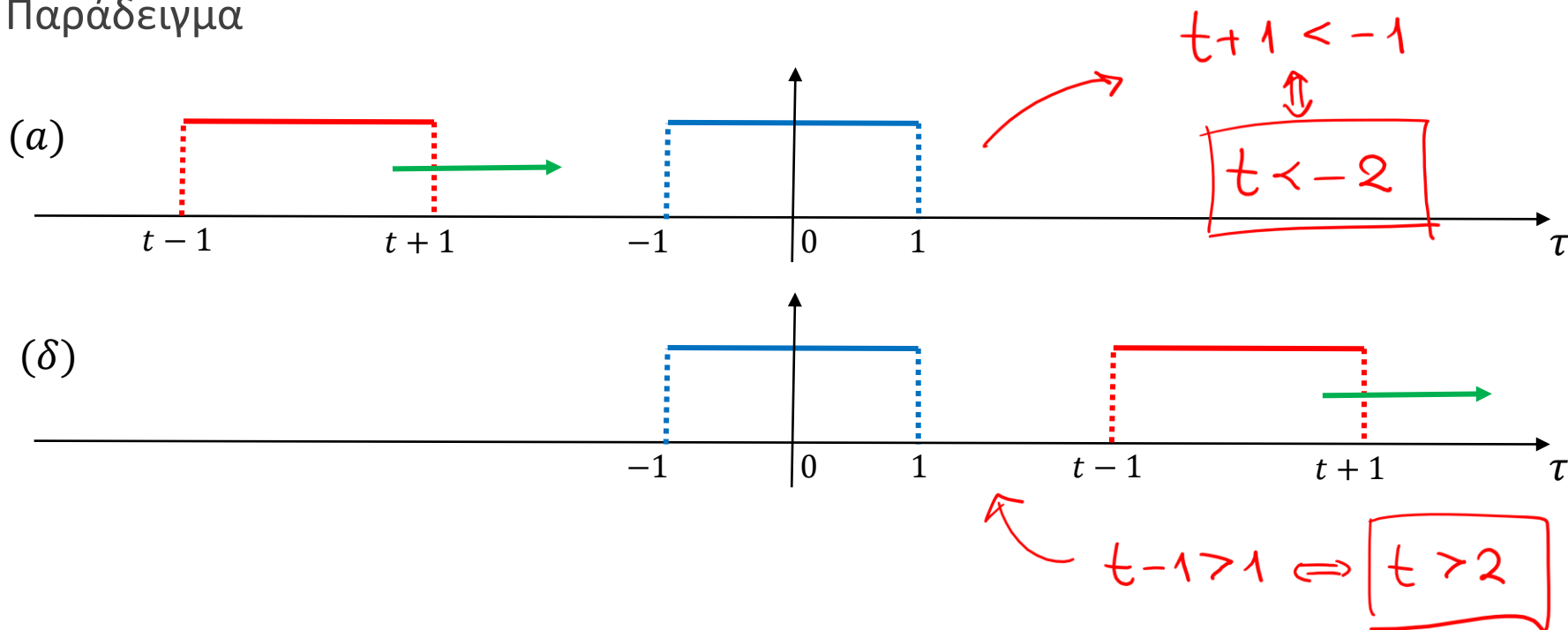
$$C_{xy}(t) = (t-2) e^{-(t-2)} u(t-2).$$

- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ και $y(t) = x(t)$



- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

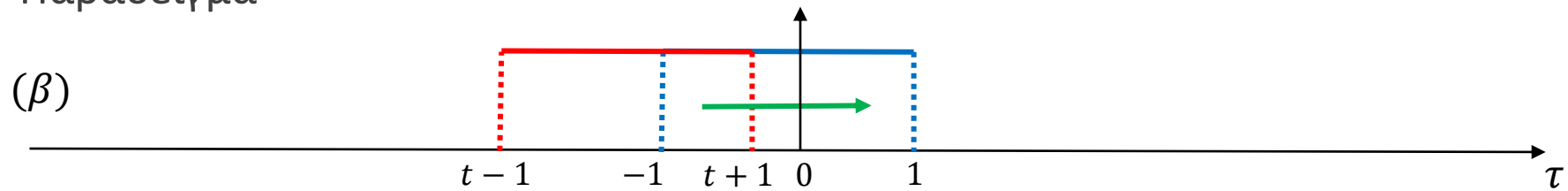


Βλέπουμε ότι

$$C_{xx}(t) = 0 ,$$

$$\text{για } t > 2 \text{ ή } t < -2$$

- Συνέλιξη
- Παράδειγμα



Εδώ,

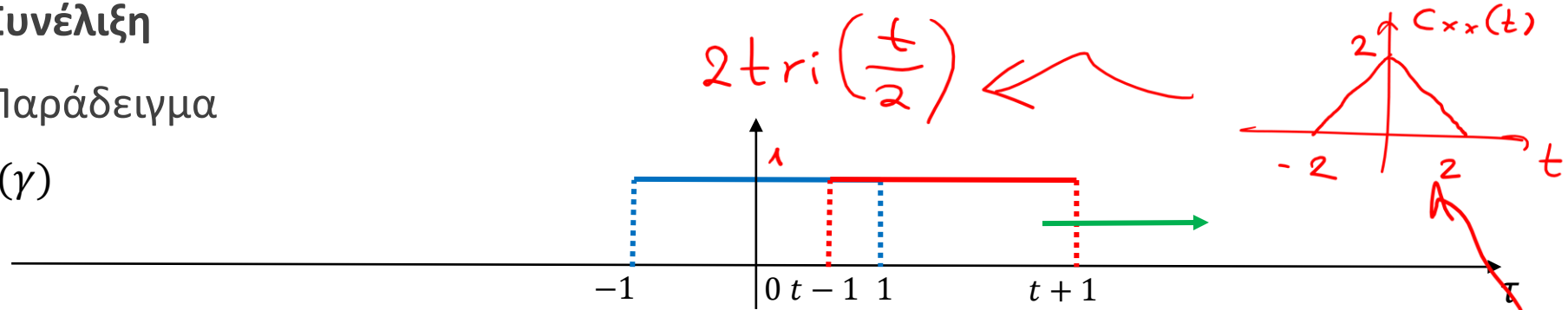
$$\begin{aligned}
 c_{xx}(t) &= \int_{-1}^{t+1} 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_{-1}^{t+1} = (t+1) - (-1) \\
 &= t+2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{για } t-1 < -1 \text{ και } t+1 > -1 \\
 t < 0 \text{ και } t > -2
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } t \in (-2, 0)$$

- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

(γ)



Εδώ ,

$$C_{xx}(t) = \int_{t-1}^1 1 \cdot 1 d\tau = \tau \Big|_{t-1}^1 = 1 - (t-1)$$

$$= 2 - t,$$

Αρ

$$\text{για } \begin{cases} t-1 < 1 \text{ και } t+1 > 1 \\ t < 2 \text{ και } t > 0 \end{cases} \quad C_{xx}(t) = \begin{cases} 0, & t < -2, t > 2 \\ t+2, & -2 < t < 0 \\ 2-t, & 0 < t < 2 \end{cases}$$

$$\text{Αρ } t \in (0, 2).$$

• Συνέλιξη

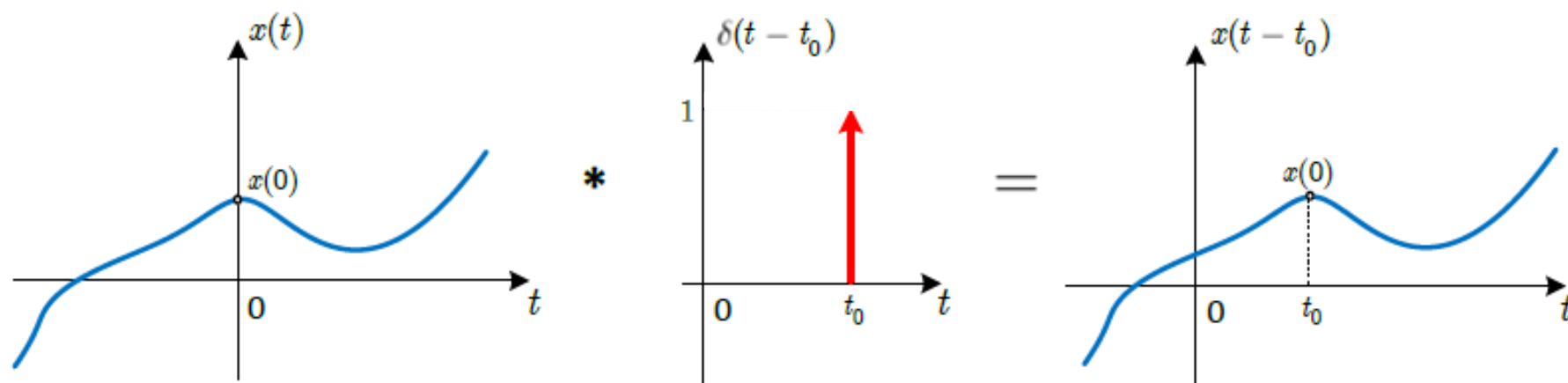
• Συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα

- Από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα έχουμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα της μορφής

$$A\delta(t - t_0), \quad A \in \mathbb{R}$$

δίνει το ίδιο σήμα μετατοπισμένο κατά t_0 και πολλαπλασιασμένο με $A \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$x(t) * A\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ax(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = Ax(t - t_0)$$



• Συνολική Απόκριση Συστήματος

- Με βάση τα προηγούμενα, η συνολική έξοδος ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις **με αρχικές συνθήκες** δίνεται ως

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left(\sum_{i=1}^r c_i t^{i-1} e^{\lambda_j t} + \sum_{\substack{k=r+1, \\ k \neq j}}^N c_k e^{\lambda_k t} \right) u(t) + x(t) * h(t)$$

(αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι **απλές**, πλην **μιας r —πολλαπλής**)

- Αν το **σύστημα είναι ΓΧΑ**, τότε η έξοδος δίνεται **μόνο** από την απόκριση μηδενικής κατάστασης

$$y(t) = y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

- Κατά κανόνα ενδιαφερόμαστε για **ΓΧΑ συστήματα**
 - Κάποιες πολύ λίγες φορές θα εξετάζουμε και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος

• Ευστάθεια Συστήματος

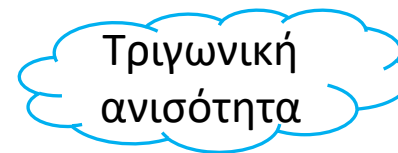
- Γνωρίζετε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν

$$|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \mathfrak{R}_+$$

- Προφανώς αυτή η έξοδος $y(t)$ μπορεί να είναι είτε η συνολική, είτε κάποια από τις επιμέρους
- Ξέρουμε ότι η **απόκριση μηδενικής εισόδου** περιλαμβάνει σήματα της μορφής

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Για αυτά πρέπει **υποχρεωτικά** $\lambda_i < 0$ ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές
- Ξέρουμε ότι η **απόκριση μηδενικής κατάστασης** δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος
- Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει



$$\begin{aligned} |y_{zs}(t)| < B_y &\Rightarrow |y_{zs}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) h(t - \tau)| d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - \tau)| d\tau \end{aligned}$$

• Ευστάθεια Συστήματος

• Η σχέση

$$|y_{zs}(t)| < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - \tau)| d\tau < +\infty$$

ισχύει μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - \tau)| d\tau < +\infty$$

δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Η σχέση αυτή μας λέει ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** και αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για την **ευστάθεια** του συστήματος!
- Η συνθήκη αυτή μπορεί να ιδωθεί υπό το πρίσμα των συναρτήσεων που δημιουργούν την κρουστική απόκριση:

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Ξανά λοιπόν πρέπει να ισχύει $\lambda_i < 0$ για να είναι το σύστημα ευσταθές!
 - ...αφού η επιφάνεια κάτω από την $|h(t)|$ πρέπει να είναι πεπερασμένη

• Αιτιατότητα Συστήματος

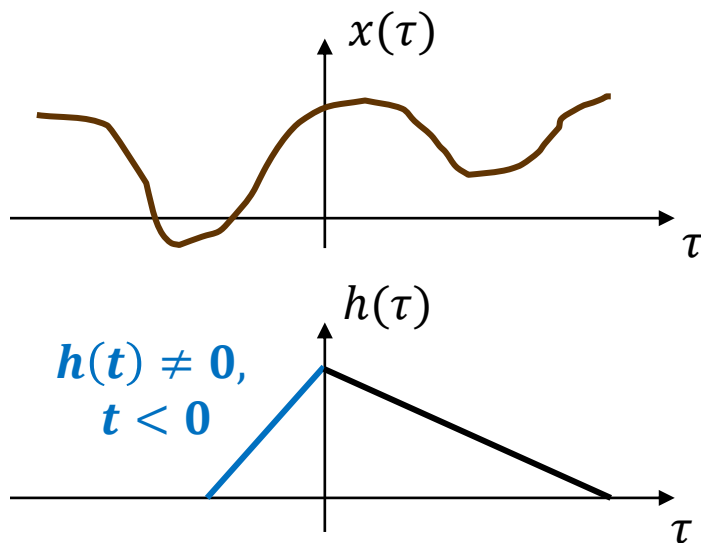
- Η αιτιατότητα ενός συστήματος έχει να κάνει με τη σχέση αιτίου-αποτελέσματος
 - Ένα σύστημα παράγει εξόδους μόνο αν υπάρχει κάποιο «αίτιο»-είσοδος που το διεγείρει
- Προφανώς ένα σύστημα που έχει **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες δεν μπορεί να είναι αιτιατό...
 - ... αφού παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί από μια είσοδο! 😊
- Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με αυτό που ονομάζουμε «**κατάσταση αρχικής ηρεμίας**» του συστήματος
- Μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη για ένα ΓΧΑ σύστημα που να **σχετίζει την κρουστική του απόκριση με την αιτιατότητα** (ή μη) του?
 - Ναι!
- Σκεφτείτε ότι όταν εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε η έξοδος είναι η κρουστική του απόκριση $h(t)$
- Η είσοδος εμφανίζεται για $t = 0$, άρα η έξοδος πρέπει να υπάρξει για $t \geq 0$ αν το σύστημα είναι αιτιατό
- Άρα **ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν**

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

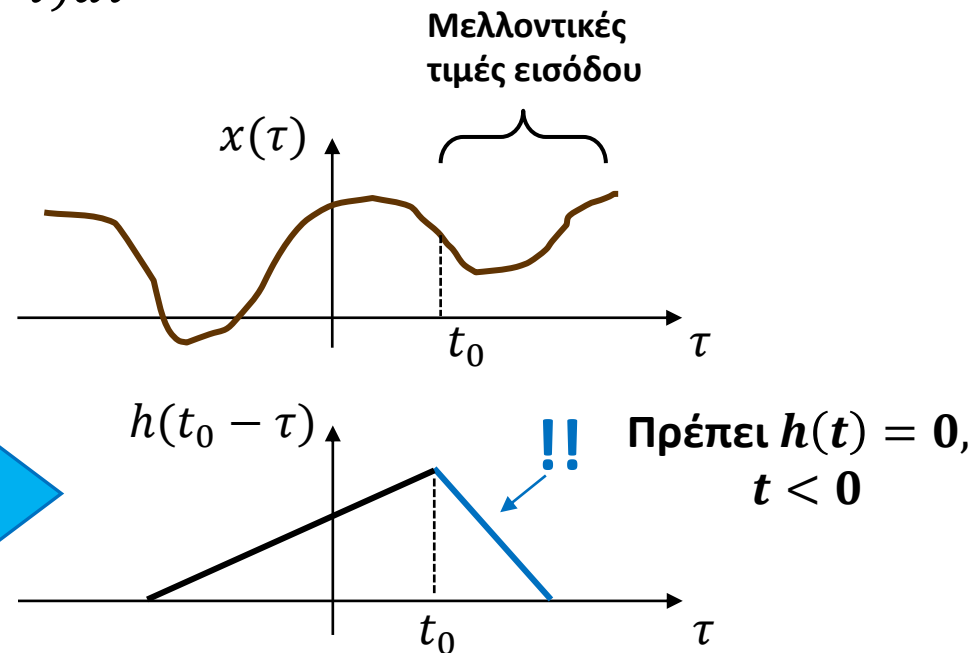
Αιτιατότητα Συστήματος

- Πώς όμως συνδέεται το αποτέλεσμα αυτό με την εξάρτηση της εξόδου από παρελθοντικές τιμές της εισόδου?
 - ...όπως είχαμε πει ότι πρωτοσυναντήσαμε την έννοια της αιτιατότητας...
- Ας θεωρήσουμε μια κρουστική απόκριση $h(t)$ που **δεν** ικανοποιεί την προηγούμενη συνθήκη, δηλ. έχει **μη** μηδενικές τιμές για $t < 0$
- Ας υπολογίσουμε το $y(t_0)$ για ένα τυχαίο σήμα εισόδου μέσω της συνέλιξης

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau$$



Αντιστροφή,
μετατόπιση



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

